

# Un'introduzione alla teoria ergodica dei numeri

Ivan Bonamassa

Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce, 73100 Lecce, Italy.

Relazione per il corso di Fisica dei Sistemi Dinamici – Anno Accademico 2010/2011

## Indice

<b>1</b>	<b>Cenni di Teoria Ergodica dei Sistemi Dinamici</b>	<b>2</b>
1.1	Trasformazioni che conservano la misura e proprietà di ergodicità . . . . .	2
1.2	Teorema ergodico di Birkhoff ed applicazione al problema di Gelfand . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Alcune applicazioni alla Teoria dei Numeri</b>	<b>5</b>
2.1	Distribuzione uniforme modulo uno e teorema di equidistribuzione . . . . .	5
2.2	Serie di Vinogradov e distribuzione dei numeri primi . . . . .	6
2.3	Numeri normali e teorema di Borel . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Proprietà statistiche ed ergodiche della <math>\zeta</math> di Riemann</b>	<b>10</b>
3.1	Proprietà statistiche delle ordinate degli zeri non banali . . . . .	12
3.2	Proprietà ergodiche ed ipotesi di Riemann . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>14</b>
<b>A</b>	<b>Proprietà di ergodicità e di mixing della mappa di Ulam</b>	<b>15</b>
<b>B</b>	<b>L'operatore di Perron–Frobenius</b>	<b>16</b>
	Bibliografia <sup>16</sup>	

## Sommario

Recentemente, numerose pubblicazioni hanno visto coinvolte tre diverse branche della Matematica: la Teoria dei Numeri, la Teoria Ergodica e la Teoria dei Sistemi Dinamici. L'esistenza di profonde connessioni tra le ultime due era nota già verso la fine del XIX secolo, mentre la possibilità di collegare la Teoria Ergodica e la Teoria dei Numeri iniziò a manifestarsi verso la seconda metà del XX secolo. Oggi, vari concetti di Teoria Ergodica dei Sistemi Dinamici trovano applicazione in Teoria dei Numeri e stanno conducendo alla nascita di una nuova branca della Matematica, ribattezzata Teoria Ergodica dei Numeri. Lo scopo del presente lavoro è quello di fornire una breve descrizione di alcuni dei principali risultati ottenuti in questo nuovo settore.

Gli argomenti trattati si distribuiscono su tre sezioni più due appendici. Nella prima sezione verranno introdotti alcuni concetti chiave di Teoria Ergodica, in particolare, il teorema ergodico di Birkhoff ed una sua applicazione al problema di Gelfand. Nella seconda sezione, vedremo un'interpretazione ergodica del teorema di equidistribuzione e del teorema di Borel per i numeri normali. Infine, nella terza sezione, dopo una breve descrizione del legame esistente tra la funzione  $\zeta$  di Riemann e la distribuzione dei numeri primi, verrà analizzata la proprietà di uniforme distribuzione delle ordinate degli zeri non banali della  $\zeta$ , concludendo con un'interpretazione ergodica dell'ipotesi di Riemann. Nell'appendice A sono descritte le proprietà ergodiche e mixing della mappa di Ulam e nell'appendice B è contenuta una breve introduzione all'operatore di Perron–Frobenius.

# 1 Cenni di Teoria Ergodica dei Sistemi Dinamici

## 1.1 Trasformazioni che conservano la misura e proprietà di ergodicità

Sia  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  uno spazio di misura, con  $X$  un insieme diverso dall'insieme vuoto,  $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(X)$  (dove  $\mathfrak{B}(X)$  indica l'insieme delle parti di  $X$ ) una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$  e  $\mu$  una misura definita sullo spazio misurabile  $(X, \mathcal{F})$ . Una trasformazione  $T : (X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{F}, \mu)$  (più brevemente  $T : X \rightarrow X$ ) è detta *misurabile* se e solo se  $\forall A \in \mathcal{F}, T^{-1}A := \{x \in X \mid T(x) \in A\} \in \mathcal{F}$ , dove  $T^{-1}A$  indica la preimmagine mediante  $T$  dell'insieme misurabile  $A$ ; in particolare,  $T : X \rightarrow X$  è invertibile se è misurabile e se  $\forall A \in \mathcal{F}, TA \in \mathcal{F}$ . Si dirà inoltre che  $T$  **conserva la misura**  $\mu$  (equivalentemente, che la misura  $\mu$  è  $T$ -invariante) se e solo se  $T$  è misurabile e se  $\forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ ; in tal caso, la quaterna  $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$  prende il nome di *sistema dinamico*. In generale, risulta difficile determinare una misura invariante rispetto ad una data trasformazione e, viceversa, una trasformazione che conserva una data misura. Alcuni teoremi son d'aiuto a tal proposito; si ricorda, in particolare, il seguente

**TEOREMA 1.1 (MISURA INVARIANTE)** - *Sia  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  uno spazio di misura; la trasformazione  $T : X \rightarrow X$  conserva la misura  $\mu$  se e solo se  $\forall f \in \mathcal{L}_\mu^1(X) \equiv \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ misurabile e } \int_X |f| d\mu < \infty\}$  e cioè se per ogni funzione misurabile e  $\mu$ -sommabile secondo Lebesgue<sup>1</sup>, risulta che*

$$\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu. \quad (1)$$

La dimostrazione risulta pressoché immediata una volta data la definizione di convergenza dominata nel senso di Lebesgue (si veda a.e. [EW2010]) il che, però, non rientra nello scopo di questa trattazione. Consideriamo, invece, un esempio di applicazione del teorema 1.1. Sia  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$  uno spazio di misura ( $\mathcal{B}$  una  $\sigma$ -algebra di Borel di  $\mathbb{R}$ ) e  $T_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la trasformazione definita come  $T_N(0) = 0$  se  $x = 0$  e

$$T_N(x) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \quad \text{se } x \neq 0. \quad (2)$$

$T_N$  è misurabile in quanto  $T_N^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}, \beta - \sqrt{\beta^2 + 1}) \cup (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}, \beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$ ,  $\forall (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ , ma non conserva la misura di Lebesgue  $\lambda((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$ . Tuttavia, ponendo  $\tau \equiv T_N(x)$ , si trova che per ogni  $f$  integrabile secondo Lebesgue,  $\int_{\mathbb{R}} f(\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \int_{\mathbb{R}} f(T(x)) \frac{dx}{1+x^2}$  e quindi applicando il teorema 1.1 si ottiene che  $T_N$  conserva la misura di probabilità

$$\mathcal{P}_N((\alpha, \beta)) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{(\alpha, \beta)} \frac{d\tau}{1+\tau^2}. \quad (3)$$

Il fattore  $\frac{1}{\pi}$ , dovuto alla normalizzazione, identifica  $\rho_N(\tau) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\tau^2}$  con la funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria  $\tau$  avente distribuzione di Cauchy. Ciononostante, la trasformazione  $T_N$  prende il nome di **mapa di Newton** ed è così denominata in quanto può essere ottenuta dall'omonimo algoritmo per la ricerca degli zeri  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  ponendo  $f(x) = x^2 + 1$ . Come vedremo, essa svolge un ruolo centrale nello studio delle proprietà ergodiche della funzione  $\zeta$  di Riemann.

Sia ora  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  uno spazio di misura *finita*, ovvero tale per cui  $\mu(X) < \infty$ ; poiché è sempre possibile costruire una misura di probabilità a partire da una misura finita ( $\forall A \in \mathcal{F}, \mathcal{P}(A) \equiv \mu(A)/\mu(X)$ ), considereremo d'ora in avanti per semplicità solo spazi di probabilità, tenendo presente che tutti i risultati possono essere estesi al caso di misure finite. Sia quindi  $T : X \rightarrow X$  una trasformazione che conserva la misura di probabilità  $\mu$ : diremo che  $T$  è **ergodica** rispetto a  $\mu$  se e solo se  $\forall A \in \mathcal{F}$  tale che  $T^{-1}A = A$  (ovvero per ogni insieme misurabile  $T$ -invariante<sup>2</sup>) è  $\mu(A) = 0$  oppure  $\mu(A) = 1$ . Si noti che, secondo la definizione appena data, la *mapa di Newton* è **ergodica** rispetto alla misura di probabilità

<sup>1</sup>Al fine di non appesantire i contenuti, si sono dati per noti alcuni importanti concetti relativi alla teoria della misura secondo Lebesgue ed, in particolare, alla teoria dell'integrazione rispetto ad una misura di Lebesgue. Qui, è necessario non confondere  $\mathcal{L}^p$  con lo spazio usuale  $L^p := \mathcal{L}^p / \sim$ , ottenuto quotizzando rispetto alle classi di equivalenza  $f \sim g$ .

<sup>2</sup>Più in generale, è sufficiente richiedere che  $A$  sia quasi ovunque  $T$ -invariante.

(3), in quanto gli unici insiemi  $T_{\mathcal{N}}$ -invarianti sono  $\emptyset$  ed  $\mathbb{R}$ .

