

IL problema di Fermi-Pasta-Ulam

Ivan Bonamassa

Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce, 73100 Lecce, Italy

17 Luglio 2009

1 Introduzione

Nell'estate del 1953, presso il Los Alamos National Laboratory, Enrico Fermi, John Pasta e Stanislaw Ulam (insieme a Mary Tsingou che, sebbene non citata tra gli autori, diede un significativo contributo [1]) condussero alcune simulazioni computazionali sul comportamento di una corda vibrante sottoposta ad un debole accoppiamento non lineare (quadratico in un primo test e cubico in un secondo), adoperando uno tra i primi veri computer del mondo: il «*MANIAC*» (Mathematical Numerical Integrator And Computer). Le loro apparentemente innocue ricerche condussero a risultati a dir poco straordinari, in profonda contraddizione con alcuni dei più saldi pilastri della meccanica statistica. La semplicità del problema proposto ed il grande intuito di Enrico Fermi nel vedere nel computer un perfetto strumento futuro per lo studio della risposta dinamica di particolari sistemi fisici alla variazione di parametri, forze o condizioni iniziali, si può evincere dal seguente passo, tratto dall'autobiografia di Stanislaw Ulam, «*Adventures of a Mathematician*» (Rif.[2]):

I computer erano nuovissimi; infatti il Maniac di Los Alamos era stato appena ultimato [...]. Non appena le macchine furono pronte, Fermi, con il suo grande intuito e raziocinio, riconobbe immediatamente la loro importanza per lo studio di problemi in fisica teorica, astrofisica e fisica classica. Discutemmo di ciò a lungo e decidemmo di formulare un problema di semplice impostazione, ma tale che una sua soluzione avrebbe richiesto una lunga computazione, il che non sarebbe stato possibile con carta e penna o con altri computer allora esistenti [...]. Trovammo un problema tipico [...]: considerammo una corda elastica di estremi fissati, soggetta alla usuale forza elastica di tensione ed anche ad un fattore non lineare aggiuntivo [...]. Il problema era la ricerca di come [...] il moto del sistema raggiungesse, eventualmente, la termalizzazione [...]. John Pasta, un fisico giunto di recente, ci assistette nella programmazione e compilazione del problema mediante il Maniac [...].

La scelta del problema risultò una scelta estremamente felice. I risultati erano interamente differenti, qualitativamente, da quelli che lo stesso Fermi, con la sua grande conoscenza sulla propagazione delle onde, aveva pronosticato.

Ciò che Fermi, Pasta ed Ulam (FPU) cercavano di verificare era un basilare «atto di fede» della meccanica statistica, ovvero il fatto che per un sistema con un numero elevato di gradi di libertà e prossimo allo stato di equilibrio, un'arbitraria interazione non lineare, sufficientemente debole, tra le particelle che lo compongono, determina la «termalizzazione» dell'energia dello stesso (teorema di equipartizione). Quindi, nel caso particolare di un reticolo unidimensionale, essa fa sì che l'energia del sistema venga uniformemente distribuita tra tutti i suoi modi normali.

Del resto, Fermi era fortemente convinto che questo studio fosse direttamente legato ad uno dei suoi primi lavori del 1923 (Rif.[3]), nel quale cercava di dimostrare rigorosamente l'ipotesi ergodica. Infatti, è ben noto che l'equipartizione dell'energia tra i modi normali è intimamente connessa con le proprietà ergodiche del sistema in esame e per questo FPU indicarono (Rif.[4]) il loro obiettivo come segue: «Il comportamento ergodico di simili sistemi fu studiato con il principale intento di stabilire, sperimentalmente, il modo con cui i vari gradi di libertà del sistema tendono a raggiungere l'equipartizione dell'energia.»

FPU resero chiaro che il problema che volevano simulare era la vibrazione di un «continuo unidimensionale» (una corda) di estremi fissati sottoposta a forze non lineari in aggiunta al termine lineare dettato dalla legge di Hooke; per tal proposito, sostituirono «il continuo con un numero finito di punti, così che l'equazione alle derivate parziali descrivente il moto della corda venisse sostituita da un numero finito di equazioni alle derivate ordinarie» (le ben note equazioni del moto di Newton). In termini più attuali, possiamo dire che FPU studiarono un *reticolo unidimensionale* (one-dimensional lattice) costituito da N oscillatori interagenti aventi condizioni al contorno nulle.

