

Appunti di Fisica Teorica I

Assiomi di von–Neumann, matrice densità e simmetrie

Ivan Bonamassa

ivan.bms.2011@gmail.com

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio de Giorgi"

18 Gennaio 2012

CONTENTS

1	Assiomi fondamentali della Meccanica Quantistica	2
2	Il formalismo dell'operatore densità	4
3	Sistemi composti e proprietà di correlazione	8
3.1	Rappresentazione di stati ed osservabili di sistemi composti	8
3.2	Operatori densità parziali e classificazione degli stati	9
4	Cambiamenti di base e regole di quantizzazione	13
4.1	Trasformazioni e cambiamenti di base	13
4.2	Quantizzazione canonica ed ordinamento	15
5	Simmetrie ed invarianza in Meccanica Quantistica	17
5.1	Trasformazioni di simmetria di stati e di osservabili	17
5.2	Teorema di Wigner e legge di trasformazione delle osservabili	18
5.3	Trasformazioni infinitesimali, generatori e teorema di Stone	19
5.4	Traslazioni spaziali, temporali e rotazioni	21
6	Evoluzione temporale ed equazioni del moto	25
6.1	Equazioni del moto e leggi di conservazione	27
6.2	Stati stazionari, invarianze e leggi di conservazione	28
6.2.1	Trasformazioni dipendenti dal tempo	30
7	Gruppi di simmetria e di invarianza	30
7.1	Algebra di Lie, costanti di struttura ed estensione centrale	31
7.2	Traslazioni spazio–temporali e rototraslazioni	32
7.3	Trasformazioni galileiane dello spazio–tempo	36
7.3.1	Regola di superselezione di Bargmann	39
7.4	Algebra di Lie di Galilei, particelle elementari e simmetrie interne	40
7.4.1	Particelle elementari e variabili dinamiche	41
7.4.2	Osservabile di spin e simmetrie interne	43
7.5	Interazioni minimali e rottura di simmetria	44
7.5.1	Interazione con un campo esterno	45
7.6	Trasformazioni di gauge	48
A	Formula BCH, di Zassenhaus e lemma di Hadamard	51

1 ASSIOMI FONDAMENTALI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Sia \mathcal{S} un certo sistema fisico; esso può in generale essere definito come una porzione di universo isolata, o al più sottoposta all'azione di forze esterne note, sul quale è possibile compiere delle misurazioni (*osservazioni*) di alcune particolari grandezze fisiche dette appunto **osservabili**. L'insieme delle osservazioni di tutte le osservabili (o quanto meno delle *osservabili fondamentali*) caratterizza lo **stato di preparazione** di \mathcal{S} ; lo stato, quindi, può essere visto come la collezione delle distribuzioni di probabilità di ciascuna osservabile. Agli stati ed alle osservabili si associano particolari enti matematici e tale corrispondenza viene stabilita dalla *teoria fisica*: in particolare, in Meccanica Quantistica si assumono alcuni *assiomi fondamentali*, detti di *von Neumann*. Ne presentiamo di seguito tre essenziali.

PRIMO ASSIOMA (DI VON NEUMANN)

In assenza di regole di superselezione, gli stati puri di un sistema fisico \mathcal{S} sono in corrispondenza biunivoca con i raggi di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ complesso e separabile, definito a meno di isomorfismi di spazi hilbertiani.

La corrispondenza tra stati puri di \mathcal{S} ed elementi dello *spazio proiettivo* $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ è una conseguenza del **principio di sovrapposizione lineare**¹ mentre la richiesta di *separabilità* per $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ tiene conto dell'impossibilità pratica di misurare con infinita precisione i valori di osservabili dotate presumibilmente di spettro continuo. Se allora $\xi \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ identifica uno stato di \mathcal{S} , si ha che per ciascuna coppia di vettori rappresentativi $(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) \in \xi$, con $|\psi\rangle \neq |\psi'\rangle$, risulta $|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$, $\theta \in \mathbb{R}$. Il termine $e^{i\theta}$ è detto *fattore di fase*, non è un'osservabile ed infatti non compare mai nei prodotti scalari.

Il principio di sovrapposizione non può però essere applicato incondizionatamente. In certi contesti, infatti, può accadere che ad una sovrapposizione lineare di vettori rappresentativi di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ non sia associato alcuno stato fisico di \mathcal{S} ². Tali restrizioni prendono il nome di **regole di superselezione** e sono dovute al fatto che $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ è più propriamente suddiviso in *settori di superselezione*: all'interno del medesimo settore il principio di sovrapposizione è sempre valido, mentre non lo è necessariamente se si considerano elementi di settori di superselezione distinti.

Si osservi ora che, in quanto proiettivo di uno spazio di Hilbert, $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ assume automaticamente la metrica $\gamma : \mathcal{PH}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{PH}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente: siano $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ e $|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle$ i corrispondenti rappresentativi di norma unitaria; sia inoltre $|\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle|^2 \in [0, 1]$ la cosiddetta *fedeltà*, caratterizzate (in un certo senso) la "somiglianza" tra i due stati. La metrica indotta è dunque

$$\gamma(\xi_1, \xi_2) := \sqrt{1 - |\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle|^2} \quad (1.1)$$

ed è nota come **metrica di Fubini-Study**. Si noti che la coppia $(\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}, \gamma)$ non costituisce uno spazio metrico nel senso usuale del termine in quanto, per definizione, $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ è lo *spazio dei sottospazi unidimensionali* di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Ciononostante, la struttura metrica di $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ riveste un ruolo centrale nel formalismo della Meccanica Quantistica. Per approfondire la questione, introduciamo due ulteriori postulati.

SECONDO ASSIOMA (DI VON NEUMANN)

Le grandezze osservabili di \mathcal{S} sono descritte da operatori lineari autoaggiunti definiti su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, il cui spettro caratterizza l'insieme dei possibili valori ottenuti misurando le osservabili stesse.

¹Laddove applicabile, infatti, il principio di sovrapposizione lineare permette di affermare che la sovrapposizione di stati distinti di \mathcal{S} corrisponde ancora ad uno stato di \mathcal{S} . D'altronde, poiché la sovrapposizione di uno stato con se stesso non può che riprodurre il medesimo stato, i ket $|\psi\rangle$ e $a|\psi\rangle$, $a \in \mathbb{C}$, devono necessariamente identificare il medesimo "stato". Di conseguenza, lo stato di un sistema \mathcal{S} è specificato da un raggio di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, ovvero dal sottospazio unidimensionale di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ associato alla *classe di equivalenza* dei vettori ket $|\psi\rangle$ definiti a meno di un fattore di fase complesso di modulo unitario (inteso supponendo che i vettori della classe di equivalenza abbiano norma unitaria).

²Ciò si verifica, ad esempio, in *Teoria Quantistica dei Campi*, dove si è dimostrato impossibile ottenere delle sovrapposizioni di autostati associati a autovalori distinti dell'osservabile carica elettrica.

TERZO ASSIOMA (DI VON NEUMANN)

Sia $\xi \in \mathcal{PH}_S$ il raggio associato allo stato di preparazione di S e $|\psi\rangle$ un suo vettore rappresentativo. La probabilità che una misura di un'osservabile A su ξ dia come risultato un valore contenuto nel sottoinsieme boreliano \mathfrak{b} della retta reale è data dall'espressione

$$\mathcal{P}_A(\mathfrak{b}|\xi) = \frac{\langle \psi | E_A(\mathfrak{b}) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (1.2)$$

dove $E_A(\mathfrak{b}) := \int_{\mathfrak{b}} dE_A(a)$ è un proiettore appartenente alla famiglia spettrale $\{E_A(\mathfrak{b}) : \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}\}$ di A , nella quale $\mathfrak{B} \equiv \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{R}\}$ identifica l'insieme dei sottoinsiemi \mathfrak{b} di Borel di \mathbb{R} .

Alcuni chiarimenti sul proiettore $E_A(\mathfrak{b})$ sono dovuti. Partiamo dalla sua definizione: l'integrazione sulla misura a valori operatoriali $dE_A(a)$ è intesa nel senso di Riemann–Stieltjes³ ed è così scelta al fine di includere in un unico formalismo entrambe le famiglie spettrali (continua e discreta) dell'osservabile A ⁴. Ciascun elemento di tale famiglia, del resto, soddisfa identicamente le condizioni

$$\begin{aligned} E_A(a')E_A(a) &= E_A(a)E_A(a') = E_A(a), & \forall a \leq a' \quad (\text{ortogonalità}), \\ \lim_{a \rightarrow -\infty} E_A(a) &= 0, & \lim_{a \rightarrow +\infty} E_A(a) = \mathbb{1} \quad (\text{completezza}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

ed identifica un proiettore su un sottospazio di \mathcal{H}_S . La famiglia spettrale associata allo spettro discreto di A emerge in corrispondenza delle discontinuità di $\{E_A(\mathfrak{b}), \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}\}$ poiché, per definizione,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(a + \varepsilon) &= E(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(a - \varepsilon) &= E(a) - P_a, \quad \forall a \in \sigma_d(A), \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove P_a è il proiettore ortogonale sull'autospazio \mathcal{V}_a associato all'autovalore a . A fronte del **teorema spettrale** (e del secondo assioma) la famiglia $\{E_A(\mathfrak{b}), \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}\}$ esiste unica ed è quindi unica la *decomposizione spettrale* di A in termini dei suoi autovalori ed autostati (propri e generalizzati)⁵

$$A = \int_{\mathbb{R}} a dE_A(a) = \sum_{a \in \sigma_d(A)} a P_a + \int_{a \in \sigma_c(A)} a dE_A(a). \quad (1.6)$$

Va osservato che gli autostati generalizzati associati allo spettro continuo di A non appartengono propriamente ad \mathcal{H}_S a causa della richiesta di separabilità; tuttavia, la loro inclusione nella trattazione generale offre, come presto vedremo, indiscutibili vantaggi dal punto di vista delle applicazioni pratiche.

Torniamo al terzo assioma. La relazione (1.2) in esso contenuta permette di definire i concetti di **probabilità di transizione** e di **valor medio** di un'osservabile. La prima segue immediatamente reinterpretando la (1.2) come la probabilità che, a seguito di una misurazione, il sistema si porti dallo stato

³Ricordiamo che se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'integrale di Riemann–Stieltjes di g rispetto alla funzione integratrice $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

$$\int_a^b g(x) d\sigma(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(x_k) [\sigma(x_k) - \sigma(x_{k-1})], \quad (1.3)$$

dove $[x_k - x_{k-1}] \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e la funzione (non-negativa) σ è, essenzialmente, una *misura*. L'integrale (1.3) risulta particolarmente utile nel caso in cui la misura ammette delle discontinuità (se $\sigma(x)$ è ovunque continua, l'integrale si riduce all'usuale integrale nel senso di Riemann). Si consideri, ad esempio, il caso in cui $\sigma(x) = h\theta(x - c)$ ($\theta(x)$ è la funzione di Heaviside); è evidente che l'unico contributo all'integrale (1.3) è dato da quel termine per cui $x_{k-1} < c$ ed $x_k > c$, e dunque il valore dell'integrale è $hg(c)$.