Esistono diverse definizioni di ergodicit , alcune delle quali sono particolarmente utili all'atto pratico. In particolare, si pu  dimostrare [EW2010] quanto segue

**TEOREMA 1.2 (ERGODICIT )** - Sia  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  uno spazio di probabilit  e  $T : X \rightarrow X$  una trasformazione che conserva la misura. Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

- (i)  $T$    ergodica; (ii) se  $f$    una funzione misurabile quasi ovunque  $T$ -invariante, allora   quasi ovunque costante; (iii) se  $f \in \mathcal{L}^2_{\mu}(X)$  ed   quasi ovunque  $T$ -invariante, allora   quasi ovunque costante.

Si noti che l'implicazione (ii)  $\Rightarrow$  (iii) segue naturalmente. Come applicazione del teorema 1.2, consideriamo due particolari trasformazioni, le quali svolgeranno un ruolo cruciale nel seguito. Va osservato che entrambe corrispondono a delle rotazioni finite sulla circonferenza di raggio unitario  $\mathbb{T}^1$ . D'altronde, la parametrizzazione  $[0, 1) \ni x \mapsto e^{2\pi i x} \in \mathbb{T}^1$  stabilisce una corrispondenza tra i due insiemi che pu  essere formalmente dimostrata, portando a concludere che  $\mathbb{T}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)/\sim$ , dove la classe di equivalenza rispetto alla quale l'intervallo unitario   quozientato corrisponde alla modulazione rispetto all'unit .

**Rotazione circolare.** Sia  $([0, 1), \mathcal{B}, \lambda)$  uno spazio di misura, dove  $\mathcal{B}$    una  $\sigma$ -algebra di Borel di  $[0, 1)$  e  $\lambda$    la misura di Lebesgue. La *mappa di rotazione circolare*  $R_{\theta} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$    definita come

$$R_{\theta} : x \mapsto x + \theta \pmod{1}, \quad \theta \in (0, 1). \quad (4)$$

Per le propriet  della parte frazionaria e della parte intera (inferiore) dei reali, la (4) si riscrive come  $R_{\theta}(x) = \{x + \theta\} = x + \theta - [x + \theta]$ .  $R_{\theta}$    misurabile e conserva  $\lambda$ : difatti  $\forall (\alpha, \beta) \subset [0, 1)$  si trova che

$$R_{\theta}^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\alpha - \theta, \beta - \theta) & \text{se } \theta \leq \alpha, \\ (0, \beta - \theta) \cup (\alpha - \theta + 1, 1) & \text{se } \alpha < \theta \leq \beta, \\ (\alpha - \theta + 1, \beta - \theta + 1) & \text{se } \beta \leq \theta, \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda(R_{\theta}^{-1}(\alpha, \beta)) &= \beta - \alpha = \lambda(\alpha, \beta), \\ \forall \theta &\in (0, 1). \end{aligned}$$

Si pu  ora dimostrare che  $R_{\theta}$    ergodica rispetto a  $\lambda$  se e solo se  $\theta$    irrazionale.

*Dimostrazione.* L'implicazione diretta si prova per assurdo: sia  $R_{\theta}$  ergodica e  $\mathbb{Q} \ni \theta = p/q$ . La funzione  $e(qx) \equiv e^{2\pi i qx} \in \mathcal{L}^2_{\lambda}([0, 1))$    quasi ovunque  $R_{\theta}$ -invariante in quanto  $(e \circ R_{\theta})(qx) = e(q\{x + \theta\}) = e(qx)$ , essendo  $\theta$  razionale. Allora, per il punto (iii) del teorema 1.2,  $e(qx)$  deve essere quasi ovunque costante su  $[0, 1)$ , il che   assurdo  $\frac{1}{2}$ . Per l'implicazione inversa, sia  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ed  $f \in \mathcal{L}^2_{\lambda}([0, 1))$ : secondo il *teorema di Carleson*  $f$    quasi ovunque sviluppabile in serie di Fourier su  $[0, 1)$  ovvero

$$f(x) \stackrel{q.o. \text{ in } [0, 1)}{\sim} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e(n x), \quad c_n = \int_{[0, 1)} f(x) e(n x) d\lambda(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Supponiamo quindi che  $f$  sia quasi ovunque  $R_{\theta}$ -invariante, ovvero

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e(n\theta) e(n x) = f(R_{\theta}(x)) = f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e(n x) \Leftrightarrow c_n [1 - e(n\theta)] = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

avendo sfruttato la propriet  di *unicit  dei coefficienti di Fourier*. Poich   $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $c_n = 0 \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e quindi  $f(x) = c_0$  quasi ovunque in  $[0, 1)$ , il che completa la dimostrazione.  $\square$

**Raddoppiamento.** Sia  $([0, 1), \mathcal{B}, \lambda)$  lo spazio di misura del problema precedente. La *mappa di raddoppiamento* (nota anche come *mappa cerchio* o *di-adica*)  $T_2 : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$    definita come

$$T_2 : x \mapsto 2x \pmod{1} = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases} \quad (5)$$

$T_2$    una mappa misurabile e conserva la misura di Lebesgue, in quanto  $\forall (\alpha, \beta) \subset [0, 1)$ ,  $T_2^{-1}(\alpha, \beta) = (\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}) \cup (\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2})$ . Inoltre, la *mappa di raddoppiamento*   ergodica rispetto alla misura di Lebesgue.

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{L}_\lambda^2([0, 1])$  quasi ovunque  $T_2$ -invariante. Per il teorema di Carleson e per via dell'unicità dei coefficienti di Fourier, risulta che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e(2nx) = f(T_2(x)) = f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e(nx) \quad \Leftrightarrow \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in (2n+1)\mathbb{Z}, \\ c_{2n} & \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $|c_n| \neq 0$ ; allora anche  $|c_{2n}| = |c_n| \neq 0$  e quindi la catena di uguaglianze  $|c_n| = |c_{2n}| = \dots = |c_{2^k n}| = \dots$  consiste di infiniti termini non nulli. Poiché  $f$  è sviluppabile in serie di Fourier, vale l'identità di Parseval rispetto alla semi-norma in  $\mathcal{L}_\lambda^2([0, 1])$ , ovvero

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\lambda^2([0, 1])}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty,$$

il che è assurdo<sup>3</sup>  $\nmid$ . Pertanto, lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$  consiste del solo coefficiente corrispondente ad  $n = 0$  e quindi  $f(x) = c_0$  quasi ovunque su  $[0, 1]$  il che completa la dimostrazione.  $\square$

In modo perfettamente analogo a quello appena mostrato, si dimostra che per  $b \in \mathbb{N}$  la **mappa  $b$ -adica**  $T_b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita come  $T_b(x) = bx \bmod 1$  è misurabile, conserva la misura di Lebesgue ed è ergodica rispetto ad essa. Nel seguito diventerà chiara l'importanza di questi risultati<sup>4</sup>.

## 1.2 Teorema ergodico di Birkhoff ed applicazione al problema di Gelfand

Il teorema di Birkhoff rappresenta una delle pietre miliari della Teoria Ergodica ed è alla base della maggior parte delle recenti applicazioni alla Teoria dei Numeri. Ne ricordiamo l'enunciato.

**TEOREMA 1.3 (BIRKHOFF)** - *Sia  $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$  un sistema dinamico ergodico. Allora  $\forall f \in \mathcal{L}_\mu^1$  si ha che*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k \stackrel{q.o. \text{ in } X}{=} \int_X f \, d\mu. \quad (6)$$

Nel seguito verranno analizzate alcune delle principali applicazioni del teorema di Birkhoff alla Teoria dei Numeri. Per cominciare, si consideri il seguente problema, noto come **problema di Gelfand**: data la successione numerica  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , *determinare la probabilità che la prima cifra dell' $n$ -esimo termine della successione sia  $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$* . Evidentemente, la prima cifra di  $2^n$  è eguale ad un numero  $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$  se e solo se  $\exists m \in \mathbb{N}_0$  tale che  $k10^m \leq 2^n < (k+1)10^m$  o equivalentemente se

$$m + \log_{10} k \leq n \log_{10} 2 < m + \log_{10}(k+1) \quad \Leftrightarrow \quad \{n \log_{10} 2\} \in \mathcal{I}_k \equiv [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)),$$

essendo  $[n \log_{10} 2] = m$ . Posto  $\alpha \equiv \log_{10} 2$ , si trova che la successione delle parti frazionarie  $(\{n\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$  non è altro che l'orbita in avanti  $\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(0)$  del punto  $x = 0$  mediante la rotazione circolare  $R_\alpha$ . In definitiva, interpretando la probabilità come il limite di una frequenza relativa, si trova che

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\exists m \in \mathbb{N}_0 : 2^n \in [k10^m, (k+1)10^m)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{0 \leq n < N : \{n\alpha\} \in \mathcal{I}_k\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{0 \leq n < N : R_\alpha^n(0) \in \mathcal{I}_k\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{\mathcal{I}_k}(R_\alpha^n(0)), \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>3</sup>Altrettanto raffinatamente, l'assurdo può essere costruito andando a considerare il *lemma di Riemann-Lebesgue*, grazie al quale  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$   $\nmid$ . Si noti che il lemma è qui applicabile dal momento che  $\mathcal{L}_\lambda^2([0, 1]) \subset \mathcal{L}_\lambda^1([0, 1])$ .