2 Il modello di FPU

Consideriamo una corda di lunghezza ℓ , massa M ed avente estremi fissati, disposta lungo un asse che chiamiamo asse x e scegliamo come origine di quest'ultimo la posizione dell'estremo di sinistra della stessa. Suddividiamo la corda in $N + 1$ tratti di lunghezza $h = \ell/(N + 1)$ (passo reticolare), ciascuno dei quali viene ridotto ad un punto avente massa $m = M/(N + 2)$. Indichiamo con $x_n = nh$, $n = 1, \dots, N$, le posizioni di equilibrio degli N oscillatori (Fig.1); saranno $x_0 = 0$ ed $x_{N+1} = \ell$ le posizioni degli estremi.

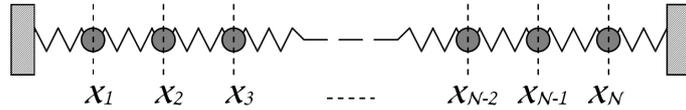


Figura 1: *Rappresentazione schematica del modello di FPU.*

Perturbiamo quindi il sistema ed indichiamo con η_n lo spostamento orizzontale dell' n -esimo oscillatore dalla posizione di equilibrio; evidentemente $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$, ed $x'_n(t) = x_n + \eta_n(t)$ rappresenta la nuova posizione del punto mobile all'istante t . Assumiamo ora che il potenziale d'interazione tra ciascun oscillatore e quelli immediatamente vicini sia $U = \frac{1}{2}k\delta_n^2 + \frac{1}{3}k\alpha\delta_n^3$, dove il coefficiente $\alpha(\ll 1)$, misura l'intensità del contributo non lineare, mentre $\delta_n \equiv [(x'_{n+1} - x'_n) - h] = (\eta_{n+1} - \eta_n)$ rappresenta la «sollecitazione» dovuta alla perturbazione. Allora, scegliendo gli spostamenti η_n , tra loro indipendenti, come coordinate generalizzate del sistema, deduciamo la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^N \dot{\eta}_n^2 - \frac{1}{2}k \sum_{n=1}^N (\eta_{n+1} - \eta_n)^2 - \frac{1}{3}k\alpha \sum_{n=1}^N (\eta_{n+1} - \eta_n)^3. \quad (1)$$

Da questa si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange del moto per l' n -esimo oscillatore

$$m\ddot{\eta}_n = k(\eta_{n+1} + \eta_{n-1} - 2\eta_n) [1 + \alpha(\eta_{n+1} - \eta_{n-1})], \quad (2)$$

aventi condizioni al contorno $\eta_0(t) = \eta_{N+1}(t) = 0$. Come condizione aggiuntiva, FPU richiesero che $\dot{\eta}_n(0) = 0$, essendo interessati a studiare il moto del reticolo partendo dallo stato di quiete; in questo modo il problema è completamente determinato dalla scelta degli spostamenti iniziali $\eta_n(0)$ degli N oscillatori.

Senza perdere in generalità, poniamo per semplicità di calcolo $m = k = 1$. In assenza del termine non lineare di interazione (cioè per $\alpha = 0$), le soluzioni esatte del problema possono essere scritte in termini dei modi normali di oscillazione $Q_k(t)$ (essenzialmente le rappresentazioni di Fourier degli spostamenti $\eta_n(t)$ per condizioni al contorno $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$), descritti dalla relazione

$$Q_k(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N \eta_n(t) \sin\left(\frac{nk\pi}{N+1}\right), \quad (3)$$

aventi frequenze ω_k ed energie E_k date rispettivamente da

$$\omega_k = 2 \sin\left(\frac{\pi k}{2(N+1)}\right), \quad E_k = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2 \right). \quad (4)$$

In tale situazione è chiaro che, avendo a che fare con N oscillatori armonici disaccoppiati, non interviene alcun processo di termalizzazione dell'energia del sistema; al contrario, è possibile vedere che, per qualsiasi coppia di condizioni iniziali $\eta_n(0)$ ed $\dot{\eta}_n(0)$, l'energia E_k di ciascun modo è una costante del moto.

Se tuttavia α è piccolo ma non nullo, nella rappresentazione dei modi normali l'equazione 2 assume la forma

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = \alpha \sum_{i,j=1}^N C_{ij} Q_i Q_j \omega_i \omega_j, \quad (5)$$

dove i coefficienti C_{ij} (dati, come esempio, in Rif.[5]) definiscono la complicata dipendenza del moto dall'interazione non lineare. Sulla base delle ben note argomentazioni della meccanica statistica, FPU si aspettavano che la presenza del termine non lineare nell'equazione 5 avrebbe fatto sì che l'energia, inizialmente concentrata in un particolare modo di oscillazione, si sarebbe gradualmente distribuita tra tutti gli altri modi, permettendo così di mostrare come il sistema evolve verso l'equilibrio. In effetti, era convinzione generale che un sistema con un numero elevato di gradi di libertà sottoposto a qualsiasi tipo di non linearità, raggiungesse l'ergodicità (vedi, ad esempio, Rif.[3]).