⁴Si ricordi che per la classe degli operatori autoaggiunti su spazi di Hilbert lo spettro residuale è nullo.

⁵Si ricorda che gli autostati generalizzati di A soddisfano l'equazione agli autovalori generalizzata $A|a\rangle = a|a\rangle$ e le condizioni di completezza ed ortogonalità generalizzate $\int_{a \in \sigma_c(A)} |a\rangle\langle a| da = \mathbb{1}$ ed $\langle a|a'\rangle = \delta(a - a')$, $\forall a, a' \in \sigma_c(A)$.

di preparazione ξ all'autospazio dell'osservabile A corrispondente all'autovalore misurato. Se dunque $\xi' \in \mathcal{PH}_S$ è un generico stato di \mathcal{S} e $P_{\xi'} := |\psi'\rangle\langle\psi'|$ è il proiettore ortogonale ad esso associato⁶

$$\mathcal{P}(\xi \rightarrow \xi') = \frac{\langle\psi|P_{\xi'}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\langle\psi'|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi'|\psi'\rangle}, \quad (1.7)$$

Si noti il legame esistente tra le relazioni (1.7) ed (1.1). Per quanto riguarda, invece, la definizione di valor medio di un'osservabile, basterà notare che la probabilità $\mathcal{P}_A(\mathbf{b}|\xi)$ di osservare un valore di A compreso in \mathbf{b} coincide con la definizione formale del valor medio sullo stato ξ della funzione caratteristica $E_A(\mathbf{b})$ corrispondente, ovvero $\mathcal{P}_A(\mathbf{b}|\xi) \equiv \langle E_A(\mathbf{b}) \rangle_\xi$. Dal terzo assioma, pertanto, segue che

$$\langle E_A(\mathbf{b}) \rangle_\xi = \frac{\langle\psi|E_A(\mathbf{b})|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle},$$

dalla quale, tenendo presente la decomposizione spettrale (1.6) dell'osservabile A , si ricava la rappresentazione quantomeccanica del valor medio di A sullo stato di preparazione ξ di \mathcal{S}

$$\langle A \rangle_\xi = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}. \quad (1.8)$$

La validità della relazione (1.8) per ogni osservabile di \mathcal{S} è una richiesta formalmente equivalente all'affermazione del terzo assioma; non è raro, infatti, trovare in letteratura l'una al posto dell'altra.

Il breve quadro presentato mette in risalto il ruolo che la struttura metrica di \mathcal{PH}_S ha in Meccanica Quantistica: tutto il contenuto fisico può essere teoricamente previsto analizzando la distanza tra i raggi dello spazio proiettivo di uno spazio di Hilbert separabile.

2 IL FORMALISMO DELL'OPERATORE DENSITÀ

Con i tre assiomi introdotti è possibile costruire una teoria fisica utile a descrivere una piccola porzione dei fenomeni fisici che intervengono in Meccanica Quantistica. La limitazione è dovuta al primo assioma ed al fatto che gli stati puri, oltre a non essere caratteristici dell'intera classe dei *sistemi complessi*, sono nella pratica difficilmente realizzabili. In molti casi, infatti, l'informazione ottenuta dallo stato di preparazione di \mathcal{S} non è massimale e più stati puri sono compatibili (con una certa misura di probabilità) con i risultati ottenuti da una combinazione di esperimenti. In tal caso è indispensabile far ricorso ad una descrizione statistica del sistema, parlando non più di stati puri bensì di *miscela statistiche* ed è dunque necessario introdurre per esse un'opportuna rappresentazione. A tal fine un indizio è fornito dal primo assioma: gli stati puri di \mathcal{S} sono in corrispondenza biunivoca con i raggi $\xi \in \mathcal{PH}_S$, ciascuno dei quali identifica, a sua volta, una specifica proiezione ortogonale monodimensionale su \mathcal{H}_S . In altri termini, ad ogni stato puro di \mathcal{S} è associato il proiettore

$$\rho_\xi := |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \xi \in \mathcal{PH}_S, \quad (2.1)$$

dove $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$ è il vettore rappresentativo del raggio ξ . La riformulazione del primo assioma in termini del proiettore (2.1) induce un'analoga riformulazione del terzo assioma. Difatti, scelta una base ortonormale $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ di \mathcal{H}_S ed una sua osservabile X , è immediato verificare che se $|\psi\rangle \in \mathcal{D}(X)$ (ovvero se appartiene al dominio di definizione di X), allora

$$\text{Tr}(\rho_\xi X) = \sum_n (\rho_\xi X)_{nn} = \langle\psi|X|\psi\rangle, \quad (2.2)$$

⁶ $P_\xi = |\psi\rangle\langle\psi|$ è a tutti gli effetti un operatore di proiezione ortogonale; esso è, infatti, un operatore lineare su \mathcal{H}_S , autoaggiunto e soddisfa identicamente l'equazione algebrica $P_\xi^2 = P_\xi$, da cui $\sigma(P_\xi) = \{0, 1\}$.

dove Tr indica l'operazione di *traccia*⁷ ed $(\rho_\xi X)_{nn} = \langle n | \rho_\xi X | n \rangle$ è l'elemento di matrice (n, n) di $\rho_\xi X$. Si noti che tutti gli operatori del tipo (2.1) (ed in generale tutti i proiettori finito dimensionali) sono di classe traccia. Confrontando quindi le relazioni (1.2), (1.8) ed (2.2) se ne deduce che il terzo postulato può essere equivalentemente enunciato in termini dell'espressione

$$\mathcal{P}_A(\mathbf{b}|\xi) = \langle E_a(\mathbf{b}) \rangle_\xi = \text{Tr}(\rho_\xi E_a(\mathbf{b})); \quad (2.3)$$

in particolare, la probabilità di transizione (1.7) si scrive ora $\mathcal{P}(\xi_1 \rightarrow \xi_2) = \langle \rho_{\xi_2} \rangle_{\xi_1} = \text{Tr}(\rho_{\xi_1} \rho_{\xi_2})$.

Veniamo ora agli stati miscela. Si è già accennato al fatto che in tal caso più stati puri sono compatibili con lo stato di preparazione di \mathcal{S} ; ad esempio, si supponga che, in base all'informazione raccolta, il sistema si trovi con probabilità ω_1 nello stato puro ξ_1 , con probabilità ω_2 nello stato ξ_2 e così via per una quantità al più numerabile di stati. Si può allora pensare di associare alle miscele statistiche un operatore, detto **operatore densità**⁸, descritto dalla *combinazione lineare convessa*

$$\rho := \sum_i \omega_i \rho^{(i)}, \quad 0 \leq \omega_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_i \omega_i = 1. \quad (2.4)$$

I proiettori $\rho^{(i)}$ si riferiscono a vettori di stato linearmente indipendenti, normalizzati ad uno e non necessariamente ortogonali. Inoltre, va osservato che la combinazione (2.4) è fatta al livello dei *raggi* di \mathcal{H}_S e *non* dei *vettori di stato*, come accade applicando incondizionatamente il principio di sovrapposizione lineare. In questo caso il generico vettore $\mathcal{H}_S \ni |\psi'\rangle = \sum_i c_i |\psi^{(i)}\rangle$ ottenuto sovrapponendo stati puri di \mathcal{S} è ancora uno stato puro di \mathcal{S} ed è dunque associato al proiettore

$$\rho' = |\psi'\rangle\langle\psi'| = \sum_{i,j} c_j^* c_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(j)}| = \sum_i |c_i|^2 \rho^{(i)} + \sum_{j \neq i} c_j^* c_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(j)}|. \quad (2.5)$$

La presenza delle fasi relative (completamente assenti nella (2.4)) rende possibile l'osservazione di fenomeni d'interferenza, segnalando la coerenza quantistica dello stato puro ρ' . Per questo motivo si usa definire **coerenti** le sovrapposizioni al livello dei vettori di stato ed **incoerenti** le sovrapposizioni al livello dei raggi. Ad ogni modo, sia che il sistema si trovi in uno stato puro che in in uno stato miscela, il terzo assioma resta invariato e così la (2.3); in particolare, per un'osservabile A di \mathcal{S} si avrà che

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \sum_i \omega_i \text{Tr}(\rho^{(i)} A) = \sum_i \omega_i \langle A \rangle_{\xi_i}. \quad (2.6)$$

Per come definito, l'operatore densità gode delle seguenti proprietà fondamentali

$$\rho^\dagger = \rho, \quad \rho \geq 0, \quad \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.7)$$

La prima proprietà segue dal fatto che ρ è ottenuto come combinazione lineare a coefficienti reali di operatori autoaggiunti; d'altronde ρ è limitato, in quanto $\|\rho|\psi\rangle\|^2 = \sum_{m,n} \omega_m \omega_n \langle \psi | \psi^{(m)} \rangle \langle \psi^{(m)} | \psi^{(n)} \rangle \langle \psi^{(n)} | \psi \rangle \leq \sum_{n,m} \omega_m \omega_n \|\psi\rangle\|^2 = \|\psi\rangle\|^2$ e dunque rigorosamente autoaggiunto. Per la non-negatività, invece, basta osservare che $\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_n \omega_n |\langle \psi^{(n)} | \psi \rangle|^2 \geq 0$, $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$ (essendo somma di termini non-negativi). La proprietà di normalizzazione, infine, segue dalla relazione (2.6) scegliendo l'osservabile banale $A = \mathbf{1}$.

Essendo limitato ed autoaggiunto, l'operatore densità può essere decomposto spettralmente

$$\rho = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \sum_n \rho_n \rho^{(n)}, \quad 0 \leq \rho_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_n \rho_n = 1, \quad (2.8)$$

⁷Si ricorda che se $\text{Tr}(X) = \sum_n X_{nn}$ esiste finito, allora X si dice di **classe traccia** e $\text{Tr}(X)$ non dipende dalla scelta della base ortonormale usata. In particolare, se X ed Y sono due generici operatori tali che sia XY che YX sono di classe traccia, allora $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$, ovvero solo sotto tali condizioni si ha che $\text{Tr}([X, Y]) = 0$. In particolare, tutti gli operatori finito dimensionali sono di classe traccia. L'operazione di traccia è *lineare* $\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B)$ e *ciclica* $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$.