<sup>4</sup>Si noti che l'ergodicità di  $T_2$  rispetto alla misura di Lebesgue, implica, in particolare, l'*ergodicità della mappa logistica*  $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f_4(x) = 4x(1-x)$  rispetto alla misura invariante  $\mu_{f_4}(A) \equiv \frac{1}{\pi} \int_A [x(1-x)]^{-1/2} dx$ , dove  $A$  è un insieme misurabile secondo Lebesgue.  $T_2$  ed  $f_4$  sono infatti *topologicamente semi-coniugate* (vedi Appendice A).

dove  $\chi_{\mathcal{I}_k} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  è la funzione indicatrice dell'intervallo  $\mathcal{I}_k$  e vale uno se  $x \in \mathcal{I}_k$  e zero altrimenti<sup>5</sup>. Poiché  $\log_{10} 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , la mappa di rotazione circolare  $R_\alpha$  è ergodica rispetto alla misura di Lebesgue ed è quindi possibile applicare alla (7) il teorema di Birkhoff, grazie al quale si ha che

$$\mathcal{P}(\exists m \in \mathbb{N} : 2^n \in [k10^m, (k+1)10^m]) = \int_{[0,1)} \chi_{\mathcal{I}_k} d\lambda = \lambda(\mathcal{I}_k) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (8)$$

quasi ovunque in  $[0, 1)$ . La distribuzione trovata è la ben nota **legge di Newcomb–Benford** o *legge della prima cifra*, scoperta nel lontano 1881 da *Simon Newcomb* in modo alquanto accidentale<sup>6</sup> e in maniera indipendente nel 1938 da *Frank Benford*. Alquanto sorprendentemente, la legge di Newcomb–Benford trova applicazione in molte discipline ed in particolare in Teoria della Complessità.

## 2 Alcune applicazioni alla Teoria dei Numeri

### 2.1 Distribuzione uniforme modulo uno e teorema di equidistribuzione

In Teoria dei Numeri, alcuni importanti teoremi appartenenti alla branca della *Teoria delle Approssimazioni Diofantine* caratterizzano le proprietà di densità di certi insiemi numerici rispetto ai numeri reali. Il *teorema di approssimazione di Dirichlet*, ad esempio, mostra che l'insieme dei numeri razionali è denso in  $\mathbb{R}$  e che i numeri irrazionali ammettono infinite approssimazioni razionali; formalmente:

$$\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{m.c.d.}(p, q) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (9)$$

Il *teorema di Kronecker*, invece, generalizza il precedente risultato affermando che se  $n \in \mathbb{N}$  e  $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ , la successione delle parti frazionarie  $(\{n\xi\})_{n \in \mathbb{N}}$  è densa sull'intervallo unitario. Lo studio quantitativo di quest'ultima proprietà vien fatto introducendo il concetto di distribuzione uniforme modulo 1. Una successione di numeri reali  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si dice **uniformemente distribuita modulo 1** se la successione delle sue parti frazionarie è equidistribuita sull'intervallo unitario, ovvero se  $\forall \alpha, \beta$  con  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ ,

$$\mathcal{P}(\{x_n\} \in [\alpha, \beta)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{1 \leq n \leq N : \{x_n\} \in [\alpha, \beta)\} = \beta - \alpha. \quad (10)$$

Un notevole risultato in questa teoria è il **criterio di Weyl**, secondo il quale la successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è uniformemente distribuita mod 1 se e solo se una delle condizioni equivalenti di seguito è soddisfatta:

$$(i) \quad \forall f \in \mathcal{R}([0, 1)), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x) dx; \quad (11)$$

$$(ii) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e(mx_n) = 0. \quad (12)$$

Si noti che in (i),  $\mathcal{R}([0, 1))$  indica lo spazio delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $[0, 1)$  ed in (ii) si è adoperata per semplicità la notazione  $e^{2\pi i x_n} \equiv e(x_n)$ . Dai criteri di Weyl discende il seguente

**TEOREMA 1.4 (EQUIDISTRIBUZIONE)** -  $(n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$  è uniformemente distribuita modulo 1  $\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Dimostrazione.* La doppia implicazione è immediata. Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uniformemente distribuita modulo 1 e per assurdo  $\theta = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ ; allora la relazione (12) è soddisfatta  $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e quindi anche per  $m = q$ , nel qual caso  $e(mn\theta) = 1$  da cui l'assurdo  $\frac{1}{N}$ . Viceversa, sia  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : allora  $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $|e(m\theta)| \neq 1$  e quindi  $|e(m\theta)| \in [0, 1)$ ; la formula per le somme geometriche completa la dimostrazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} [e(m\theta)]^n = e(m\theta) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1 - e(mN\theta)}{1 - e(m\theta)} = 0. \quad \square$$

<sup>5</sup>Va osservato che  $\chi_{\mathcal{I}_k}$  è sommabile nel senso di Lebesgue sull'intervallo  $[0, 1)$ .

<sup>6</sup>Si narra, infatti, che lo scienziato scoprì tale distribuzione osservando l'usura delle pagine dei libri contenenti le tavole logaritmiche: le pagine in cui i valori dei logaritmi iniziavano per 1 erano molto più usurate delle altre.

Applicando il teorema 1.4 alla successione  $(n \log_{10} 2)_{n \in \mathbb{N}}$  associata al problema di Gelfand, si ritrova nuovamente la legge di Newcomb–Benford, precedentemente dedotta adoperando la teoria ergodica. Ciò non è un caso: il teorema 1.4, infatti, è una conseguenza diretta del teorema ergodico di Birkhoff applicato alla mappa di rotazione circolare<sup>7</sup>  $R_\theta(0)$ . Ciò esprime un primo, evidente legame tra le proprietà dinamiche di una mappa e le proprietà numeriche della successione ottenuta iterando la stessa in corrispondenza di un'assegnata condizione iniziale.

## 2.2 Serie di Vinogradov e distribuzione dei numeri primi

Straordinariamente, le proprietà della *serie di Weyl* (la serie di esponenziali (13)) permettono di dedurre alcune informazioni sulla distribuzione dei numeri primi. Dal criterio di Weyl segue che la convergenza delle somme esponenziali  $\sum_{n \leq N} e(mx_n)$  riflette la natura della distribuzione di  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  modulo 1; non solo, è anche possibile dedurre informazioni sulla natura casuale degli elementi della successione. Si dimostra, infatti, che se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di variabili casuali linearmente indipendenti distribuite uniformemente modulo 1 vale, quasi ovunque, la *legge del logaritmo iterato* [Bil986]

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{n \leq N} e(mx_n)|}{\sqrt{2N \log(\log N)}} = 1, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Questo fatto però non esaurisce le possibili ragioni del perché una successione sia distribuita uniformemente modulo 1: la successione  $(n\xi)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ad esempio, è uniformemente distribuita modulo 1 ed è una sequenza molto regolare dal punto di vista deterministico. L'unico modo per chiarire la natura della successione in esame è quello di ottenere una stima esplicita per la somma di Weyl.

Ciò suggerisce la possibilità di ottenere informazioni sulla distribuzione dei numeri primi attraverso lo studio della convergenza della somma di Weyl  $S_N(\xi)$  estesa all'insieme dei numeri primi:

$$S_N(\xi) := \sum_{n \leq N} e(\xi p_n), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \quad (14)$$

La serie ad essa associata prende il nome di *serie di Vinogradov*. L'idea è quella di applicare il criterio di Weyl alla relazione (14) e cioè dimostrare che  $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $S_N(m\xi) = o(N)$ ; una stima esplicita di  $S_N(m\xi)$  permetterebbe allora di capire se dietro alla successione  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  insiste una regolarità deterministica oppure un'irregolarità stocastica. Tale stima è contenuta nella dimostrazione di Vinogradov (1937) della **congettura debole di Goldbach**, secondo la quale *ogni intero pari sufficientemente grande può essere scritto come somma di tre primi*<sup>8</sup>. Grazie alla sua stima, Vinogradov fu inoltre capace di dimostrare che se  $p/q$  è un'approssimazione razionale<sup>9</sup> di  $\xi$  tale che  $\text{m.c.d.}(p, q) = 1$  e  $|\xi - p/q| \leq 1/(qQ_N)$ , dove  $q \leq Q_N \equiv N/(\log N)^A$  ed  $A$  è una costante arbitraria, allora [TeF000]

$$S_N(\xi) \ll \begin{cases} N/\phi(q) & \text{se } q \leq (\log N)^A, \\ N/\phi(q) + N/(\log N)^{A/2-4} & \text{se } q > (\log N)^A. \end{cases} \quad (15)$$