Per provare questo assunto, FPU integrarono numericamente le equazioni del moto 5 per diversi valori di α , imponendo come forma iniziale della corda una semplice onda sinusoidale e studiarono l'andamento delle energie $E_k(t)$ di tutti i modi per un cospicuo numero di periodi $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (storicamente fu il modo con $k = 1$ il primo ad essere eccitato).

I primi risultati si riferiscono agli anni 1953-1954, con alcuni ulteriori casi studiati nel Dicembre 1954, a seguito della morte di Fermi. Quanto ottenuto dalle simulazioni numeriche fu a dir poco sbalorditivo. Come descritto dagli autori in [4], in tutti i problemi testati, si manifestava inizialmente un graduale flusso dell'energia dal primo modo verso modi più elevati (come atteso) ma, al seguito di un intervallo di tempo sufficientemente lungo (circa 50 periodi di oscillazione T_1), la dinamica del moto si invertiva, facendo rifluire quasi tutta l'energia nel primo modo, con una riduzione all'incirca del 2% (Fig.2 sinistra). Il sistema manteneva nel tempo tale comportamento «periodico», sicché nessuna termalizzazione statistica veniva raggiunta.

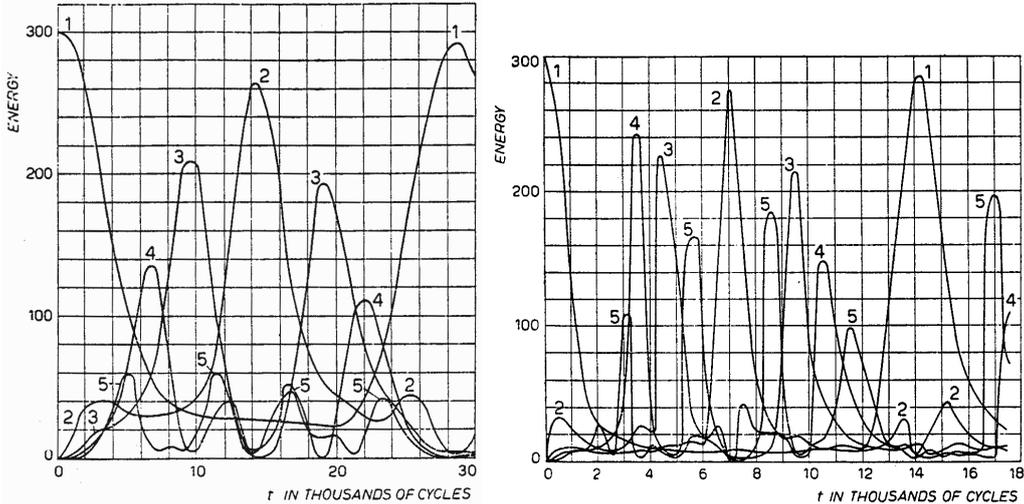


Figura 2: Evoluzione temporale di $E_k(t)$ per ciascuno dei primi cinque modi di oscillazione. Le unità dell'energia sono arbitrarie. $N = 32$. L'energia dei modi più alti non ha mai raggiunto valori superiori alle 20 unità. A sinistra: $\alpha = 0.25$. A destra: $\alpha = 1$.

Ai sorprendenti risultati ottenuti seguì l'ulteriore scoperta dell'esistenza di una relazione di inversa proporzionalità tra il periodo di ricorrenza dell'energia E_k e l'intensità del termine non lineare (Fig.2 destra).

In seguito alla pubblicazione dei risultati ottenuti, nell'ambiente accademico non tutti furono convinti dell'attendibilità delle simulazioni effettuate. Secondo una congettura che godette inizialmente di una certa popolarità, la simulazione di FPU non aveva avuto una durata sufficientemente lunga o forse il tempo necessario al sistema adoperato per raggiungere la termalizzazione era troppo lungo per poter essere osservato numericamente (Rif.[6]). Tuttavia, successive simulazioni effettuate nel 1972 da Mary T. Menzel (che dal 1958 adoperava il suo cognome da sposata (Rif.[1])) e da James L. Tuck (Rif.[7]), svalutarono definitivamente detta supposizione, rivelando un effetto ancor più affascinante: l'esistenza di un «super periodo» di ricorrenza (Fig.5) a scale temporali estremamente grandi, al quale il 100% dell'energia rifuiva nel modo iniziale di oscillazione, rivelando così l'esistenza di una dinamica regolare nel modello di FPU.