⁸Altrimenti noto come *operatore statistico*, *matrice densità* o *matrice statistica* (sebbene gli ultimi due termini facciano più propriamente riferimento alla rappresentazione associata).

dove⁹ $\{|\phi_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ è la base ortonormale degli autovettori di ρ tali che $\rho|\phi_n\rangle = \rho_n|\phi_n\rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$ mentre le proprietà degli autovalori ρ_n discendono direttamente dalle proprietà (2.7). A causa della mutua ortogonalità dei proiettori e del fatto che $\rho_n \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, appare evidente che

$$\rho^2 = \sum_n \rho_n^2 \rho^{(n)} \leq \sum_n \rho_n \rho^{(n)} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \rho^2 \leq \rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho_n^2 \leq \rho_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad (2.9)$$

le precedenti disuguaglianze saturano se e solo se ρ descrive uno stato puro¹⁰. Ciò identifica un criterio utile per stabilire se l'operatore densità ρ rappresenta uno stato puro oppure una miscela statistica. Un criterio equivalente si ottiene riscrivendo le relazioni (2.9) in termini della traccia

$$\text{Tr}\rho^2 \leq \text{Tr}\rho = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tr}\rho^2 \leq 1; \quad (2.10)$$

anche qui la disuguaglianza è saturata se e solo se ρ è puro¹¹. Vale, in generale, il seguente

LEMMA I - Siano $\rho^{(i)}$ e $\rho^{(j)}$ due generici operatori densità, allora

$$0 \leq \text{Tr}(\rho^{(i)}\rho^{(j)}) \leq 1. \quad (2.11)$$

Proof. Entrambi gli operatori densità ammettono la propria decomposizione spettrale, pertanto

$$\text{Tr}(\rho^{(i)}\rho^{(j)}) = \sum_{n,m} \rho_n^{(i)}\rho_m^{(j)} \text{Tr}(|\phi_n^{(i)}\rangle\langle\phi_n^{(i)}|\phi_m^{(j)}\rangle\langle\phi_m^{(j)}|) = \sum_{n,m} \rho_n^{(i)}\rho_m^{(j)} |\langle\phi_n^{(i)}|\phi_m^{(j)}\rangle|^2 \leq \sum_{n,m} \rho_n^{(i)}\rho_m^{(j)} = 1,$$

avendo tenuto conto della linearità della traccia e delle disuguaglianze di Schwartz. Basta quindi osservare che $\sum_{n,m} \rho_n^{(i)}\rho_m^{(j)} |\langle\phi_n^{(i)}|\phi_m^{(j)}\rangle|^2 \geq 0$, essendo somma di termini non-negativi. \square

Si noti che la (2.11) satura nel limite superiore se e solo se $\rho^{(i)} = \rho^{(j)}$ è un operatore di stato puro. Un ultimo criterio per la classificazione degli stati puri è dato dal seguente

TEOREMA (DEGLI STATI PURI) - *Uno stato puro non può essere mai espresso come combinazione lineare convessa non-banale di stati puri, diversamente da una miscela statistica per il quale ciò è sempre vero.*

Proof. La seconda parte del teorema segue banalmente dalla decomposizione spettrale (2.8); la prima parte, invece, si può dimostrare per assurdo. Sia dunque ρ lo stato puro ottenuto rappresentato dalla combinazione lineare convessa di stati puri distinti

$$\rho = \sum_i \omega_i \rho^{(i)}, \quad 0 \leq \omega_i \leq 1, \quad \sum_i \omega_i = 1,$$

dalla quale si ottiene l'espressione per ρ^2 , la cui traccia verifica la disuguaglianza (si applica il lemma I)

$$\text{Tr}\rho^2 = \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \text{Tr}(\rho^{(i)}\rho^{(j)}) \leq \sum_{i,j} \omega_i \omega_j = 1.$$

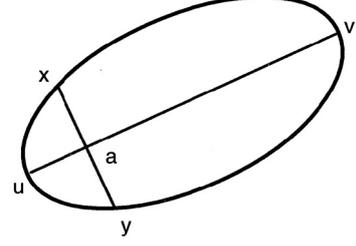
Il confronto con la condizione (2.10) per stati puri, prova l'assurdo e completa la dimostrazione. \square

⁹Si noti che la decomposizione spettrale (2.8) è una combinazione lineare convessa di proiettori ortogonali (diversamente quanto accadeva nella (2.5), dove la richiesta di ortogonalità non era necessaria).

¹⁰Se infatti ρ descrive uno stato puro, allora $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ e quindi $\rho^2 = \rho$, essendo $|\phi\rangle$ normalizzata ad uno per ipotesi. Viceversa, se $\rho^2 = \rho$, deve essere $\rho_n^2 = \rho_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; per via della condizione di normalizzazione $\exists \bar{n}$ tale che $\rho_{\bar{n}} = 1$ e $\rho_m = 0$, $\forall m \neq \bar{n}$, $m \in \mathbb{N}$, ovvero $\rho = |\phi_{\bar{n}}\rangle\langle\phi_{\bar{n}}|$ e quindi ρ descrive uno stato puro.

¹¹L'implicazione ($\rho \rightarrow$ puro) \Rightarrow ($\text{Tr}\rho^2 = 1$) è banale; se invece $\text{Tr}\rho^2 = 1$ allora $1 = \sum_n \rho_n^2 \leq \sum_n \rho_n = \text{Tr}\rho$, ma per le proprietà (2.7) ρ ha sempre traccia unitaria per cui $\rho_n^2 = \rho_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ necessariamente, ovvero ρ è puro.

A conclusione del paragrafo, mostriamo che, in generale, la *decomposizione convessa* di un operatore densità *non è unica*. Come controesempio, si consideri l'operatore densità $\rho_a \equiv a|u\rangle\langle u| + (1-a)|v\rangle\langle v|$, dove $0 \leq a \leq 1$ ed $|u\rangle$ e $|v\rangle$ sono vettori ortonormali; si definiscono i due nuovi vettori $|x\rangle \equiv \sqrt{a}|u\rangle + \sqrt{1-a}|v\rangle$, $|y\rangle \equiv \sqrt{a}|u\rangle - \sqrt{1-a}|v\rangle$: è immediato provare che $\rho_a = \frac{1}{2}|x\rangle\langle x| + \frac{1}{2}|y\rangle\langle y|$. In realtà, esistono infinite possibili decomposizioni convesse per un generico operatore densità associato a stati miscela.



L'insieme convesso degli stati puri e degli stati miscela di un sistema quantistico è schematicamente illustrato in figura a destra: gli stati puri sono rappresentati dai punti appartenenti al bordo della superficie, mentre l'insieme dei punti interni identifica gli stati miscela. L'operatore densità ρ_a presentato nel precedente esempio può essere matematicamente rappresentato come una combinazione degli stati puri u e v , oppure come una combinazione di x ed y , od in altri infiniti modi.

OSSERVAZIONE I – L'operatore densità ha estese applicazioni in meccanica statistica quantistica, alla cui base esiste la seguente ipotesi: sia H l'hamiltoniano di un sistema macroscopico in stato di equilibrio alla temperatura T e siano E_n gli autovalori associati a ciascun autoket $|E_n\rangle$. La probabilità che il sistema si trovi in uno stato $|E_n\rangle$ è data dalla distribuzione di Boltzmann–Gibbs

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}; \quad (2.12)$$

Z prende il nome di *funzione di partizione*, mentre $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ è la *costante di Boltzmann*. A partire dalla (2.12) è possibile definire l'operatore densità

$$\rho = \sum_n p_n |E_n\rangle\langle E_n| = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \quad (2.13)$$

il quale è estremamente utile nel calcolo delle grandezze termodinamiche caratterizzanti lo stato macroscopico del sistema. L'entropia di Boltzmann–Gibbs, ad esempio, è definita dall'espressione

$$S_{BG} = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho) = -k_B \sum_n p_n \ln p_n, \quad (2.14)$$

a partire dalla quale si ottiene la relazione descrivente l'energia libera di Hellmoltz

$$F = E - TS = \text{Tr}(\rho H) + \frac{1}{\beta} \text{Tr} \left(\rho \ln \frac{e^{-\beta H}}{Z} \right) = -\frac{1}{\beta} \ln (Z \text{Tr} \rho) = -k_B T \ln Z. \quad (2.15)$$

In particolare, per un oscillatore armonico di frequenza ω alla temperatura T si trova che

$$\rho_{osc} = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} (n + \frac{1}{2})} |n\rangle\langle n|, \quad Z_{osc} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}},$$

$$\langle H_{osc} \rangle = \text{Tr}(\rho_{osc} H_{osc}) = \frac{\hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{Z} \sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}.$$

Si noti che, nell'espressione per $\langle H_{osc} \rangle$ è contenuta una tipica proprietà della Meccanica Quantistica: anche allo zero assoluto esiste un contributo non nullo in energia, la ben nota *energia di punto zero*.

3 SISTEMI COMPOSTI E PROPRIETÀ DI CORRELAZIONE

3.1 Rappresentazione di stati ed osservabili di sistemi composti. Avendo determinato la rappresentazione matematica per gli operatori e gli stati di un sistema fisico è utile estendere la trattazione al caso di sistemi composti. Siano quindi $\mathcal{S}^{(1)}$ ed $\mathcal{S}^{(2)}$ due sistemi fisici non interagenti e siano rispettivamente $A^{(1)}$ e $B^{(2)}$ due loro osservabili (evidentemente compatibili, ovvero $[A^{(1)}, B^{(2)}] = 0$, in senso operatoriale). Si scelga quindi in $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ l'autoket $|a_n\rangle^{(1)}$ di $A^{(1)}$ corrispondente all'autovalore a_n ed in $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$ l'autoket $|b_m\rangle^{(2)}$ di $B^{(2)}$ corrispondente a b_m . Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ associato al sistema composto \mathcal{S} dovrà esistere un autostato del tipo $|a_n, b_m\rangle$ tale che

$$A^{(1)}|a_n, b_m\rangle = a_n|a_n, b_m\rangle, \quad B^{(2)}|a_n, b_m\rangle = b_m|a_n, b_m\rangle.$$

Le precedenti risultano soddisfatte se e solo se gli autovettori $|a_n, b_m\rangle$ sono fattorizzati nella forma

$$|a_n, b_m\rangle = |a_n\rangle^{(1)} \otimes |b_m\rangle^{(2)} \equiv |a_n\rangle^{(1)} |b_m\rangle^{(2)}; \quad (3.1)$$