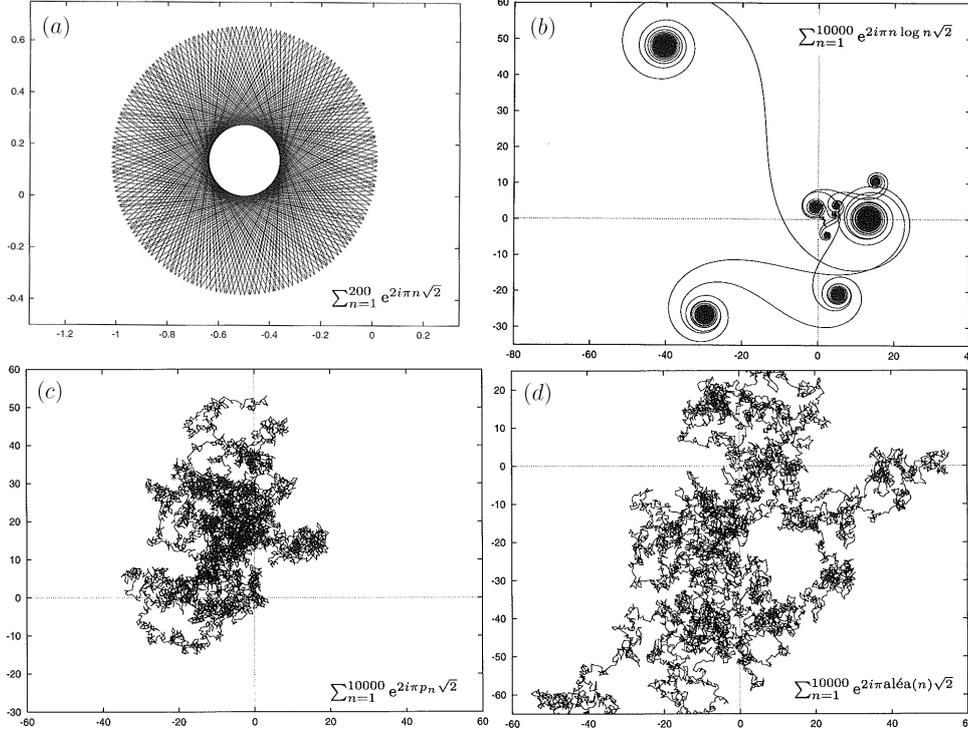
dove  $\phi(n)$  è la *funzione totiente di Eulero*. Grazie alla (15) si può concludere che  $(\xi p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è *uniformemente distribuita modulo 1* ( $\xi$  è irrazionale, dunque  $\phi(q) \rightarrow \infty$  per  $N \rightarrow \infty$ ), ma non si può trarre alcuna informazione utile a capire la natura della distribuzione dei numeri primi: non è nota, infatti, una formula esplicita per il limite inferiore di  $|S_N(\xi)|$ . Si congettura che essa sia proporzionale a  $\sqrt{N}$ , il che sarebbe la prova di un comportamento casuale. A sostegno di tale conclusione si può dare un'interpretazione grafica: si costruisce la poligonale  $\mathcal{L}(x)$  associata alla successione  $x \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i cui vertici corrispondono ai punti  $z_N \equiv \sum_{n \leq N} e(x_n)$  ( $N \geq 0$ ) del piano complesso. Per il criterio di

<sup>7</sup>La dimostrazione sfrutta lo stesso ragionamento adoperato nella risoluzione del problema di Gelfand: partendo dalla definizione (10), si identifica l'  $n$ -esima parte frazionaria della successione come l'  $n$ -esima iterata della mappa  $R_\theta$ ; per  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $R_\theta$  è ergodica e quindi dal teorema di Birkhoff segue l'assunto del teorema 1.4.

<sup>8</sup>Il lavoro di Vinogradov resta il più importante passo ottenuto verso la dimostrazione della *congettura di Goldbach*.

<sup>9</sup>La cui esistenza è garantita dal teorema di Dirichlet.

Weyl, se  $x$  è uniformemente distribuita modulo 1,  $z_N = o(N)$  e quindi la curva  $\mathfrak{L}(x)$  non si discosta molto dall'origine. Dal tipo di andamento di  $\mathfrak{L}(x)$  è possibile comprendere il carattere della distribuzione.



In figura sono riportati alcuni esempi [TeF000]: in (a) :  $(\sqrt{2}n)_n$  ed in (b) :  $(\sqrt{2}n \log n)_n$  le curve sono ben strutturate, segno della natura deterministica della distribuzione<sup>10</sup>; in (c) :  $(\sqrt{2}p_n)_n$ , invece, il carattere della poligonale è tipicamente casuale (browniana all'apparenza); per confronto, in (d) :  $(\text{Lévy}(n)\sqrt{2})_n$  è riportata una successione distribuita casualmente con distribuzione di Lévy.

### 2.3 Numeri normali e teorema di Borel

Un altro punto di contatto con la Teoria dei Numeri è contenuto nello studio della proprietà di normalità. Ogni  $x \in \mathbb{R}$  ammette sempre una rappresentazione in base  $b \in \mathbb{N}$  (*rappresentazione  $b$ -adica*) della forma

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{a_n}{b^n}, \quad a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}. \quad (16)$$

Tale rappresentazione è unica  $\forall x \in \mathbb{R}$  a meno dell'insieme di misura nulla corrispondente ai numeri razionali, per i quali la (16) è eventualmente periodica<sup>11</sup>. Diremo allora che un numero  $x \in \mathbb{R}$  è **normale in base  $b$**  se ogni combinazione di  $k \in \mathbb{N}$  cifre  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$  con  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  appare nell'espansione  $b$ -adica di  $x = a_0.a_1 a_2 \dots a_n \dots$  con la stessa frequenza, ovvero se  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}((a_n \dots a_{n+k-1}) = (\alpha_1 \dots \alpha_k)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{n \leq N : a_n = \alpha_1, \dots, a_{n+k-1} = \alpha_k\} = \frac{1}{b^k}. \quad (17)$$

<sup>10</sup>Si dimostra che la successione  $(\xi n \log n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , è uniformemente distribuita modulo 1. Il carattere a spirale di  $\mathfrak{L}(n \mapsto \xi n \log n)$  evidente in figura è dovuto alla lenta crescita del  $\log n$ : localmente la curva si comporta come se fosse associata alla successione  $(n\xi_N)_n$ , dove  $\xi_N \approx \xi \log N \pmod{1}$ , per  $n \sim N$ . La curva appare allora come un succedersi di piccole spirali collegate tra loro da linee quasi rette, corrispondenti ai valori di  $N$  per cui  $\xi_N \approx 0 \pmod{1}$ .

<sup>11</sup>Si pensi, ad esempio, alla formula di somma per la serie geometrica, dalla quale si dimostra essere  $0.\overline{9} = 1$ , il che costituisce un controesempio all'unicità della rappresentazione  $b$ -adica per gli elementi di  $\mathbb{Q}$ .

Si noti che per la proprietà di normalità è sufficiente considerare la parte frazionaria di  $x$ ; possiamo quindi restringere il nostro interesse a numeri  $x \in [0, 1)$  senza perdere in generalità.

Si potrebbe pensare che l'insieme dei numeri normali sia poco popolato ed invece vale il seguente

**TEOREMA 1.5 (BOREL)** - *Quasi ogni numero reale è normale in ogni base  $b \in \mathbb{N}$ .*

Nella dimostrazione originaria, Borel adoperava un potente strumento della Teoria delle Probabilità, noto come lemma di Borel–Cantelli. Qui, invece, si vuol dare un'interpretazione dinamica del teorema. A tal proposito, si consideri la mappa di raddoppiamento  $T_2 : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  riscritta nella forma

$$T_2(x) = 2x \pmod{1} = 2x - a_1 \quad \text{dove} \quad a_1 \equiv a_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1/2, \\ 1 & \text{se } 1/2 \leq x < 1, \end{cases}$$

dalla quale  $x = \frac{1}{2}(a_1 + T_2(x))$ ; chiaramente,  $T_2(x)$  può essere scritta in termini dell'iterata seconda

$$T_2^2(x) = 2T_2(x) \pmod{1} = 2T_2(x) - a_2 \quad \text{dove} \quad a_2 \equiv (a_1 \circ T_2)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq T_2(x) < 1/2, \\ 1 & \text{se } 1/2 \leq T_2(x) < 1, \end{cases}$$

di modo che  $x = \frac{1}{2}[a_1 + \frac{1}{2}(a_2 + T_2^2(x))]$ . Procedendo per induzione, si ottiene l'espressione

$$x = \sum_{k \leq n} \frac{a_k}{2^k} + \frac{T_2^n(x)}{2^n} \implies x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{b^n}, \quad a_n \equiv a_1 \circ T_2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

essendo  $T_2^n(x) \in [0, 1)$ . Si scopre allora che l'espansione binaria di un numero  $x \in [0, 1)$  può essere costruita per mezzo della mappa di raddoppiamento e che, in particolare, la rappresentazione  $x = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$  non è altro che una dinamica simbolica. Si può dimostrare, infatti, che la mappa  $T_2$  e la shift-map (in avanti)  $\sigma^+ : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , dove  $\Sigma_2 \equiv \{0, 1\}$ , sono topologicamente semi-coniugate. Inoltre, va osservato che  $T_2$  opera proprio come una shift-map sulle cifre dell'espansione binaria di  $x$ , infatti

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{2^n} \implies T_2(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \pmod{1} = \left( a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} \right) \pmod{1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{2^n}, \quad (19)$$

avendo effettuato il cambio di indice  $n \rightarrow n-1$ . Un discorso perfettamente analogo può essere effettuato per la rappresentazione  $b$ -adica di  $x \in [0, 1)$  adoperando la mappa  $b$ -adica  $T_b : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ , sicché

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{b^n}, \quad a_n \equiv a_1 \circ T_b^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq T_b^{n-1}(x) < 1/b, \\ 1 & \text{se } 1/b \leq T_b^{n-1}(x) < 2/b, \\ \dots & \dots \\ b-1 & \text{se } (b-1)/b \leq T_b^{n-1}(x) < 1. \end{cases} \quad (20)$$

Si chiarisce finalmente perché ci siamo prodigati per dimostrare l'ergodicità di  $T_2$  e quindi di  $T_b$ : grazie a questa proprietà possiamo applicare il teorema di Birkhoff alla (17) e dimostrare il teorema di Borel.