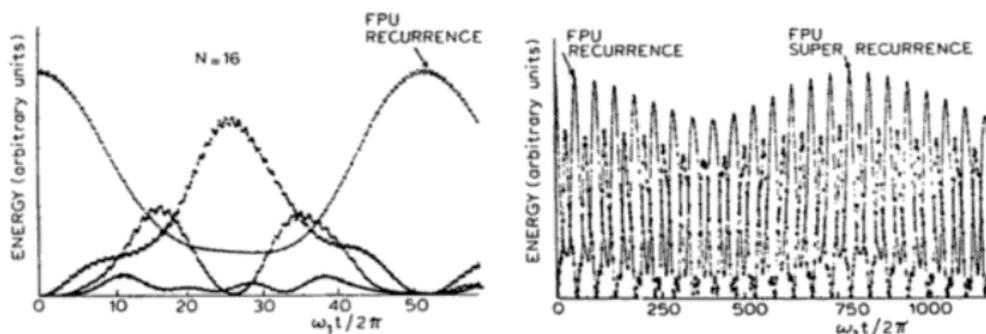


Figura 3: A sinistra: *standard suddivisione energetica tra i primi quattro modi normali di oscillazione in un sistema di FPU con $N = 16$, integrato su un singolo periodo di ricorrenza.* A destra: *estensione dell'intervallo di integrazione ad un numero elevato di ricorrenze.*

Si cercarono allora altre strade che potessero fornire una valida spiegazione del fenomeno osservato. Una di queste, di indubbio interesse, era la possibilità di interpretare il carattere periodico del sistema di FPU attraverso le conclusioni ottenute da Henri Poincaré nel 1890. Egli, infatti, mostrò come certi sistemi soddisfacenti opportune condizioni di conservazione (ad esempio i sistemi ergodici), dopo un tempo «sufficientemente» lungo (tempo di ricorrenza di Poincaré), ritornino in uno stato molto prossimo a quello iniziale (teorema di ricorrenza di Poincaré). Una stima del periodo di ricorrenza di Poincaré per una catena di oscillatori armonici¹ era già stata ricavata nel 1958 in Rif.[8] e ne descriveva una dipendenza esponenziale dal numero di gradi di libertà del sistema, il che era in evidente disaccordo con le osservazioni di FPU. Una meritevole spiegazione del perché non vi sia relazione con la ricorrenza di Poincaré è data in Rif.[9] e si basa sul semplice fatto che quest'ultima è definita per le traiettorie nello spazio delle fasi e non per l'energia di un sistema.

Nonostante i molteplici tentativi effettuati tra la fine degli anni cinquanta e gli inizi degli anni sessanta, ancora nessuna delle strade intraprese era riuscita a spiegare quello che, nell'ambiente accademico, era ormai definito «paradosso di FPU».

3 La soluzione del problema

Con l'arrivo del 1965, la ricerca di una spiegazione del paradosso giunse finalmente al termine, vedendo lo sviluppo di due distinte interpretazioni: da un lato, Boris V. Chirikov e Felix M. Izrailev si concentrarono sui recenti risultati del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser: presentato da Kolmogorov (1954), successivamente sviluppato da Moser (1962) e da Arnol'd (1963); quest'ultimo ne fornì una generalizzazione per sistemi hamiltoniani), riuscendo a mostrare che, se la perturbazione è sufficientemente forte (al punto

¹La stima è ottenuta nel caso di un reticolo armonico in quanto non esiste via, a parte il calcolo computazionale, di determinarla in presenza di accoppiamento lineare. Ciò, tuttavia, non modifica la natura delle osservazioni che verranno.

da determinare la «sovrapposizione» delle risonanze non lineari), la ricorrenza di FPU si rompe e si manifesta una rapida convergenza del sistema verso la termalizzazione (Rif.[10]); dall'altro, Martin D. Kruskal e Norman J. Zabusky studiarono il limite continuo del sistema di FPU, mostrando l'esistenza di un legame tra l'equazione 2 e la Korteweg-de Vries² (KdV) e fornendo nel loro pionieristico lavoro (Rif.[11]), un'interpretazione del problema in termini della dinamica dei *solitoni*.