Il prodotto (3.1) prende il nome di *prodotto di Kronecker*. Esso è definito di modo che il prodotto di un vettore M -dimensionale ed un vettore N -dimensionale è un vettore (MN) -dimensionale (M, N finiti); inoltre, se $\{|a_n\rangle^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{|b_m\rangle^{(2)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ sono degli insiemi ortonormali di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ ed $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$ rispettivamente, allora l'insieme ortonormale $\{|a_n, b_m\rangle\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale del **prodotto tensoriale** $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$. Si noti che, a meno di eventuali regole di superselezione, un generico vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ si scriverà nella forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n, m} c_{n, m} |a_n\rangle^{(1)} |b_m\rangle^{(2)}; \quad (3.2)$$

in particolare, lo stato $|\psi\rangle$ si dirà **fattorizzato** se $c_{n, m} = c_n c_m, \forall m, n \in \mathbb{N}$, ovvero se

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle^{(1)} \otimes \sum_m c_m |b_m\rangle^{(2)},$$

mentre si dirà **entangled** nel caso in cui, in generale, $c_{n, m} \neq c_n c_m, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Sia ora $\{A_i^{(1)}\}_i$ un insieme di operatori di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ e $\{B_j^{(2)}\}_j$ un insieme di operatori di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$. Un operatore del primo insieme agisce solo sul primo fattore della (3.1), viceversa un operatore del secondo insieme agisce solo sul secondo fattore della (3.1):

$$A_i^{(1)}|a_n, b_m\rangle = \left(A_i^{(1)}|a_n\rangle^{(1)}\right) |b_m\rangle^{(2)}, \quad B_j^{(2)}|a_n, b_m\rangle = |a_n\rangle^{(1)} \left(B_j^{(2)}|b_m\rangle^{(2)}\right).$$

Si può quindi definire il prodotto di Kronecker tra operatori per mezzo della relazione

$$\left(A_i^{(1)} \otimes B_j^{(2)}\right) |a_n, b_m\rangle = \left(A_i^{(1)}|a_n\rangle^{(1)}\right) \otimes \left(B_j^{(2)}|b_m\rangle^{(2)}\right). \quad (3.3)$$

Nella precedente notazione ciascun operatore solo di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ è indicato come $A_i^{(1)} \equiv A_i \otimes \mathbb{1}^{(2)}$ e ciascun operatore solo di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$ come $B_j^{(2)} \equiv \mathbb{1}^{(1)} \otimes B_j$. Ciò rende evidente l'azione di ciascun operatore su ogni componente dello spazio composto.

Avendo introdotto il concetto di sistemi composti, possiamo far vedere che la descrizione per mezzo degli stati miscela presentata nel precedente paragrafo emerge naturalmente quando si tiene conto, oltre che del sistema fisico, anche del resto dell'universo. Si supponga, allora, che il sistema \mathcal{S}' sia in interazione con un altro sistema \mathcal{S}'' associato al resto dell'universo. Si è detto che lo spazio di Hilbert appropriato alla descrizione del sistema composto è dato dal prodotto tensoriale $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}'} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}''}$; possiamo anche supporre che \mathcal{S} sia preparato in uno stato puro $|\Psi\rangle\langle\Psi|$, seppur non noto nella sua interezza. Del resto, scelte due basi ortonormali $\{|\psi'_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}'}$ e $\{|\psi''_m\rangle\}_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}''}$, il vettore $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ potrà essere scritto nella forma (3.2). Calcolando il valor medio di una'arbitraria osservabile A di \mathcal{S}' su $|\Psi\rangle$, si ottiene che

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \sum_{n, m, \tilde{n}, \tilde{m}} c_{\tilde{n}, \tilde{m}}^* c_{n, m} \langle \psi''_{\tilde{m}} | \langle \psi'_{\tilde{n}} | A | \psi'_{\tilde{n}} \rangle | \psi''_m \rangle = \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}, n, m} c_{\tilde{n}, \tilde{m}}^* c_{n, m} \langle \psi'_{\tilde{n}} | A | \psi'_{\tilde{n}} \rangle \langle \psi''_{\tilde{m}} | \psi''_m \rangle \\ &= \sum_{n, \tilde{n}} \langle \psi'_{\tilde{n}} | A | \psi'_{\tilde{n}} \rangle \sum_m c_{\tilde{n}, m}^* c_{n, m} = \sum_{\tilde{n}, n} A_{\tilde{n}, n} \rho_{\tilde{n}, n} \equiv \text{Tr}_{\mathcal{S}''}(\rho A), \end{aligned}$$

avendo considerato il fatto che A agisce come l'identità su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}'}$ ed avendo posto

$$\rho \equiv \sum_{\tilde{n}, n} \rho_{\tilde{n}, n} |\psi'_{\tilde{n}}\rangle \langle \psi'_n|, \quad \rho_{\tilde{n}, n} \equiv \sum_m c_{\tilde{n}, m}^* c_{n, m}. \quad (3.4)$$

Si noti che $\text{Tr}_{\mathcal{S}'}(\cdot) := \sum_{\tilde{m}} \langle \psi''_{\tilde{m}} | (\cdot) | \psi''_{\tilde{m}} \rangle$ indica l'operazione di **traccia parziale** estesa alla base di autostati $\{|\psi''_{\tilde{m}}\rangle\}_{\tilde{m} \in \mathbb{N}}$ di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}'}$ mentre $\rho_{\tilde{n}, n}$ è l'elemento (\tilde{n}, n) della matrice rappresentativa di ρ nella base $\{|\psi'_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$. Per come definito, l'operatore ρ soddisfa (per costruzione) le proprietà (2.7), ovvero è a tutti gli effetti un operatore densità (vedi §3.2). Pertanto, finché siamo interessati soltanto alle osservabili di \mathcal{S}' , lo stato puro $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ del sistema composto è equivalente alla miscela statistica ρ per \mathcal{S}' ; questo fatto è dovuto alla nostra ignoranza, completa e dichiarata, riguardo la "componente di universo" \mathcal{S}'' , sul cui spazio di Hilbert è dunque necessario prendere la traccia.

Resta infine da chiarire il ruolo degli elementi di matrice dell'operatore densità. Sia quindi $\{|\psi_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base di autostati di \mathcal{H} e ρ l'operatore densità della forma (2.4) associato allo stato del sistema: il generico elemento di matrice $\rho_{\tilde{n}, n}$ sarà allora

$$\rho_{\tilde{n}, n} = \sum_i \omega_i \langle \psi_{\tilde{n}} | \rho^{(i)} | \psi_n \rangle = \sum_i \omega_i \langle \psi_{\tilde{n}} | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi_n | \psi^{(i)} \rangle^*. \quad (3.5)$$

Gli elementi diagonali $\rho_{n, n} = \sum_i \omega_i |\langle \psi_n | \psi^{(i)} \rangle|^2$ prendono il nome di **popolazioni** e sono numeri reali non-negativi; essi forniscono le *probabilità medie*¹² di trovare il sistema in ciascuno degli stati $|\psi_n\rangle$. Gli elementi fuori diagonale, invece, sono (in generale) somme di numeri complessi e prendono il nome di **coerenze residue**; essi contengono le informazioni relative agli *effetti d'interferenza* tra gli stati $|\psi_{\tilde{n}}\rangle$ e $|\psi_n\rangle$ che potrebbero verificarsi qualora $|\psi^{(i)}\rangle$ fosse una sovrapposizione coerente di $|\psi_{\tilde{n}}\rangle, |\psi_n\rangle$.

3.2 Operatori densità parziali e classificazione degli stati. In questo paragrafo si vuole studiare la dipendenza delle proprietà dello stato del sistema composto dalle proprietà degli stati delle singoli componenti. Come nel precedente paragrafo, consideriamo per semplicità il caso di due componenti $\mathcal{S}^{(1)}$ ed $\mathcal{S}^{(2)}$, rappresentate rispettivamente da $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ ed $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$. Siano quindi $\{|a_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ e $\{|b_m\rangle\}_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(2)}}$ due basi nei rispettivi spazi hilbertiani ed $\{|a_n, b_m\rangle\}_{n, m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ la base del loro prodotto tensoriale. Il valor medio di un'arbitraria osservabile A di \mathcal{S} su uno stato del sistema composto è data dall'espressione

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \sum_{n, m} \langle a_n, b_m | (\rho A) | a_n, b_m \rangle = \sum_{n, m, n', m'} \langle a_n, b_m | \rho | a_{n'}, b_{m'} \rangle \langle a_{n'}, b_{m'} | A | a_n, b_m \rangle, \quad (3.6)$$

dove ρ è l'operatore densità associato allo stato di preparazione di \mathcal{S} . Si già visto che se A è un osservabile solo di $\mathcal{S}^{(1)}$, allora l'operatore associato $A^{(1)}$ agirà non banalmente solo sulla prima componente, sicché

$$\langle A^{(1)} \rangle = \sum_n \langle a_n | \left(\sum_m \langle b_m | \rho | b_m \rangle \right) \sum_{n'} |a_{n'}\rangle \langle a_{n'} | A^{(1)} | a_n \rangle = \text{Tr}^{(1)} \left(\rho_{\mathcal{S}^{(1)}} A^{(1)} \right), \quad (3.7)$$

avendo indicato, per semplicità di notazione, $\text{Tr}^{(1)} \equiv \text{Tr}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ la traccia parziale presa su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$; l'operatore $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}$ prende il nome di **operatore densità parziale** su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}}$ ed è definito come

$$\rho_{\mathcal{S}^{(1)}} := \text{Tr}^{(2)} \rho, \quad \langle a_n | \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} | a_{n'} \rangle := \sum_m \langle a_n, b_m | \rho | a_{n'}, b_m \rangle. \quad (3.8)$$

¹²Per come definiti, ciascun $\rho_{n, n}$ corrisponde alla media pesata sulle relative probabilità ω_i delle fedeltà associate a tutte le possibili transizioni $\xi_{\psi^{(i)}} \rightarrow \xi_{\psi_n}$.