*Dimostrazione.* Sia  $x \in [0, 1)$  e  $b \in \mathbb{N}$  la generica base in cui  $x$  è rappresentato. Si consideri il blocco di  $k \in \mathbb{N}$  cifre  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$ ,  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ . Per dimostrare la (17) partiamo dal caso  $k=1$ : dalla (20) segue che  $a_n = a_1 \circ T_b^{n-1} = \alpha \iff T_b^{n-1}(x) \in [\frac{\alpha}{b}, \frac{\alpha+1}{b}) =: \mathcal{I}(\alpha)$  e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n = \alpha) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{n \leq N : a_n = \alpha\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{n \leq N : T_b^{n-1}(x) \in \mathcal{I}(\alpha)\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{\mathcal{I}(\alpha)}(T_b^{n-1}(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{\mathcal{I}(\alpha)}(T_b^n(x)). \end{aligned}$$

Ma  $T_b$  è ergodica rispetto alla misura di Lebesgue  $\lambda$  su  $[0, 1)$  e quindi, per il teorema di Birkhoff,

$$\mathcal{P}(a_n = \alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{\mathcal{I}(\alpha)}(T_b^n(x)) \stackrel{q.o. \text{ su } [0, 1)}{=} \int_0^1 \chi_{\mathcal{I}(\alpha)} d\lambda = \lambda(\mathcal{I}(\alpha)) = \frac{1}{b}.$$

Per  $k \in \mathbb{N}$  generico, l'intervallo  $[0, 1)$  è suddiviso in  $b^k$  sottointervalli e la condizione  $(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (a_n, \dots, a_{n+k-1})$  è soddisfatta se  $T_b^{n-1}(x) \in [\frac{\alpha}{b^k}, \frac{\alpha+1}{b^k}) =: \mathcal{I}(\alpha, k)$ , dove  $\alpha := \alpha_1 b^{k-1} + \dots + \alpha_k$ ; per cui

$$\mathcal{P}((a_n \dots a_{n+k-1}) = (\alpha_1 \dots \alpha_k)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{\mathcal{I}(\alpha, k)}(T_b^n(x)) \stackrel{q.o. \text{ su } [0, 1)}{=} \frac{1}{b^k}. \quad \square$$

Sebbene sia noto che la maggior parte dei numeri reali è normale in ogni base, risulta incredibilmente difficile provare la normalità di un numero assegnato. Ad oggi si sa solo che la *costante di Champernowne*

$$0.1234567891011121314\dots$$

è normale in base decimale (D. G. Champernowne, 1933) ed in base 2 [BaC001], mentre

$$0.235711131719232931\dots,$$

nota come *costante di Copeland–Erdős*, è normale in base decimale (A. H. Copeland e P. Erdős, 1946). Non si sa nulla però su alcune note costanti matematiche come  $\pi$ ,  $\log 2$ ,  $\zeta(3)$  o  $\sqrt{2}$ , la cui normalità resta ancora una congettura; in particolare, si pensa che ogni irrazionale algebrico sia normale in ogni base [BaC001]. Si sa, invece, che la costante di Nepero ed ogni numero appartenente all'insieme di Cantor  $\mathcal{C} := \{x \in [0, 1] : x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n}, a_n \in \{0, 2\}\}$  non è normale in base 3 nel senso di Borel (il che implica, ad esempio, che ogni  $x \in \mathcal{C}$  è necessariamente razionale o trascendente).

Grazie al teorema di Borel si possono descrivere alcune proprietà nascoste della dinamica simbolica associata alla rappresentazione binaria (18). Se  $x \in [0, 1)$  è normale nel senso di Borel, allora  $\{a_n = (a_1 \circ T_2^{n-1})(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un insieme di variabili casuali discrete, statisticamente indipendenti ed ugualmente distribuite con distribuzione uniforme  $\mathcal{P}(a_n = \{0, 1\}) = \frac{1}{2}$ , avente ciascuna valor medio e varianza

$$\mathcal{E}[a_n] = \frac{\sum_{\nu \in \Sigma_2} \nu \mathcal{P}(a_n = \nu)}{\sum_{\nu \in \Sigma_2} \mathcal{P}(a_n = \nu)} = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{V}[a_n] = \frac{\sum_{\nu \in \Sigma_2} (\nu - E[a_n])^2 \mathcal{P}(a_n = \nu)}{\sum_{\nu \in \Sigma_2} \mathcal{P}(a_n = \nu)} = \frac{1}{4}.$$

Si può allora applicare ad  $S_N := a_1 + \dots + a_N$  il *teorema del limite centrale*, di modo che [Ste010]

$$\mathcal{P}\left(\frac{S_N - \mathcal{E}[a_n]N}{\sqrt{\mathcal{V}[a_n]N}} \leq y\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\sum_n (a_1 \circ T_2^{n-1})(x) - N/2}{\sqrt{N/4}} \leq y\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (21)$$

L'importanza di questo risultato risiede nell'evidenziare l'esistenza di un legame tra la proprietà di ergodicità (o di mixing<sup>12</sup>) di una mappa e la distribuzione asintotica delle sue iterate. Questo intimo legame tra proprietà caotiche e probabilistiche ha ispirato (e continua ad ispirare) il lavoro di numerosi matematici (tra i quali spicca Y. G. Sinai). In particolare, in un articolo del 2008 di M. C. Mackey e M. Tyran-Kamińska intitolato “*Deterministic Brownian Motion: The effects of perturbing a dynamical system by a chaotic semi-dynamical system*” si dimostra che se la mappa è mixing<sup>13</sup> rispetto alla misura conservata su *tutto* lo spazio di definizione, allora la distribuzione di probabilità della variabile

$$y := \frac{1}{N^\alpha} \sum_{n=0}^N (g \circ T^n)(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}_0^+,$$

costruita a partire dalle iterate  $T^n(x)$  per mezzo di una funzione liscia  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  di valor medio nullo, tende ad una gaussiana.

<sup>12</sup>Si dimostra che la mappa  $b$ -adica è fortemente mixing rispetto alla misura di Lebesgue su  $[0, 1)$  (vedi appendice A).

<sup>13</sup>In realtà, l'ipotesi adoperata è più probabilistica: si richiede, infatti, che le iterate siano asintoticamente indipendenti.

### 3 Proprietà statistiche ed ergodiche della $\zeta$ di Riemann

In questa sezione verranno descritte alcune tra le più recenti applicazioni della Teoria Ergodica dei Sistemi Dinamici alla funzione zeta di Riemann ed, in particolare, all'*ipotesi di Riemann*.

Vari libri trattano egregiamente la storia della funzione zeta<sup>14</sup>; tuttavia, per questioni di brevità, descriveremo solo alcune nozioni tecniche ad essa associate. Per  $\Re(s) > 1$ ,  $\zeta(s)$  è definita come

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (22)$$

Esistono vari modi per prolungare analiticamente la funzione  $\zeta$  oltre il semipiano di assoluta convergenza: uno di essi è associato a quella che è oggi nota come *equazione funzionale di Riemann*<sup>15</sup>

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (23)$$

Le precedenti espressioni forniscono importanti informazioni sugli zeri della  $\zeta$ : dalla (22) risulta evidente che  $\zeta(s)$  non ammette alcuna radice per  $\Re(s) > 1$ , mentre dalla (23) si trova che  $\zeta(s)$  si annulla su  $\Re(s) < 0$  in corrispondenza dei cosiddetti “zeri banali”  $s = -2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ <sup>16</sup>. Di conseguenza, gli unici zeri *non banali* di  $\zeta(s)$  devono giacere all'interno della cosiddetta “*striscia critica*”  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ ; inoltre, per via della simmetria della (23) rispetto allo scambio  $s \mapsto 1-s$  e poiché  $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ , gli zeri non banali si distribuiscono simmetricamente rispetto alla “*retta critica*”  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ . Una stima del numero  $N(T)$  di zeri non banali  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $0 < \gamma \leq T$  è dato dalla *formula di Riemann-von Mangoldt*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + \mathcal{O}(T \log T), \quad (24)$$

dedotta da Riemann nell'opera del 1859 per  $\beta = 1/2$  e successivamente generalizzata da von Mangoldt a valori di  $\beta \in [0, 1)$ . Riemann lavorò a lungo sulla funzione  $\gamma \mapsto \zeta(\frac{1}{2} + i\gamma)$ , giungendo ad ipotizzare che tutti gli zeri non banali giacciono sulla retta critica, il che equivale (per simmetria) ad affermare che

$$\zeta(s) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \frac{1}{2}. \quad (\text{Ipotesi di Riemann})$$

Si suppone inoltre che *tutti o quasi tutti gli zeri non banali della  $\zeta$  siano semplici*.