Nell'interesse di sviluppare quest'ultima linea di pensiero, partiamo dall'equazione 2 e riscriviamola in termini della densità ρ e del modulo di elasticità μ della corda adoperata in apertura del §2. Come noto, tali parametri sono definiti di modo che risulti $m = \rho h$ e $k = \mu/h$; allora, chiamando $c \equiv \sqrt{\mu/\rho}$, la 2 assume la forma

$$\ddot{\eta}_n = c^2 \left(\frac{\eta_{n+1} + \eta_{n-1} - 2\eta_n}{h^2} \right) [1 + \alpha(\eta_{n+1} - \eta_{n-1})]. \quad (6)$$

A questo punto possiamo effettuare il passaggio al continuo. Questa operazione si otterrà ricercando una funzione $u(x, t)$, con $x \in [0, \ell]$, che interpoli spazialmente la forma discretizzata della corda rappresentata dagli spostamenti discreti, ovvero tale per cui

$$u(x_n, t) = u(nh, t) = \eta_n(t), \quad n = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Per inciso, è opportuno precisare che la coordinata di posizione x , introdotta nella 7, non è una coordinata generalizzata, ma ha il ruolo di indice continuo al posto dell'indice discreto n . Evidentemente, seguendo la convenzione adoperata in nota², $\ddot{\eta}_n = u_{tt}(x_n, t)$, ed inoltre $\eta_{n\pm 1} = u(x_n \pm h, t)$, $n = 1, \dots, N$. Sostituendo nella 6, abbiamo

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2} \{1 - \alpha[u(x+h, t) - u(x-h, t)]\}. \quad (8)$$

Supposta $u(x, t)$ liscia, potremo svilupparla in serie di Taylor, cosicchè

$$\frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2} = u_{xx}(x, t) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x, t) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$[u(x+h, t) - u(x-h, t)] = 2hu_x(x, t) + \frac{h^3}{3} u_{xxx}(x, t) + \mathcal{O}(h^5);$$

in questo modo l'equazione 8 diventa

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx} + 2\alpha h u_x u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}(h^3). \quad (9)$$

Ora, procedendo come di consueto, facciamo tendere a zero il passo reticolare (o equivalentemente richiediamo che $N \rightarrow \infty$), così da ricavare l'equazione descrivente la dinamica del reticolo di FPU nel limite continuo. Osserviamo che, per non ricadere nella ben nota equazione delle onde lineare (equazione di d'Alembert) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, è opportuno assumere contemporaneamente che $\alpha \rightarrow \infty$ (processo di rinormalizzazione), di modo che

²Ricordiamo che la KdV è un'equazione alle derivate parziali non lineare e dispersiva del terzo ordine, ricavata nel 1895 dal fisico olandese Diederik Korteweg e dal suo studente Gustave de Vries per descrivere alcuni dei risultati degli esperimenti effettuati da John Scott Russell sulla propagazione delle onde. Nel caso unidimensionale, indicando con $\eta(x, t)$ la funzione descrivente la forma dell'onda e definendo, per semplicità di notazione, con η_x ed η_t la derivata parziale di η rispettivamente rispetto alla posizione ed al tempo, abbiamo che la KdV può essere espressa attraverso l'equazione

$$\eta_t + (1 + \eta)\eta_x + \eta_{xxx} = 0.$$

Dallo studio di tale equazione, KdV scoprirono una soluzione di tipo «onda solitaria», che corrispondeva alla strana onda osservata da Russel presso il canale tra Edimburgo e Glasgow nel 1834, rinominata dallo stesso «grande onda di traslazione». Tale soluzione appare come il risultato di un bilancio tra non linearità e dispersione. Generalmente si usa trasformare la precedente equazione adoperando le trasformazioni di scala $(1 + \eta) \rightarrow \alpha\eta$, $t \rightarrow \beta t$ ed $x \rightarrow \gamma x$, con α, β, γ costanti reali non nulle, sicché

$$\eta_t + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \eta\eta_x + \frac{\beta}{\gamma^3} \eta_{xxx} = 0.$$