L'operatore $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}$ è a tutti gli effetti un operatore densità per via delle proprietà di ρ , ovvero

$$\begin{aligned} \text{normalizzazione} \quad & \text{Tr}^{(1)} \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} = \sum_n \langle a_n | \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} | a_n \rangle = \sum_{n,m} \langle a_n, b_m | \rho | a_n, b_m \rangle = \text{Tr} \rho = 1, \\ \text{autoaggiuntezza} \quad & \rho_{\mathcal{S}^{(1)}}^\dagger = \sum_m \langle b_m | \rho^\dagger | b_m \rangle = \rho_{\mathcal{S}^{(1)}}, \\ \text{non negatività} \quad & \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}^{(1)}} \Rightarrow \langle \psi | \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} | \psi \rangle = \sum_l \rho_l^{(1)} |\langle \psi | \phi_l^{(1)} \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Gli operatori $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}$ e $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}}$ permettono di calcolare il valor medio (su uno stato del sistema composto) di osservabili relative ad $\mathcal{S}^{(1)}$ oppure ad $\mathcal{S}^{(2)}$; in generale, però, essi *non sono sufficienti* per dedurre le proprietà dello stato del sistema composto a partire dalle proprietà degli stati dei sottosistemi in quanto non contengono alcuna informazione sulla *correlazione* tra gli stati di $\mathcal{S}^{(1)}$ ed $\mathcal{S}^{(2)}$. L'unico caso in cui gli operatori densità parziali sono sufficienti si ha se lo stato di \mathcal{S} è **non correlato**: difatti, se per ogni osservabile $A^{(1)} \in \mathcal{S}^{(1)}$ ed $A^{(2)} \in \mathcal{S}^{(2)}$ vale la relazione

$$\langle A^{(1)} A^{(2)} \rangle_\rho = \langle A^{(1)} \rangle_{\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}} \langle A^{(2)} \rangle_{\rho_{\mathcal{S}^{(2)}}} \implies \rho = \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} \otimes \rho_{\mathcal{S}^{(2)}}, \quad (3.9)$$

e viceversa. Le condizioni (3.9) rappresentano due criteri equivalenti per stabilire le proprietà di correlazione degli stati di \mathcal{S} . Un esempio in cui le precedenti condizioni non sono soddisfatte è il seguente: sia $S = 0$ lo stato di singoletto, allora $\rho_0 \equiv |0, 0\rangle\langle 0, 0| = \frac{1}{2}(|\uparrow, \downarrow\rangle\langle \downarrow, \uparrow| - |\downarrow, \uparrow\rangle\langle \uparrow, \downarrow| + |\uparrow, \downarrow\rangle\langle \uparrow, \downarrow| + |\downarrow, \uparrow\rangle\langle \downarrow, \uparrow|)$ e $\rho_{0^{(1)}} = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle \uparrow| + |\downarrow\rangle\langle \downarrow|) = \rho_{0^{(2)}}$. Di conseguenza

$$\langle S_3^{(1)} \rangle_{\rho_0^{(1)}} = 0 = \langle S_3^{(2)} \rangle_{\rho_0^{(2)}}, \quad \langle S_3^{(1)} S_3^{(2)} \rangle_{\rho_0} = -\frac{\hbar^2}{4},$$

il che esprime la presenza di correlazione nello stato di singoletto.

L'introduzione della proprietà di correlazione, in aggiunta alle proprietà di purezza e mescolamento, rende possibile l'esistenza di diverse combinazioni, riassunte nelle due tabelle di seguito.

Tabella 1

Stati parziali $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}$ e $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}}$	Stato totale ρ	
	puro	miscela
entrambi puri	si	no
uno puro, uno miscela	no	si
entrambi miscela	si	si

Tabella 2

$\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}, \rho_{\mathcal{S}^{(2)}}; \rho$	Correlati	Non correlati
puro, puro; puro	no	si
puro, miscela; miscela	no	si
miscela, miscela; puro	si	no
miscela, miscela; miscela	si	si

Si vuole dimostrare la classificazione riportata in Tabella 2; cominciamo dai casi "si" (possibili).

- $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}$ e $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}}$ entrambi puri; ρ puro e non correlato.

Siano $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}} = |\psi\rangle\langle \psi|$, $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}} = |\phi\rangle\langle \phi|$ e $\rho = \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} \otimes \rho_{\mathcal{S}^{(2)}} = |\psi, \phi\rangle\langle \phi, \psi|$, dunque ρ è puro¹³.

- $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}}$ puro e $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}}$ miscela; ρ miscela e correlato.

Siano $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}} = |\psi\rangle\langle \psi|$, $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}} = \sum_i \omega_i \rho^{(i)}$ e $\rho = \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} \otimes \rho_{\mathcal{S}^{(2)}} = \sum_i \omega_i |\psi, \phi_i\rangle\langle \phi_i, \psi|$, dunque ρ è uno stato miscela. Una dimostrazione alternativa è la seguente: siano $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}} = |\psi\rangle\langle \psi|$, $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}} = \sum_i \omega_i \rho^{(i)}$ e $\rho = \rho_{\mathcal{S}^{(1)}} \otimes \rho_{\mathcal{S}^{(2)}}$. Per via del criterio (2.10), sappiamo che $\text{Tr}^{(1)}[(\rho_{\mathcal{S}^{(1)}})^2] = 1$, mentre

¹³Analogamente, siano $\rho_{\mathcal{S}^{(1)}} = |\psi\rangle\langle \psi|$, $\rho_{\mathcal{S}^{(2)}} = |\phi\rangle\langle \phi|$ e $\rho = |\Psi\rangle\langle \Psi|$; allora $|\Psi\rangle \equiv |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, dunque ρ non correlato.

$\text{Tr}^{(2)}[(\rho_{S^{(2)}})^2] < 1$. Adoperando le proprietà del *prodotto di Kronecker*¹⁴ $(\sigma \otimes \tau)^2 = \sigma^2 \otimes \tau^2$ e $\text{Tr}(\sigma \otimes \tau) = \text{Tr}^{(1)}\sigma \text{Tr}^{(2)}\tau$, si trova che ρ è uno stato miscela, infatti:

$$\text{Tr}\rho^2 = \text{Tr}(\rho_{S^{(1)}}^2 \otimes \rho_{S^{(2)}}^2) = \text{Tr}^{(1)}\rho_{S^{(1)}}^2 \text{Tr}^{(2)}\rho_{S^{(2)}}^2 < 1. \quad (3.10)$$

- $\rho_{S^{(1)}}$ e $\rho_{S^{(2)}}$ entrambi miscele; ρ puro e correlato.

Abbiamo già incontrato un esempio a riguardo: lo stato di singoletto. Richiamando le espressioni ottenute per ρ_0 , $\rho_{0^{(1)}}$ e $\rho_{0^{(2)}}$ è evidente che lo stato correlato di singoletto è uno stato puro, mentre gli stati parziali sono stati miscela (essendo combinazione convessa di stati puri).

- $\rho_{S^{(1)}}$ e $\rho_{S^{(2)}}$ entrambi miscele; ρ miscela e non correlato.

Siano $\rho_{S^{(1)}} = \sum_i \omega_i \rho_{S^{(1)}}^{(i)}$, $\rho_{S^{(2)}} = \sum_j \omega_j \rho_{S^{(2)}}^{(j)}$ e $\rho = \rho_{S^{(1)}} \otimes \rho_{S^{(2)}} = \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \rho_{S^{(1)}}^{(i)} \otimes \rho_{S^{(2)}}^{(j)} = \sum_{i,j} \omega_i \omega_j |\psi_{S^{(1)}}^{(i)}, \psi_{S^{(2)}}^{(j)}\rangle \langle \psi_{S^{(2)}}^{(j)}, \psi_{S^{(1)}}^{(i)}|$, dunque ρ è uno stato miscela. Una dimostrazione alternativa si ottiene adoperando la relazione (3.10), grazie alla quale è immediato verificare che $\text{Tr}\rho^2 < 1$.

- $\rho_{S^{(1)}}$ e $\rho_{S^{(2)}}$ entrambi miscele; ρ miscela e correlato.

Si scelga come esempio lo stato miscela $\rho = \frac{1}{2}(|\uparrow, \uparrow\rangle \langle \uparrow, \uparrow| + |\downarrow, \downarrow\rangle \langle \downarrow, \downarrow|)$, dal quale si ottengono gli stati parziali $\rho_{S^{(1)}} = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow|) = \rho_{S^{(2)}}$. Come per lo stato di singoletto, il calcolo dei valori medi delle osservabili di terza componente di spin mostra la presenza di correlazione:

$$\langle S_3^{(1)} S_3^{(2)} \rangle_\rho = \frac{\hbar^2}{4}, \quad \langle S_3^{(1)} \rangle_{\rho_{S^{(1)}}} = 0 = \langle S_3^{(2)} \rangle_{\rho_{S^{(2)}}}.$$

Per concludere, forniamo una giustificazione per l'impossibilità dei primi due "no" in tabella 2.

¹⁴Il *prodotto di Kronecker* è un'operazione tra matrici di dimensione arbitraria il cui risultato è una *matrice a blocchi*. Spesso è adoperato in Meccanica Quantistica in quanto fornisce la matrice rappresentativa del prodotto tensoriale tra operatori. Ne enunciamo brevemente alcune proprietà. Siano $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ e $B = (b_{k,l})_{p \times q}$ due matrici arbitrarie: il prodotto di Kronecker $A \otimes B$ è la matrice a blocchi $(mp) \times (nq)$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{12}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix}.$$

Il prodotto di Kronecker è bilineare ed associativo, infatti, date tre matrici A, B e C ed uno scalare $k \in \mathbb{C}$, si ha che

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C, & (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C, \\ (kA) \otimes B &= A \otimes (kB) = k(A \otimes B), & A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C. \end{aligned}$$

Se A, B, C e D sono *matrici compatibili*, vale la *proprietà di prodotto misto* $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$; in particolare, se $A = C$ e $B = D$, risulta che $(A \otimes B)^2 = A^2 \otimes B^2$. Se A e B sono invertibili allora anche $A \otimes B$ è invertibile ed $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$; vale poi per la trasposta la relazione $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$. Infine, se A è una matrice quadrata $n \times n$ e B è una matrice quadrata $m \times m$, valgono le seguenti proprietà per traccia e determinante:

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}A \cdot \text{Tr}B, \quad \det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

In termini del prodotto di Kronecker è possibile introdurre un'utile proprietà: se $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ e $B = (b_{k,l})_{m \times m}$ si definisce *somma di Kronecker* (da non confondere con la *somma diretta*) di A e B l'espressione $A \oplus B = A \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes B$, dove \mathbb{I}_k è la matrice unità $k \times k$. Somma e prodotto di Kronecker soddisfano la seguente relazione $e^{A \oplus B} = e^A \otimes e^B$. Esistono ulteriori estensioni del prodotto tra matrici il cui risultato è ancora una matrice i cui elementi sono a loro volta prodotti di Kronecker di matrici; ne è un esempio il *prodotto di Tracy-Singh*.