Nei 161 anni trascorsi dalla pubblicazione dell'articolo di Riemann, eminenti matematici hanno tentato, invano, di dimostrare l'ipotesi di Riemann. I loro lavori, tuttavia, hanno portato alla conoscenza

<sup>14</sup>Ad esempio M. DU SAUTOY “*L'enigma dei numeri primi*” o J. DERBYSHIRE “*L'ossessione dei numeri primi*”.

<sup>15</sup>Il procedimento, introdotto da Riemann nel famoso articolo del 1859 [Rie859], è sommariamente riassunto di seguito:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &:= \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} dt \xrightarrow{t \rightarrow \pi n^2 x} \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx, \\ \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &\stackrel{\text{abs.conv.: } \Re(s) > 1}{=} \left\{ \int_0^1 + \int_1^\infty \right\} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx, \quad \omega(x) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{2} [\theta(x) - 1], \\ \theta(x) &= \text{funzione Theta di Jacobi} : \omega\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \left[ \theta\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right] = \sqrt{x} \omega(x) + \frac{1}{2} (\sqrt{x} - 1), \\ \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left( x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \omega(x) dx. \end{aligned}$$

L'ultima espressione è ben definita  $\forall s \in \mathbb{C}$  ed è invariante rispetto alla mappa  $s \mapsto (1-s)$ , da cui segue l'equazione (23).

<sup>16</sup>Infatti, tenendo presente la soluzione generalizzata di Eulero del problema di Basilea e l'espressione per la funzione  $\Gamma$

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} |B_{2n}| \pi^{2n}}{(2n)!}, \quad \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!},$$

rispettivamente, si ha che il membro a destra della (23) è una quantità finita per  $s \in -2\mathbb{N}$ . D'altro canto, la funzione Gamma, prolungata analiticamente su  $\Re(s) < 0$ , ammette infiniti poli  $\forall s \in \mathbb{Z}^-$ . Pertanto, affinché  $\Gamma(-n)\zeta(-2n)$  sia una quantità finita, deve necessariamente essere  $\zeta(-2n) = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

di interessanti informazioni: nel 1914 G. Hardy dimostrò che *infiniti zeri giacciono sulla retta critica* e sempre nello stesso anno H. Bohr ed E. G. H. Landau dimostrarono che *quasi tutti gli zeri non banali della  $\zeta$  sono arbitrariamente prossimi alla retta critica*. Per i primi risultati quantitativi bisognerà attendere il 1974, anno in cui N. Levinson dimostrò che almeno 1/3 degli zeri non banali giace sulla retta critica; tale risultato fu esteso nel 1989 da B. Conrey ai 2/5 degli zeri<sup>17</sup>.

Sempre nel suo articolo del 1859, Riemann descrisse l'esistenza di un profondo legame tra la distribuzione dei numeri primi e gli zeri della funzione  $\zeta$ . In particolare, dimostrò che l'identità (22) può essere scritta equivalentemente nella forma [Rie859]

$$\frac{1}{s} \log \zeta(s) = \int_0^\infty \mathcal{J}(x) x^{s-1} dx, \quad \mathcal{J}(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\pi(x^{1/n})}{n}, \quad (25)$$

dove  $\pi(x)$  rappresenta la *funzione conta primi*. L'equazione integrale (25) non è altro che la *trasformata di Mellin*  $\mathcal{M}$  della funzione  $\mathcal{J}$ , la cui antitrasformata fornisce un'espressione di  $\pi$  in termini di  $\zeta$

$$\mathcal{J}(x) = \mathcal{M}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \log \zeta(s) \right] (x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-s}}{s} \log \zeta(s) ds.$$

A questo punto, è sufficiente osservare che  $\zeta(s)$  può essere scritta in termini dei suoi zeri come [TeF000]

$$\zeta(s) = \frac{e^{\log 2\pi - 1 - \frac{1}{2}\gamma}}{2(s-1)\Gamma(1 + \frac{s}{2})} \prod_{\rho} \left( 1 - \frac{s}{\rho} \right) e^{s/\rho}, \quad (26)$$

dove  $\gamma = 0.5772156649\dots$  è la *costante di Eulero–Mascheroni*. Esiste dunque un intimo legame tra la funzione conta primi e gli zeri della funzione zeta, descritto dalla *formula esplicita* [Rie859]

$$\mathcal{J}(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} (\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{1-\rho})) + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} - \log 2, \quad \text{Li}(x) := \int_1^\infty \frac{dt}{\log t}. \quad (27)$$

A questo punto entra in gioco l'ipotesi di Riemann. Si può dimostrare che la formula esplicita (27), troncata per valori di  $\rho$  tali che  $|\gamma| \leq T$ , è equivalente alla seguente espressione [Ste010]

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho: |\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \mathcal{O} \left\{ \frac{x}{T} [\log(xT)]^2 \right\}, \quad \psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(x), \quad (28)$$

dove  $\Lambda$  è la *funzione di von–Mangoldt* e vale  $\log p$  per  $n = p^k$  con  $k \in \mathbb{N}$  e 0 altrimenti<sup>18</sup>. L'equivalenza è dovuta ad un teorema, dimostrato da Chebyshev, per merito del quale risulta che [TeF000]

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} \left\{ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log x} \right) \right\}, \quad (x \rightarrow \infty). \quad (29)$$

Si scopre allora che per conoscere la distribuzione dei numeri primi è necessario saper calcolare la somma in (28) estesa agli zeri non banali della  $\zeta$ : il numero di zeri con  $|\gamma| \leq T$  si conosce ed è dato dalla formula di Riemann–von Mangoldt (24), non si sa però come essi siano distribuiti lungo la striscia critica. Sapendo che  $\zeta(s) \neq 0$  per  $\Re(s) = 1$ , nel 1896 J. S. Hadamard e C. J. de la Vallée–Poussin ottennero (indipendentemente) una stima per la somma in (28), dimostrando la nota congettura di Gauss  $\psi(x) \sim x \Leftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ . Emerge quindi il ruolo che l'ipotesi di Riemann svolge nella Teoria dei Numeri Primi: una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann permetterebbe di ottenere una formula esatta per il calcolo della somma contenuta in (28) e quindi l'esatta espressione descrivente la distribuzione dei numeri primi.

<sup>17</sup>In un articolo pubblicato nel 2010 dallo stesso B. Conrey, in collaborazione con H. M. Bui ed M. P. Young, è stato dimostrato che più del 41% degli zeri non banali della  $\zeta$  hanno parte reale 1/2.

<sup>18</sup>L'introduzione della funzione di von Mangoldt è dovuta al fatto che il procedimento adoperato per ricavare la (28) verte essenzialmente sull'espressione associata alla derivata logaritmica della funzione  $\zeta$ :

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

### 3.1 Proprietà statistiche delle ordinate degli zeri non banali

Come prima applicazione della teoria illustrata nelle precedenti sezioni, si vuol studiare la distribuzione delle ordinate degli zeri non banali della  $\zeta$ . Il primo risultato in questo senso fu ottenuto da H. A. Rademacher nel 1974 e successivamente generalizzato da G. A. Elliott (1972) e da E. Hlawka (1975). Ci riferiamo qui al lavoro di questi ultimi, i quali dimostrarono (indipendentemente) il seguente

**TEOREMA 1.6** - *Le ordinate degli zeri non banali della  $\zeta$  sono uniformemente distribuiti mod 1.*

*Dimostrazione.* Vanno richiamati alcuni risultati: il primo, dovuto a E. G. H. Landau, è il seguente

$$\sum_{0 < \gamma \leq T} x^\rho = -\Lambda(x) \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T) \quad (x > 1),$$

dal quale, tenendo presente la formula di Riemann–von Mangoldt (24), segue che<sup>19</sup>

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{0 < \gamma \leq T} x^\rho \ll \frac{1}{\log T}. \quad (30)$$

Poiché  $|x^{\frac{1}{2} + i\gamma} - x^{\beta + i\gamma}| \leq x^\beta |e^{(\frac{1}{2} - \beta) \log x} - 1| \leq x^\beta \log x |\frac{1}{2} - \beta|$  ed essendo  $\beta \in [0, 1]$ , si ha che

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{0 < \gamma \leq T} |x^{\frac{1}{2} + i\gamma} - x^{\beta + i\gamma}| \leq \frac{x \log x}{N(T)} \sum_{0 < \gamma \leq T} \left| \beta - \frac{1}{2} \right|. \quad (31)$$

Si noti che  $|\beta - 1/2|$  non può essere portato fuori dal termine di somma a meno che non si consideri valida l'ipotesi di Riemann. Ciò non è necessario, grazie al seguente risultato di J. E. Littlewood col quale si dimostra che quasi tutti gli zeri non banali della  $\zeta$  sono addensati attorno alla retta critica:

$$\sum_{0 < \gamma \leq T} \left| \beta - \frac{1}{2} \right| \ll T \log \log T.$$