Questa è la forma generale della KdV ed una scelta conveniente e spesso adoperata è data da

$$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0.$$

il limite di $2\alpha h$ sia una quantità finita; in altre parole $\lim_{(h \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty)} 2\alpha h = \epsilon$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Quindi, si ricava l'equazione alle derivate parziali

$$u_{tt} = c^2(1 + \epsilon u_x)u_{xx} \quad (10)$$

che sostituisce, nel limite continuo, le N equazioni alle derivate ordinarie 6 e rappresenta una generalizzazione non lineare dell'equazione delle onde. Già Rayleigh, nel secolo scorso, aveva studiato approfonditamente tale equazione, mostrando, mediante alcuni semplici esempi, come le sue soluzioni determinino lo svilupparsi di discontinuità (shocks) a seguito di un intervallo di tempo dell'ordine di $(\epsilon c)^{-1}$, discontinuità che non si manifestano nelle simulazioni di FPU (Rif.[4]). Fu Zabusky a risolvere il problema (Rif.[11]), rendendosi conto della necessità di conservare il termine di ordine h^2 (trascurando gli ordini superiori) e, quindi, di studiare il limite continuo dell'equazione

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} + 2\alpha h u_x u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}, \quad (11)$$

nota come equazione di Zabusky-Kruskal (ZK). È importante mettere in evidenza il seguente fatto: dal momento che $h \neq 0$, la ZK non può essere rigorosamente definita come il limite continuo della FPU (6); piuttosto, è più giusto considerarla come una approssimazione asintotica per il modello reticolare, valida solo per piccoli valori di h .

Per superare questo ostacolo e ricavare dalla ZK un vero limite continuo per la FPU, osserviamo preliminarmente che per $\alpha, h \ll 1$ le soluzioni della ZK si comportano qualitativamente come le soluzioni dell'equazione di d'Alembert $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ed il comportamento tende tanto più a sovrapporsi quanto più α ed h tendono a zero. Inoltre, sappiamo che la soluzione generale dell'equazione delle onde è $u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, in altre parole la somma di due funzioni rappresentanti due onde che si propagano con la stessa velocità c , rispettivamente nella direzione delle x decrescenti (sinistra) e nella direzione delle x crescenti (destra) e che si usa generalmente studiare tale soluzione trattando separatamente ciascuna delle due onde.

Allora, prendendo spunto dal caso lineare, restringiamo la ricerca delle soluzioni della ZK unicamente a funzioni $u(x, t)$ descrittive onde viaggianti in una sola direzione, ad esempio, quella delle x crescenti. Introduciamo allora le trasformazioni di scala $\xi = x - ct$ e $\tau = (\alpha h)ct$, tali che $u(x, t) \rightarrow w(\xi, \tau)$, dalle quali $\partial_{x^k} = \partial_{\xi^k}$, $\partial_t = -c(\partial_\xi - \alpha h \partial_\tau)$ e quindi $\partial_{tt} = c^2(\partial_{\xi\xi} - 2\alpha h \partial_{\xi\tau} + \alpha^2 h^2 \partial_{\tau\tau})$. Nelle nuove coordinate (ξ, τ) , l'operatore d'alambertiano diventa

$$\square = -2\alpha h \partial_{\xi\tau} + (\alpha h)^2 \partial_{\tau\tau}$$

e dunque, dividendo per $-2\alpha h$, la ZK assume la forma

$$w_{\xi\tau} = \frac{\alpha h}{2} w_{\tau\tau} - w_\xi w_{\xi\xi} - \frac{h}{24\alpha} w_{\xi\xi\xi\xi}. \quad (12)$$

A questo punto siamo pronti per effettuare rigorosamente il passaggio al continuo. Ricordando che l'accoppiamento non lineare deve essere sufficientemente debole, assumiamo che h ed α tendano a zero con la stessa velocità, così che il rapporto h/α tenda ad un limite finito e definiamo con $\delta = \lim_{h \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \sqrt{h/(24\alpha)}$. Evidentemente tale scelta comporta che $\alpha h = \mathcal{O}(h^2)$. Trascurando questo termine, l'operazione di passaggio al limite fornisce l'equazione $w_{\xi\tau} + w_\xi w_{\xi\xi} + \delta^2 w_{\xi\xi\xi\xi} = 0$, dalla quale, effettuando la sostituzione $v = w_\xi$, si ottiene finalmente la KdV

$$v_\tau + vv_\xi + \delta^2 v_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (13)$$

Scoperta l'esistenza di tale relazione tra la FPU e la KdV, Zabusky e Kruskal effettuarono alcune simulazioni numeriche presso i Bell Telephone Laboratories (con l'assistenza di Gary Deem, Rif.[6]), studiando il comportamento di alcune soluzioni della KdV per differenti scelte dei parametri. In particolare, decisero di analizzare la 13 nel caso di condizioni al contorno periodiche (ovvero su una circonferenza invece che su di una linea), scegliendo $\delta = 0.022$ e adoperando la condizione iniziale periodica $v(x, 0) = \cos(\pi x)$, $x \in [0, 2]$. I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 4, tratta dalla famosa pubblicazione [11] di ZK del 1965.