TEOREMA (DELLO STATO PARZIALE PURO) - Sia ρ un operatore densità definito sul prodotto tensore $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e siano $\rho_{(1)} = \text{Tr}^{(2)}\rho$ e $\rho_{(2)} = \text{Tr}^{(1)}\rho$ gli operatori densità parziali ottenuti da ρ . Se almeno uno tra $\rho_{(1)}$ e $\rho_{(2)}$ è puro, allora necessariamente $\rho = \rho_{(1)} \otimes \rho_{(2)}$.

Proof. Il caso in cui $\rho_{(1)}$ e $\rho_{(2)}$ sono entrambi puri rientra tra quelli analizzati in precedenza; supponiamo pertanto che uno solo tra i due stati parziali sia puro, ad esempio, $\rho_{(1)}$. L'operatore densità ρ è autoaggiunto e può essere decomposto spettralmente nella forma (2.8), ovvero $\rho = \sum_k \rho_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$, dove ciascun $\rho_k \in [0, 1]$ e $\sum_k \rho_k = 1$. Fissata allora in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ la base ortonormale $\{|a_n, b_m\rangle\}_{n,m \in \mathbb{N}}$, ciascun autovettore $|\phi_k\rangle$ di ρ può essere sviluppato come somma dei vettori di base, sicché

$$\rho = \sum_k \rho_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \sum_k \rho_k \sum_{n,m} \sum_{n',m'} c_{n,m}^k (c_{n',m'}^k)^* |a_n, b_m\rangle\langle b_{m'}, a_{n'}|. \quad (3.11)$$

Si può allora ottenere l'espressione dell'operatore densità parziale $\rho_{(1)} = \text{Tr}^{(2)}\rho$

$$\rho_{(1)} = \sum_{n,n'} \sum_k \rho_k \sum_m c_{n,m}^k (c_{n',m}^k)^* |a_n\rangle\langle a_{n'}|, \quad (3.12)$$

il quale è, per ipotesi, uno stato puro e cioè $\rho_{(1)} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Poiché la base $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è arbitraria, può essere scelta di modo che per un \tilde{n} fissato sia $|a_{\tilde{n}}\rangle = |\psi\rangle$. Di conseguenza dovrà risultare che $\sum_k \rho_k \sum_m c_{n,m}^k (c_{n',m}^k)^* = 0$, a meno che $n = n' = \tilde{n}$. Pertanto, se $n = n' \neq \tilde{n}$, la precedente condizione si riscrive come $\sum_k \rho_k \sum_m |c_{n,m}^k|^2 = 0$, in altre parole, $\forall k \in \mathbb{N}$ per cui $\rho_k \neq 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $n \neq \tilde{n}$ deve essere $c_{n,m}^k = 0$. A fronte di tali accorgimenti, la (3.11) si riduce all'espressione

$$\rho = \sum_k \rho_k \sum_{m,m'} c_{\tilde{n},m}^k (c_{\tilde{n},m'}^k)^* |a_{\tilde{n}}, b_m\rangle\langle b_{m'}, a_{\tilde{n}}| = |a_{\tilde{n}}\rangle\langle a_{\tilde{n}}| \otimes \sum_k \rho_k \sum_{m,m'} c_{\tilde{n},m}^k (c_{\tilde{n},m'}^k)^* |b_m\rangle\langle b_{m'}|, \quad (3.13)$$

la quale mostra la non correlazione dello stato totale, che può essere scritto come $\rho = \rho_{(1)} \otimes \rho_{(2)}$. \square

Il precedente teorema permette di concludere che *ogni qual volta uno degli stati parziali è puro, lo stato totale deve necessariamente essere non correlato*. Ciò consente di fornire una spiegazione dei primi due "no" (casi impossibili) riportati in Tabella 2. Per entrambi basta ricorrere alla condizione (2.10): nel primo $\rho_{(1)}$ e $\rho_{(2)}$ son puri, dunque ρ è sicuramente non correlato (grazie al teorema) e quindi $\text{Tr}\rho^2 = 1$, ovvero ρ è puro; allo stesso modo, nel secondo caso uno degli stati parziali è puro e quindi ρ è certamente non correlato, dunque dalle proprietà della traccia ρ è necessariamente uno stato miscela.

OSSERVAZIONE I – Si può incorrere in casi apparentemente paradossali. Si consideri, ad esempio, un sistema composto da n spin 1/2 tutti preparati nello stato $|\uparrow\rangle$; è naturale pensare che esso sia uno stato fortemente correlato. Secondo la definizione (3.9), tuttavia, lo stato del sistema composto è non correlato, in quanto $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle^{(1)} \otimes |\uparrow\rangle^{(2)} \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle^{(n)}$ e quindi $\rho = \rho_{(1)} \otimes \rho_{(2)} \otimes \dots \otimes \rho_{(n)}$. Il "paradosso" si risolve osservando che lo stato $|\Psi\rangle$ è autostato di S_3^{tot} e per esso sono noti (per costruzione) tutti gli stati di singola componente: in tal caso il concetto di correlazione introdotto perde di senso, non essendo presenti fluttuazioni delle variabili dinamiche coinvolte. Se invece si considerano combinazioni di arbitrarie componenti di spin di singola particella, allora è sempre verificata la non correlazione delle fluttuazioni sulle singole osservabili e dunque è certamente soddisfatta l'identità

$$\langle S_{\alpha_1}^{(1)} S_{\alpha_2}^{(2)} \dots S_{\alpha_n}^{(n)} \rangle_\rho = \langle S_{\alpha_1}^{(1)} \rangle_{\rho_{(1)}} \langle S_{\alpha_2}^{(2)} \rangle_{\rho_{(2)}} \dots \langle S_{\alpha_n}^{(n)} \rangle_{\rho_{(n)}}. \quad (3.14)$$

Ad esempio, per $n = 2$ è $\langle \uparrow, \uparrow | S_1^{(1)} S_3^{(2)} | \uparrow, \uparrow \rangle = \langle \uparrow | S_1^{(1)} | \uparrow \rangle \langle \uparrow | S_3^{(2)} | \uparrow \rangle = 0$, il che può essere verificato passando in rappresentazione matriciale.

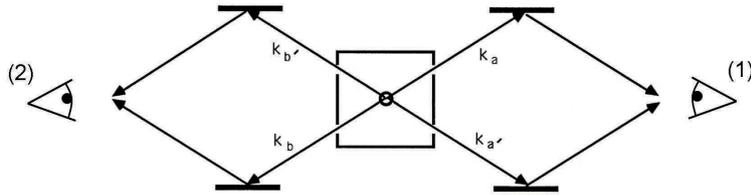
OSSERVAZIONE II – Un altro modo per preparare stati correlati per sistemi a più componenti è quello di usare le cosiddette *coincidenze*. La figura alla pagina seguente illustra schematicamente il caso

in questione. Sia data una sorgente che emette simultaneamente due particelle di momento opposto $\mathbf{k}_a = -\mathbf{k}_b$ ed un sistema di specchi montato di modo che, posti due rilevatori alla sinistra ed alla destra della sorgente, sia impossibile distinguere tra il percorso associato alla coppia di particelle avente momenti $(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$ ed il percorso di una coppia "simmetrica" $(\mathbf{k}_{a'}, \mathbf{k}_{b'})$. Lo stato del sistema sarà quindi descritto (in corrispondenza delle regioni in cui sono collocati i detector) dal rappresentativo

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b\rangle + |\mathbf{k}_{a'}, \mathbf{k}_{b'}\rangle) \xrightarrow{RS} \Psi_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{x}_2)} + e^{i(\mathbf{k}_{a'} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_{b'} \cdot \mathbf{x}_2)} \quad (3.15)$$

e la densità di probabilità associata sarà della forma (a meno di fattori di normalizzazione)

$$|\Psi_{12}|^2 \propto \{1 + \cos[(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_{a'}) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_{b'}) \cdot \mathbf{x}_2]\}. \quad (3.16)$$



Supponiamo ora di voler calcolare la probabilità di trovare una particella solo nel detector (1), ignorando i risultati del detector (2): sarà necessario integrare la (3.16) su tutte le possibili uscite di (2). Si trova che $P_{(1)}(\mathbf{x}_1) = \int_{\Omega^{(2)}} |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 d\mathbf{x}_2 \propto 1$, essendo nullo il contributo dovuto all'integrazione del coseno su tutto il volume. Dunque non si osservano frange d'interferenza in corrispondenza del detector (1); ma per studiare le proprietà di correlazione tra stati è necessario essere in presenza di fenomeni d'interferenza. Si può allora pensare di fissare il detector (2) in una specifica posizione $\tilde{\mathbf{x}}_2$ (a.e. $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$) ed osservare in *coincidenza* gli arrivi in (1). In altre parole, si selezionano le particelle rilevate in (1) in coincidenza con le particelle rilevate in (2) in un intorno di $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$: in tal caso $P_{(1)}(\mathbf{x}_1) \propto \int_{\Omega_0^{(2)}} \{1 + \cos[(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_{a'}) \cdot \mathbf{x}_1]\} d\mathbf{x}_2 \sim \cos[(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_{a'}) \cdot \mathbf{x}_1]$ e verranno rilevate frange d'interferenza dal detector (1), associate al percorso seguito dalla particella per arrivare al detector.

4 CAMBIAMENTI DI BASE E REGOLE DI QUANTIZZAZIONE

4.1 Trasformazioni e cambiamenti di base. Consideriamo un insieme completo di osservabili compatibili (I.C.O.C.) $\{A_1, \dots, A_n\}$ ed indichiamo con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ il multi-indice associato all'insieme di indici caratterizzanti la numerabilità dello spettro di ciascuna osservabile. Sappiamo che l'insieme ortonormale $\{|\alpha\rangle\}_\alpha$ di autostati simultanei dell'I.C.O.C. forma una base hilbertiana di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$, ovvero soddisfa le condizioni di ortonormalità e completezza

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \delta_{\alpha, \alpha'} = \delta_{\alpha_1, \alpha'_1} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha'_n}, \quad \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \langle \alpha_n, \dots, \alpha_1| = \mathbf{1}. \quad (4.1)$$

Ciascun vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ può allora essere sviluppato come combinazione lineare dei vettori di base nella forma $|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \psi \rangle |\alpha\rangle$; i coefficienti $\langle \alpha | \psi \rangle$ di questo sviluppo costituiscono la **funzione d'onda** $\psi(\alpha)$ dello stato puro $|\psi\rangle$ nella base di autostati simultanei di $\{A_1, \dots, A_n\}$ di \mathcal{H} ; esplicitamente

$$\psi(\alpha) = \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv \langle \alpha | \psi \rangle. \quad (4.2)$$

Si noti che, essendo la base $\{|\alpha\rangle\}_\alpha$ definita a meno di un fattore di fase complesso di modulo unitario, alla trasformazione $|\alpha\rangle \rightarrow e^{i\theta_\alpha} |\alpha\rangle$ è associata la trasformazione $\psi(\alpha) \rightarrow e^{-i\theta_\alpha} \psi(\alpha)$ della funzione d'onda.