Inserendo quest'ultima nella (31) ed adoperando la formula di Riemann–von Mangoldt si trova che

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{0 < \gamma \leq T} (x^{\frac{1}{2} + i\gamma} - x^{\beta + i\gamma}) \ll \frac{\log \log T}{\log T} \implies \frac{1}{N(T)} \sum_{0 < \gamma \leq T} x^{\frac{1}{2} + i\gamma} \ll \frac{\log \log T}{\log T}, \quad (32)$$

avendo tenuto conto della relazione (30) e della proprietà di simmetria degli zeri non banali rispetto alla retta critica. Allora, ponendo  $x = z^h$  con  $1 < z \in \mathbb{R}$  e  $h \in \mathbb{N}$ , si deduce dalla (32) che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{\gamma=1}^T e \left( \frac{h}{2\pi} \gamma \log z \right) = 0.$$

La successione  $\{\frac{1}{2\pi} \gamma \log z\}_\gamma$  soddisfa il criterio di Weyl ed è quindi uniformemente distribuita mod 1.  $\square$

### 3.2 Proprietà ergodiche ed ipotesi di Riemann

Concludiamo con alcune recenti applicazioni della Teoria Ergodica alla funzione  $\zeta$ . A tal proposito richiamiamo l'unica trasformazione lasciata finora da parte: la *mappa di Newton*. Ricordiamo che essa è la trasformazione  $T_{\mathcal{N}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $T_{\mathcal{N}}(0) = 0$  per  $x = 0$  e  $T_{\mathcal{N}}(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$  per  $x \neq 0$  e che è ergodica rispetto alla misura di probabilità  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(A) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ . Si può pensare di studiare l'andamento

<sup>19</sup>Si adotta la notazione:  $f$  e  $g$  definite su  $X$ ,  $g(x) > 0 \forall x \in X$ ; allora  $f(x) \ll g(x) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq Cg(x), \forall x \in X$ .

dei valori di  $\zeta(s)$  lungo le rette ottenute fissando  $\Re(s)$  e facendo variare le ordinate immaginarie di  $s$  rispetto alla trasformazione  $T_{\mathcal{N}}$ . In particolare siamo interessati a calcolare la quantità

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}_s \circ T_{\mathcal{N}}^n, \quad \mathcal{F}_s(\cdot) : x \in \mathbb{R} \mapsto \zeta(s + ix).$$

Si dimostra [Ste010] che la funzione  $\mathcal{F}_s$  è integrabile rispetto alla misura di probabilità  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  purché  $\Re(s) > -1/2$ ; si può quindi applicare il teorema di Birkhoff, ottenendo l'espressione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta(s + iT_{\mathcal{N}}^n(x)) \stackrel{q.o. \text{ in } \mathbb{R}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \zeta(s + i\tau) \frac{d\tau}{1 + \tau^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -\frac{1}{2}, \quad (33)$$

dove  $\tau \equiv T_{\mathcal{N}}(x)$ . Per quanto detto nel §1.1, l'integrale nella (33) può essere interpretato come il valore di aspettazione della funzione  $\zeta$  calcolata lungo un *percorso casuale rettilineo* ( $\Re(s)$  è tenuta fissa) *distribuito secondo Cauchy*<sup>20</sup>. In un recente lavoro [LiW009], M. Lifshits e M. Weber hanno calcolato il valore degli integrali (33)  $\forall s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -1/2$ ; i risultati ottenuti sono riassunti nel seguente

**TEOREMA 1.7 (LIFSHITS–WEBER)** - *Con riferimento alla formula (33), si ha che  $\forall s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -1/2$*

$$\ell(s) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \zeta(s + i\tau) \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = \begin{cases} \zeta(s+1) - \frac{2}{s(2-s)} & \text{se } \Re(s) < 1, \\ \zeta(s+1) - \frac{1}{s(2-s)} & \text{se } s = 1 + it, t \in \mathbb{R}, \\ \zeta(s+1) & \text{se } \Re(s) > 1. \end{cases}$$

*Infine, per  $s = 0$  si ha che  $\ell(0) \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \ell(s) = \gamma - \frac{1}{2}$ , dove  $\gamma$  è la costante di Eulero–Mascheroni.*

In particolare, il precedente teorema mostra che lungo la retta critica il valore di aspettazione è [Ste010]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta\left(\frac{1}{2} + iT_{\mathcal{N}}^n(x)\right) \stackrel{q.o. \text{ su } \mathbb{R}}{=} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{8}{3} = -0.05429 \dots,$$

il che si può interpretare affermando che *quasi tutti i valori della  $\zeta$  lungo la retta critica sono mediamente piccoli*. Si può far vedere [LiW009] che ciò è collegato all'**ipotesi di Lindelöf**, secondo la quale

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^\epsilon \quad (t \rightarrow \infty). \quad (\text{Ipotesi di Lindelöf})$$

Sorge una domanda: perché tanto interesse a calcolare i valori di aspettazione di  $\zeta$  lungo un percorso casuale di Cauchy sulla retta critica? La risposta, alquanto affascinante, è legata all'ipotesi di Riemann. In un articolo apparso nel 1999, M. Balazard, E. Saias ed M. Yor dimostrarono che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Re(s)=\frac{1}{2}} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^2} |ds| = \sum_{\Re(s) > \frac{1}{2}} \log \left| \frac{\rho}{1 - \rho} \right|, \quad (34)$$

per cui *l'ipotesi di Riemann è vera se e solo se l'integrale in (34) è zero*. Ciò può essere messo in relazione con le considerazioni precedenti osservando che l'integrale in (34) è proprio il valore di aspettazione di  $\log |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$  rispetto ad un cammino casuale di Cauchy. Infatti, ponendo  $t = \frac{\tau}{2}$  nella (34), si trova che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \frac{dt}{\left|\frac{1}{2} + it\right|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \log \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\tau\right) \right| \frac{d\tau}{1 + \tau^2}.$$

La (34) garantisce l'integrabilità di  $\log |\zeta(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\tau)|$  su  $\mathbb{R}$  rispetto alla misura di probabilità  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  ed è quindi possibile applicare il teorema ergodico di Birkhoff, ricavando il seguente

<sup>20</sup>Ricordiamo che la densità  $T_{\mathcal{N}}$ -invariante  $\rho_{\mathcal{N}}(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$  è proprio la funzione densità di probabilità associata alla distribuzione di Cauchy. Si noti che si parla qui di *cammino casuale* in quanto le variabili casuali in questione sono associate ad una mappa e quindi seguono un processo stocastico deterministico.

TEOREMA 1.8 (BALAZARD–SAIAS–YOR) - *Sia dato il sistema dinamico ergodico  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P}_N, T_N)$ . Allora*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT_N^n(x) \right) \right| \stackrel{q.o. \text{ in } \mathbb{R}}{=} \sum_{\Re(\rho) > \frac{1}{2}} \log \left| \frac{\rho}{1-\rho} \right|; \quad (35)$$

*in particolare, l'ipotesi di Riemann è vera se e solo se entrambi i termini si annullano q.o. in  $\mathbb{R}$ .*

Una verifica computazionale del teorema 1.8 è a sostegno della validità dell'ipotesi di Riemann. Scegliendo, ad esempio, come condizione iniziale  $x = 42$ , si trova infatti che [Ste010]

$$\frac{1}{10^6} \sum_{n=0}^{10^6} \lg \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT_N^n(42) \right) \right| = -0.0000445327 \dots$$

## 4 Conclusioni e sviluppi futuri

Il quadro che traspare dai risultati esposti in questa relazione è senz'altro affascinante: la Teoria Ergodica dei Sistemi Dinamici incontra in modo pressoché naturale la Teoria dei Numeri. La “dimostrazione ergodica” del teorema di Borel, ad esempio, dà risalto al delicato legame esistente tra proprietà dinamiche e proprietà numeriche, così come l'interpretazione ergodica dell'ipotesi di Riemann.

Ci sono poi due risultati semplicemente sorprendenti: il limite gaussiano della distribuzione delle iterate della mappa di raddoppiamento e l'andamento caotico delle poligonali associate alla somma di Weyl estesa ai numeri primi. Entrambi gli argomenti potrebbero avere un'interpretazione fisica: il teorema del limite centrale ed i processi di diffusione sono, infatti, fortemente collegati alla Meccanica Statistica ed hanno entrambi dei profondi punti di contatto con il concetto di entropia.

Potrebbe allora la Teoria Ergodica fornire un punto di partenza per la ricerca di applicazioni della Teoria dei Numeri alla Fisica Statistica?