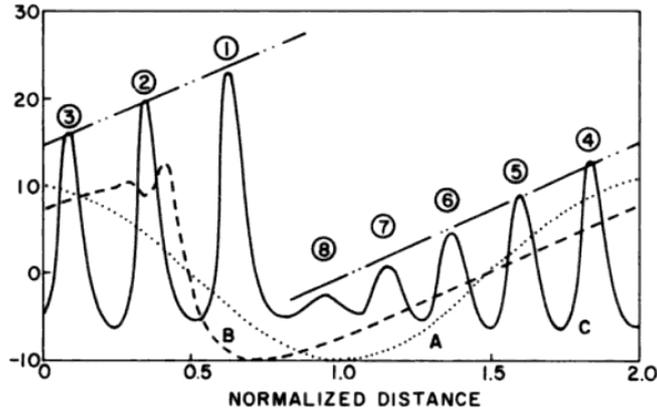


Figura 4: Soluzione della KdV per condizioni al contorno periodiche. Profilo iniziale a $t = 0$ (linea punteggiata); profilo a $t = 1/\pi$ (linea tratteggiata); profilo a $t = 3.6/\pi$ (linea continua).

Dalle simulazioni ottenute, ZK osservarono che inizialmente, partendo dalla forma iniziale cosinusoidale, il termine non lineare della 13 domina su $\delta^2 v_{\xi\xi\xi}$ (essendo δ piccolo) e, come avviene classicamente, l'onda cresce nelle regioni in cui ha una pendenza negativa³. Successivamente, dopo che v è cresciuta sufficientemente, il termine dispersivo diventa importante e bilancia la non linearità, prevenendo così la formazione di discontinuità. A tempi successivi avviene la formazione di un treno di otto onde ben distinte (Fig.4), aventi piccole lunghezze d'onda (dell'ordine di δ) ed ampiezze crescenti linearmente da sinistra verso destra. «Infine», come riportato in [11], «ciascun impulso d'onda solitario o solitone inizia a muoversi uniformemente ad una velocità che è linearmente proporzionale alla sua ampiezza» (onde di ampiezza maggiore avranno velocità maggiori, rincorrendo e superando le onde più lente, aventi ampiezze inferiori), carattere mostrato sperimentalmente da Russell (1844).

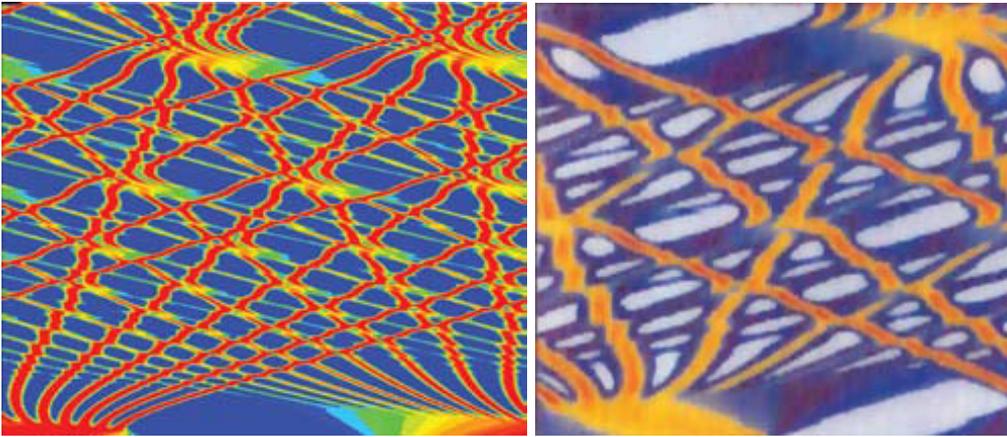


Figura 5: [11] Andamento spazio-temporale per un modello FPU composto da $N = 256$ oscillatori (a sinistra). Un simile sistema genera subito solitoni, che possono propagarsi in entrambe le direzioni, scambiarsi di posto e far tornare indietro il sistema ad una situazione che somiglia alla configurazione iniziale. Il moto dei solitoni può essere osservato seguendo le traiettorie tracciate con colori caldi, che denotano grandi spostamenti di masse. L'asse orizzontale corrisponde alla posizione lungo la serie di molle e masse; l'asse verticale corrisponde invece al tempo, che inizia in basso progredendo verso l'alto. L'emergere dei solitoni non richiede necessariamente che le masse siano discrete: compaiono anche in un analogo continuo (a destra) del modello FPU.