In accordo con il terzo assioma di von Neumann, la fedeltà $|\langle \alpha | \psi \rangle|^2$ rappresenta la probabilità che una

misurazione simultanea delle osservabili $\{A_1, \dots, A_n\}$ del sistema \mathcal{S} preparato nello stato puro $|\psi\rangle$ dia come risultato l'insieme di autovalori (eventualmente generalizzati) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Di conseguenza, il modulo quadro della funzione d'onda $\psi(\alpha)$ rappresenta un'ampiezza di probabilità ed, in quanto tale, deve essere opportunamente normalizzata di modo che $\sum_{\alpha} |\psi(\alpha)|^2 = 1$.

Alla rappresentazione dei vettori nella base $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$ si accosta la rappresentazione degli operatori. L'azione di ciascun operatore A sulle funzioni d'onda sarà scritta, in rappresentazione, nella forma

$$(X\psi)(\alpha) \equiv \langle\alpha|X|\psi\rangle = \sum_{\tilde{\alpha}} \langle\tilde{\alpha}|\psi\rangle \langle\alpha|X|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{\tilde{\alpha}} \langle\alpha|X|\tilde{\alpha}\rangle \psi(\tilde{\alpha}). \quad (4.3)$$

In particolare, l'azione di qualsiasi funzione delle osservabili A_1, \dots, A_n che definiscono la rappresentazione risulta essere puramente moltiplicativa, ovvero $[f(A_1, \dots, A_n)\psi](\alpha) = f(\alpha)\psi(\alpha)$.

Sia ora $\{B_1, \dots, B_m\}$ un nuovo I.C.O.C. di \mathcal{H} composto da operatori non tutti esprimibili come funzioni di $\{A_1, \dots, A_n\}$ e $\{|\beta\rangle\}_{\beta}$ (dove $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ è un multi-indice) l'insieme ortonormale di autovettori simultanei associati. Come in precedenza, $\{|\beta\rangle\}_{\beta}$ costituisce una base hilbertiana di \mathcal{H} e dunque il generico vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ può essere sviluppato nella forma $|\psi\rangle = \sum_{\beta} \langle\beta|\psi\rangle |\beta\rangle$ dalla quale, adoperando la completezza della base originaria $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$, si ottiene l'espressione

$$\langle\beta|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle \quad \longrightarrow \quad \tilde{\psi}(\beta) = \sum_{\alpha} (U^{\dagger})_{\beta\alpha} \psi(\alpha), \quad (4.4)$$

ovvero la *legge di trasformazione* tra le funzioni d'onda nelle due rappresentazioni¹⁵. I prodotti scalari $\langle\beta|\alpha\rangle$ rappresentano gli elementi di una matrice $U = \{U_{\beta\alpha}\}$ che per costruzione è *unitaria* dato che

$$\sum_{\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle \langle\alpha|\beta'\rangle = \delta_{\beta,\beta'}, \quad \sum_{\beta} \langle\alpha|\beta\rangle \langle\beta|\alpha'\rangle = \delta_{\alpha,\alpha'}.$$

Viceversa, ad un operatore U unitario su \mathcal{H} corrisponde un cambiamento dalla base ortonormale $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$ alla base, anch'essa ortonormale, $\{U|\alpha\rangle\}_{\alpha}$. Poiché U è un isomorfismo suriettivo, tra le due basi esiste una corrispondenza biunivoca e quindi la trasformazione generata da U ammette sia un'interpretazione *attiva* che una *passiva*: nella visione attiva il vettore cambia mentre le componenti, che definiscono la funzione d'onda, restano invariate; nella visione passiva, invece, è la funzione d'onda a cambiare mentre il vettore resta invariato. In definitiva, le due interpretazioni si riassumono come di seguito:

$$\begin{array}{lll} \text{interpretazione attiva} & \psi(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle & \longrightarrow \quad \langle\alpha|(U|\psi)\rangle = (U\psi)(\alpha), \\ \text{interpretazione passiva} & \psi(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle & \longrightarrow \quad (\langle\alpha|U^{\dagger})|\psi\rangle = (U^{-1}\psi)(\alpha). \end{array} \quad (4.5)$$

Si noti che il formalismo di Dirac è particolarmente efficace nell'evidenziare tale distinzione in quanto se $|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$, allora nello spazio duale $\langle\psi| \mapsto \langle\psi|U^{\dagger}$.

La domanda che sorge spontanea è se ad ogni trasformazione i base che ammette entrambe le interpretazioni è possibile associare un operatore unitario. Ciò che conta, affinché entrambe le interpretazioni siano possibili, è che tra le basi $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$ e $\{|\beta\rangle\}_{\beta}$ sia possibile stabilire una corrispondenza uno-ad-uno; in questo modo ad ogni elemento $|\alpha\rangle$ è possibile far associare uno ed un solo elemento $|\beta_{\alpha}\rangle$ della seconda e quindi definire un operatore lineare $U : \{\alpha\} \rightarrow \{\beta\}$ attraverso la relazione

$$|\beta_{\alpha}\rangle = U|\alpha\rangle. \quad (4.6)$$

L'estensione dell'operatore U a tutto \mathcal{H} ne garantisce l'unitarietà. Questa non è però la conclusione più generale possibile dal momento che le grandezze veramente misurabili sono i prodotti scalari $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ tra gli elementi della base. L'applicazione (4.6) può equivalentemente essere estesa *antilinearmente*¹⁶

¹⁵Si noti che, mentre il vettore di stato $|\psi\rangle$ è lo stesso, le forme funzionali delle funzioni d'onda sono in generale diverse e vanno perciò indicate con simboli diversi.

¹⁶Un'applicazione $\varpi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è antilineare su \mathcal{H} se $\forall (|\psi\rangle, |\phi\rangle) \in \mathcal{H}$, si ha che $\varpi(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \varpi(\alpha|\psi\rangle) + \varpi(\beta|\phi\rangle) = \alpha^*|\varpi\psi\rangle + \beta^*|\varpi\phi\rangle = \alpha^*\varpi|\psi\rangle + \beta^*\varpi|\phi\rangle$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

a tutto \mathcal{H} , conservando la medesima forma del prodotto scalare: in questo modo l'operatore U sarà **antiunitario**. Riassumendo, nei due casi avremo che

$$\begin{aligned} U \text{ lineare} &\Rightarrow \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \longrightarrow \sum_{\alpha} |\beta_{\alpha}\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \Rightarrow U \text{ unitario,} \\ U \text{ antilineare} &\Rightarrow \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \longrightarrow \sum_{\alpha} |\beta_{\alpha}\rangle\langle\alpha|\psi\rangle^* \Rightarrow U \text{ antiunitario.} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si noti che un operatore K antiunitario può essere individuato nell'*operatore di coniugazione complessa relativo* alla base $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$: $K|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle^*$. Un importante teorema dovuto a *Wigner* (vedi §5.2) garantisce che le possibilità introdotte (U unitario ed antiunitario) sono le sole ammesse. Come avremo modo di vedere nel prossimo capitolo, ciò segue dal fatto che la trasformazione associata al cambiamento di base è un caso particolare di *trasformazione di simmetria* tra le osservabili di \mathcal{S} .

A conclusione del paragrafo vediamo come cambia la rappresentazione di un operatore X a seguito di una trasformazione di base. Per stabilire la trasformazione associata ad X , invochiamo la completezza della vecchia base $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$ all'interno degli elementi di matrice di X nella nuova base $\{|\beta\rangle\}_{\beta}$:

$$\langle\beta|X|\beta'\rangle = \sum_{\alpha,\alpha'} \langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|X|\alpha'\rangle\langle\alpha'|\beta'\rangle. \quad (4.8)$$

A questo livello si tratta solo di un cambiamento passivo di rappresentazione, in altre parole l'operatore X resta invariato. Naturalmente anche una visione attiva è possibile e, come abbiamo appena visto, risulta definita su \mathcal{H} una trasformazione di simmetria, implementata da un operatore unitario oppure antiunitario. Gli operatori possono allora essere attivamente trasformati secondo la regola

$$X \longrightarrow X' = U^{\dagger} X U. \quad (4.9)$$

Per costruzione X' possiede nella vecchia base $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha}$ gli stessi elementi di matrice (se U è unitario) oppure i complessi coniugati (se U è antiunitario) di X nella nuova base $\{|\beta\rangle\}_{\beta} = \{U|\alpha\rangle\}_{\alpha}$.

4.2 Quantizzazione canonica ed ordinamento. Il secondo assioma di Von Neumann stabilisce la rappresentazione matematica delle osservabili di un sistema fisico \mathcal{S} ma non fornisce alcuna indicazione su come identificare a priori gli operatori associati. È allora indispensabile, sia dal punto di vista pratico che da quello concettuale, disporre di *regole* che permettano di calcolare la forma operatoriale esplicita delle osservabili più rilevanti. Per osservabili dotate di analogo classico è possibile ricorrere alle

REGOLE DI QUANTIZZAZIONE CANONICA

Le coordinate generalizzate q_1, \dots, q_n ed i relativi momenti coniugati p_1, \dots, p_n di un sistema fisico \mathcal{S} sono rappresentate in Meccanica Quantistica da operatori autoaggiunti $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ e $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ soddisfacenti alle regole di commutazione canoniche (c.c. o di Heisenberg)

$$[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j] = 0, \quad [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0, \quad [\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}\mathbb{1}. \quad (4.10)$$

Inoltre, ad ogni osservabile classica $A(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ corrispondono tutti gli operatori autoaggiunti $\hat{A}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ tali che $\hat{A} = A$ nel limite formale $\hbar \rightarrow 0$.