## A Proprietà di ergodicità e di mixing della mappa di Ulam

Lo studio delle proprietà della mappa di raddoppiamento permette di dedurre alcuni importanti risultati associati alla **mappa di Ulam**<sup>21</sup>. Ciò è dovuto al fatto che  $T_2(\cdot) : \vartheta \in \mathbb{T}^1 \mapsto (2\vartheta \bmod 2\pi) \in \mathbb{T}^1$  ed  $f_4(\cdot) : x \in [0, 1] \mapsto 4x(1-x) \in [0, 1]$  sono *topologicamente semi-coniugate* [Dev003]: infatti, l'applicazione  $h(\cdot) : \vartheta \in \mathbb{T}^1 \mapsto \sin^2 \vartheta \in [0, 1]$  è tale per cui  $h \circ T_2 = f_4 \circ h$ . Questa proprietà consente di dimostrare, ad esempio, che  $f_4$  è caotica nel senso dato da Devaney a partire dalla dimostrazione (ben più semplice) di caoticità di  $T_2$ . Nello stesso spirito, avendo provato che  $T_2$  è ergodica rispetto alla misura di Lebesgue, possiamo concludere che  $f_4$  è *ergodica rispetto alla misura di probabilità invariante ad essa associata*. Il problema è determinare tale misura. A tal fine, sia  $\rho_{T_2}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}$  la densità (di misura) di probabilità  $T_2$ -invariante normalizzata (più brevemente, densità  $T_2$ -invariante) e con  $\rho_{f_4}$  la densità  $f_4$ -invariante da determinarsi. Le due densità sono definite a meno del cambio di variabile  $x = \sin^2 \vartheta$  dato dalla coniugazione topologica, ovvero [BeS993]

$$\rho_{T_2}(\vartheta(x)) = |h'(\vartheta(x))| \rho_{f_4}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{T_2}(\vartheta(x)) d\vartheta(x) = \rho_{f_4}(x) dx. \quad (36)$$

Restringendo  $h$  all'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  si ha che  $\vartheta = \arcsin(x^{1/2})$  e quindi  $d\vartheta = \frac{1}{2}[x(1-x)]^{-1/2} dx$ ; sostituendo nella (36) e richiedendo che  $\int_{[0,1]} \rho_{f_4}(x) dx = 1$  si trova la quantità cercata

$$\rho_{f_4}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \Rightarrow \quad \mu_{f_4}(A) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (37)$$

dove  $A \in \mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}$  è una  $\sigma$ -algebra di Borel di  $[0, 1]$ . Pertanto, il sistema  $([0, 1], \mathcal{B}, \mu_{f_4}, f_4)$  è ergodico.

Possiamo ora dimostrare che  $f_4$  è **fortemente mixing** rispetto a  $\mu_{f_4}$ . Per cominciare, ricordiamo che una trasformazione  $T : X \rightarrow X$   $\mu$ -conservativa sullo spazio di probabilità  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  è *fortemente mixing* rispetto a  $\mu$  se e solo se  $\forall A, B \in \mathcal{F}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ . Come per la proprietà di ergodicità, basterà verificare che  $T_2$  è *fortemente mixing* rispetto alla misura di Lebesgue  $\lambda$  [Sil007].

*Dimostrazione.* Sia  $T_2(x) = 2x \bmod 1$  agente su  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$  ed  $A, B$  due sottointervalli Boreliani *di-adici*

$$A = \left[ \frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right) \quad i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k < 2^i, \quad B = \left[ \frac{l}{2^j}, \frac{l+1}{2^j} \right) \quad j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq l < 2^j.$$

Questa scelta non riduce la generalità della dimostrazione: si dimostra infatti che ogni  $X \in \mathcal{B}$  può essere scritto come unione finita di intervalli di-adici. Si consideri quindi la preimmagine di  $A$  sotto  $T_2$

$$T_2^{-1}A = \left[ \frac{k}{2^{i+1}}, \frac{k+1}{2^{i+1}} \right) \cup \left[ \frac{k}{2^{i+1}} + \frac{1}{2}, \frac{k+1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2} \right).$$

Come si può notare,  $T_2^{-1}A$  consiste in 2 intervalli di ampiezza  $1/2^{i+1}$  separati tra loro della quantità  $\ell(1) = 1/2$ ; procedendo per induzione, si trova che  $T_2^{-n}A$  consiste in  $2^n$  intervalli di ampiezza  $1/2^{i+n}$  separati della quantità  $\ell(n) = 1/2^n$ . Pertanto, osservando che  $T_2^{-n}A \cap B \neq \emptyset$  per  $j < n$  e che il numero di intervalli di  $T_2^{-n}A$  contenuti in  $B$  è  $\frac{\lambda(B)}{\ell(n)} = 2^{n-j}$  [Sil007], si ottiene che

$$\lambda(T_2^{-n}A \cap B) = \frac{1}{2^{i+n}} 2^{n-j} = \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^j} = \lambda(A)\lambda(B),$$

il che completa la dimostrazione. □

<sup>21</sup>Ci si riferisce alla mappa logistica in corrispondenza del parametro di controllo  $\lambda = 4$ . Storicamente, lo studio di una delle proprietà analizzate in questa sezione viene fatto risalire ad alcuni preliminari lavori condotti negli anni cinquanta da von Neumann ed Ulam e per tali ragioni la trasformazione  $f_4$  è spesso indicata come *mappa di Ulam*.

## B L'operatore di Perron–Frobenius

L'evoluzione temporale delle densità nello spazio delle fasi è descritta da un operatore lineare  $\mathcal{L}$ , noto come *operatore di Perron–Frobenius*. Per una trasformazione  $T : X \rightarrow X$ , la definizione di  $\mathcal{L}$  è data in termini dalla relazione di ricorrenza  $\rho_{n+1} = \mathcal{L} \rho_n$ , dove  $\rho_n$  indica la densità al passo  $n$ . Nel caso unidimensionale, indicando con  $A = (\alpha, \beta)$  un aperto di  $\mathbb{R}$  ed imponendo che la probabilità a ciascun passo risulti conservata, ovvero che  $\int_A \rho_{n+1}(x) dx = \int_{T^{-1}A} \rho_n(x) dx$ , si ha che [BeS993]

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho_{n+1}(x) dx = \sum_{\sigma} \left| \int_{T_{\sigma}^{-1}(\alpha)}^{T_{\sigma}^{-1}(\beta)} \rho_n(x) dx \right| \xrightarrow{x \rightarrow T_{\sigma}^{-1}(y)} \sum_{\sigma} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho_n(T_{\sigma}^{-1}(y))}{|T'_{\sigma}(T_{\sigma}^{-1}(y))|} dy, \quad (38)$$

dove la somma è estesa all'insieme numerabile  $\{T_{\sigma}^{-1}(\alpha, \beta)\}_{\sigma}$  di preimmagini la cui unione costituisce  $T^{-1}(\alpha, \beta)$ . Poiché la (38) deve essere valida per  $\alpha$  e  $\beta$  arbitrari, si trova che

$$\rho_{n+1}(y) = \sum_{\sigma} \frac{\rho_n(T_{\sigma}^{-1}(y))}{|T'_{\sigma}(T_{\sigma}^{-1}(y))|} \Rightarrow \mathcal{L} \rho(y) = \sum_{\sigma} \frac{\rho(T_{\sigma}^{-1}(y))}{|T'_{\sigma}(T_{\sigma}^{-1}(y))|} = \sum_{x \in T^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|T'(x)|}. \quad (39)$$

L'operatore di Perron–Frobenius è estremamente utile nella ricerca delle densità invarianti associate ad una data trasformazione  $T$ . Tali densità, infatti, possono essere ottenute risolvendo l'equazione funzionale  $\rho_T(y) = \mathcal{L} \rho_T(y)$  ovvero determinando i *punti fissi dell'operatore  $\mathcal{L}$  nello "spazio delle fasi"*.

## Riferimenti bibliografici

- [BaC001] D. H. BAILEY e R. E. CRANDALL – *On the Random Character of Fundamental Constant Expansion*, Experimental Mathematics, Vol. **10**, No. **2**, (2001).
- [BeS993] C. BECK e F. SCHLÖGL *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (1993) [ISBN 978-0-5214-3367-9].
- [Bil986] P. BILLINGSLEY – *Probability and Measure*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., p.151 (1986) [ISBN 0-4718-0478-9].
- [Dev003] R. L. DEVANEY – *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Westview Press, Boston University Editor, Boston (2003) [ISBN 978-0-8133-4085-2].
- [EW2010] M. EINSIEDLER, T. WARD – *Ergodic Theory: with a view towards Number Theory*, Series *Graduated texts in Mathematics*: Vol. **259**, (Springer–Verlag, London Limited 2011) [ISBN 978-0-8572-9020-5].
- [LiW009] M. LIFSHITS e M. WEBER – *Sampling the Lindelöf Hypothesis with the Cauchy Random Walk*, Proc. London Math. Soc. **98**, pgg. 241–270 (2009).
- [Rie859] G. F. B. RIEMANN – *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, Novembre (1859), nella traduzione inglese di D. R. WILKINS – *On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity* (1998).
- [Sil007] C. E. SILVA – *Invitation to Ergodic Theory*, American Mathematical Society, Series *Student Mathematical Library*: Vol. **42**, pg. 226 (2007) [ISBN 978-0-8218-4420-5].
- [Ste010] J. STEUDING – *Ergodic Number Theory: A course at Nagoya University*, fruibile gratuitamente: URL <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/steuding/nihon.pdf>.
- [TeF000] G. TENENBAUM e M. M. FRANCE – *The Prime Numbers and Their Distribution*, American Mathematical Society, Series *Student Mathematical Library*: Vol. **6**, 67–71 (2000) [ISBN 978-0-8218-1647-0].