³Assumendo che $u(x, 0)$ abbia pendenza negativa, è possibile dimostrare che l'apice dell'onda si muove più velocemente della parte bassa della stessa. Il risultato è che l'onda si «accartoccia» (steepening) fino all'istante T_B in cui il grafico ha tangente verticale. Per $t > T_B$, $u(x, t)$ diventa polidroma e si dice che l'onda si rompe (breaking). T_B viene definito tempo minimo di rottura. Per la KdV di ZK, $T_B = 1/\pi$.

Il cuore di tali osservazioni è insito, essenzialmente, nella scelta di condizioni al contorno periodiche; infatti, per via di queste ultime, «due o più solitoni possono, eventualmente, sovrapporsi nello spazio, interagendo non linearmente». Ciò condusse alla scoperta del fatto che, subito dopo l'interazione (indipendentemente dall'intensità), i solitoni riappaiono senza alcun cambiamento di forma, ma solo con una piccola variazione di fase⁴. Quest'ultima determina l'assenza di un perfetto ritorno della configurazione allo stato iniziale, manifestando, tuttavia, quella che possiamo intendere come una ricorrenza, proprio come nel problema di FPU. Dunque, la caratteristica proprietà conservativa dei solitoni fornisce una spiegazione della ricorrenza osservata da FPU.

Riferimenti bibliografici

- [1] T. Dauxois *Fermi, Pasta, Ulam, and a mysterious lady*, Physics Today, 55-57 (2008).
- [2] S. Ulam, *Adventures of a Mathematician*, University of California Press, 1991.
- [3] E. Fermi, *Beweis dass ein mechanisches Normalsystem im allgemeinen quasi-ergodisch ist*, Phys. Zeit. 24, 261-265 (1923).
- [4] E. Fermi, J. Pasta e S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems, I*, Los Alamos Report LA-1940, (1955), pubblicato successivamente in *Collected Papers of Enrico Fermi*, ed. E. Segre, Vol. II (University of Chicago Press, 1965), 978-989.
- [5] N. Metropolis, *Daedalus* 121, 119-130 (1992).
- [6] Porter M. A., Zabusky N. J., Hu B. e Campbell D. K., *Fermi, Pasta, Ulam and the birth of experimental mathematics*, American Scientist 97, 216 (2009).
- [7] J. L. Tuck e M. T. Menzel, *The superperiod of the nonlinear weighted string (FPU) problem*, Advances in mathematics 9, 399-407 (1972).
- [8] P. C. Hemmer, L.C. Maximon ed H. Wergeland, *Recurrence time of a dynamical system*, Phys. Rev. 111, 689 (1958).
- [9] E. A. Jackson, *Nonlinearity and irreversibility in lattice dynamics*, Rocky Mount. J. Math. 8, 12-197 (1978).
- [10] F. M. Izrailev e B. V. Chirikov, *Statistical Properties of a Nonlinear String*, (Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, USSR, 1965).
- [11] N. J. Zabusky ed M. D. Kruskal, *Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15, 240-243 (1965).
- [12] N. J. Zabusky, Z. Sun e G. Peng, *Measures of chaos and equipartition in integrable and nonintegrable lattices*, Chaos 16, (2006).
- [13] R. S. Palais, *The Symmetries of Solitons*, Bull. Amer. Math. Soc. 34, 339-403 (1997).
- [14] T. Dauxois, M. Peyrard e S. Ruffo, *The Fermi-Pasta-Ulam «numerical experiment»: history and pedagogical perspectives*, Eur. Jour. of Phys. 26, S3-S11 (2005).
- [15] G. P. Berman ed F. M. Izrailev, *The Fermi-Pasta-Ulam Problem: 50 years of progress*, Chaos 15, (2005).
- [16] P. G. Drazin e R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*, (Cambridge University Press, 1989).
- [17] R. K. Dodd, J. Eilbeck, J. Gibbon ed H. Morris, *Solitons and Nonlinear Waves Equations* (Academic, London, 1982).

⁴Questa interessante proprietà spinse ZK a coniare il nome «solitoni», al fine di enfatizzare il carattere particellare (protoni, fotoni,...) di queste particolari onde.