La relazione di commutazione $[\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}\mathbb{1}$ va interpretata alla luce del

TEOREMA (DI WINTNER) - *Siano \mathfrak{Q} e \mathfrak{P} due operatori autoaggiunti soddisfacenti la regola di commutazione canonica $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}] = \alpha\mathbb{1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora almeno uno dei due è non limitato.*

Proof. Dalle regole di Leibniz e di commutazione si ha $[\Omega^n, \mathfrak{P}] = \alpha n \Omega^{n-1}$. Se Ω e \mathfrak{P} fossero entrambi limitati, basterebbe applicare la disuguaglianza triangolare per trovare che $n|\alpha|\|\Omega^{n-1}\| = \|\Omega^n \mathfrak{P} - \mathfrak{P} \Omega^n\| \leq \|\Omega^n \mathfrak{P}\| + \|\mathfrak{P} \Omega^n\| \leq 2\|\mathfrak{P}\|\|\Omega^n\| \leq 2\|\mathfrak{P}\|\|\Omega\|\|\Omega^{n-1}\|$, dalla quale seguirebbe la disuguaglianza

$$\|\Omega\|\|\mathfrak{P}\| \geq \frac{1}{2}n|\alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il che è assurdo e pertanto almeno uno tra Ω e \mathfrak{P} dev'essere non limitato. \square

Il teorema di Wintner dà risalto al fatto che un'uguaglianza della forma $[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}] = \alpha \mathbb{1}$ ha senso solo su un *sottoinsieme denso* di \mathcal{H} : il commutatore, infatti, è (in generale) definito su un sottoinsieme di \mathcal{H} a differenza del termine a destra il quale, essendo multiplo dell'operatore identità, ha come dominio tutto \mathcal{H} . Ciò comporta l'esistenza di *diverse realizzazioni di coppie canoniche* che non sono dei semplici riscaldamenti simultanei del tipo $\mathfrak{q}' \rightarrow \lambda \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}' \rightarrow \lambda^{-1} \mathfrak{p}$. In questo contesto si inserisce il

TEOREMA (DI STONE–VON NEUMANN) - *Siano $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ e $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}')$ due coppie di operatori autoaggiunti in \mathcal{H} ed \mathcal{H}' rispettivamente. Se $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ e $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}')$ soddisfano le regole di c.c., allora esiste un isomorfismo¹⁷*

$$\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \quad \text{tale che} \quad \mathfrak{q}' = \mathcal{U} \mathfrak{q} \mathcal{U}^\dagger, \quad \mathfrak{p}' = \mathcal{U} \mathfrak{p} \mathcal{U}^\dagger. \quad (4.11)$$

In altre parole, il teorema di Stone–von Neumann afferma che tutte le realizzazioni di coppie canoniche sono *equivalenti a meno di isomorfismi*; in particolare, qualsiasi realizzazione canonica sarà equivalente alla cosiddetta rappresentazione di Schrödinger, per la quale $\mathcal{H}' = L_2(\mathbb{R}^3)$.

Concludiamo con alcune osservazioni. In primo luogo va notato che alla base delle regole di quantizzazione insiste un **principio di corrispondenza** legato alla somiglianza formale delle proprietà algebriche delle parentesi di Poisson e dei commutatori di osservabili dipendenti dalle variabili canoniche. Tale analogia suggerisce un criterio col quale assegnare a ciascuna funzione classica $A = A(\mathfrak{q}; \mathfrak{p})$ un operatore quantistico $\mathcal{O}(A)$, purché la relazione di commutazione

$$[\mathcal{O}(A), \mathcal{O}(B)] = i\hbar \mathcal{O}(\{A, B\}) \quad (4.12)$$

sia soddisfatta. La relazione (4.12) costituisce una corrispondenza formale tra Meccanica Classica e Meccanica Quantistica; in particolare, essa permette di calcolare i seguenti importanti commutatori:

$$\begin{aligned} [f(\mathfrak{p}), g(\mathfrak{p})] &= \mathcal{O}, & [f(\mathfrak{q}), \mathfrak{p}_i] &= i\hbar \mathcal{O}(\{f(\mathfrak{q}), p_i\}) = i\hbar \mathcal{O}(\partial_{q_i} f(\mathfrak{q})), \\ [f(\mathfrak{p}), g(\mathfrak{p})] &= \mathcal{O}, & [\mathfrak{q}_i, f(\mathfrak{p})] &= i\hbar \mathcal{O}(\{q_i, f(\mathfrak{p})\}) = i\hbar \mathcal{O}(\partial_{p_i} f(\mathfrak{p})). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Tuttavia, esistono almeno tre obiezioni circa la validità della (4.12): la prima, di natura *epistemologica*, è legata al fatto che la Meccanica Quantistica è una generalizzazione della Meccanica Classica e dunque i suoi principi non dovrebbero essere logicamente contenuti in argomentazioni puramente classiche; la seconda, di natura pratica, è dovuta all'arbitrarietà del processo di quantizzazione: esistono diverse procedure, tutte a priori ugualmente valide, per risolvere il **problema dell'ordinamento** e non esiste alcuna regola generale che permetta di risolvere l'ambiguità nascente sui termini di ordine \hbar . Infine, un'obiezione *matematica*: le parentesi di Poisson sono invarianti sotto trasformazioni canoniche e di conseguenza anche la regola di corrispondenza (4.12) dovrebbe esserlo; per di più, se la variabile dinamica $A(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ viene fatta corrispondere all'operatore $\mathcal{O}(A)$, ci si aspetterebbe di avere un'analoga corrispondenza tra un'arbitraria funzione f di detta variabile e la funzione dell'operatore stesso, ovvero $f(A(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})) \mapsto f(\mathcal{O}(A)) = \mathcal{O}(f(A))$. Numerosi teoremi no-go dimostrano però che tale processo di quantizzazione non è consentito; non esiste quindi una regola di quantizzazione universale. Ciononostante, per certe osservabili "fondamentali" (e.g. energia, momento angolare, quantità di moto), argomentazioni basate su *principi di simmetria* risultano molto stringenti e forniscono un punto di riferimento determinante per la quantizzazione, poiché sopravvivono indenni il passaggio dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica. Nei paragrafi seguenti discuteremo questo aspetto.

¹⁷I.e. una trasformazione lineare e biunivoca da \mathcal{H} in \mathcal{H}' che conserva il prodotto scalare, ovvero tale che $\langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$. In particolare, un *isomorfismo* è una *trasformazione unitaria* sse $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$.

5 SIMMETRIE ED INVARIANZA IN MECCANICA QUANTISTICA

I risultati descritti finora costituiscono ciò che usualmente prende il nome di "struttura formale della meccanica quantistica". Sotto l'aspetto logico della costruzione della teoria essi giocano un ruolo centrale: molto si è scritto su tali argomenti e svariate sono le interpretazioni proposte. Ciononostante, l'intera struttura presentata perde di utilità in assenza di opportune *regole di corrispondenza* che permettano di identificare quantomeno gli operatori associati alle osservabili fondamentali. Si è visto quali siano i limiti delle regole di quantizzazione e quali obiezioni possano essere avanzate contro di esse; per di più, nessuna considerazione è stata ancora fatta riguardo la *Dinamica* di un sistema quantistico \mathcal{S} . Per queste ragioni (e per altre che diverranno chiare nel seguito) occorre introdurre alcuni concetti fondamentali di simmetria che intervengono in Meccanica Quantistica.

Prima di procedere in tal senso, è utile ricordare brevemente il ruolo che le trasformazioni di simmetria hanno in Meccanica Classica sia dal punto di vista statico-cinematico che da quello dinamico. Al livello statico-cinematico, una trasformazione di simmetria nello spazio delle fasi \mathfrak{F} associato ad un sistema fisico \mathcal{S} corrisponde ad una trasformazione canonica, ovvero un'applicazione biunivoca di \mathfrak{F} in sé che ne conserva la *struttura simplettica*, garantendo quindi la **covarianza** (invarianza in forma) delle equazioni del moto¹⁸. A livello dinamico, invece, è necessario studiare le proprietà di trasformazione dell'Hamiltoniana di \mathcal{S} : se essa è invariante, allora la trasformazione conserva la dinamica ed a essa è associato uno specifico *integrale primo* del moto, come prescritto dal **teorema di Noether**.

Volendo estendere tali risultati alla Meccanica Quantistica è necessario individuare cosa una trasformazione di simmetria deve lasciare invariato: si tratta cioè di *identificare l'analogo quantistico della struttura simplettica dello spazio delle fasi classico*.

5.1 Trasformazioni di simmetria di stati e di osservabili. In teoria non relativistica lo spazio è supposto omogeneo ed isotropo, regolato dalla geometria euclidea; il tempo, invece, è inteso in senso assoluto ed anch'esso omogeneamente distribuito. Inoltre, un osservatore alle prese con un sistema fisico \mathcal{S} è supposto esterno e tale da non produrre alcuna perturbazione.

In virtù delle proprietà dello spazio-tempo, le leggi fisiche devono godere delle stesse proprietà di simmetria dello spazio e del tempo in cui si inquadrano i fenomeni osservati. Ad esempio, due osservatori che analizzano un sistema fisico da due punti di vista differenti devono necessariamente giungere a due interpretazioni fisiche equivalenti del fenomeno. È allora necessario che gli spazi di Hilbert associati a ciascun osservatore siano tra loro *isomorfi* e cioè che esista un'esplicita trasformazione τ indotta dalla corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di osservabili e di stati puri (l'estensione a stati miscela non introduce alcuna novità). Certe relazioni dovranno allora essere conservate.

- Se $A|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle$, a seguito della trasformazione dovrà essere $A'|\phi'_n\rangle = a_n|\phi'_n\rangle$. L'identità $\sigma\{A\} = \sigma\{A'\}$ è una conseguenza dell'invarianza delle leggi fisiche e può essere interpretata affermando che *eguali misure compiute da osservatori distinti devono fornire il medesimo risultato*.
- Se un vettore di stato è della forma $|\psi\rangle = \sum_n c_n|\phi_n\rangle$, dove $\{|\phi_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ è la base di autovettori di A , allora il vettore di stato trasformato sarà del tipo $|\psi'\rangle = \sum_n c'_n|\phi'_n\rangle$, dove $\{|\phi'_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ è ora la base di autovettori di A' . Per i due vettori di stato dovrà risultare soddisfatta l'identità

$$|\langle \phi_n | \psi \rangle|^2 = |\langle \phi'_n | \psi' \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

in quanto le quantità in questione esprimono delle probabilità caratteristiche del sistema.

Tenendo presente il legame esistente tra le grandezze riportate in (5.1) e la metrica (1.1) di $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$, segue che la trasformazione τ associata alla corrispondenza biunivoca tra gli spazi di Hilbert riferiti a ciascun osservatore *deve conservare la struttura metrica* di $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$, rispettandone le eventuali *regole di superselezione*. Diremo allora che le descrizioni dei due osservatori sono legate da una **trasformazione di simmetria**. In base alla definizione appena data, le trasformazioni di simmetria formano un **gruppo** (generalmente *non abeliano*): sono infatti chiuse rispetto ad una legge di composizione interna "◦" e

¹⁸Si noti che a questo livello la trasformazione è associata ad una simmetria della *descrizione* del moto e non del moto.

soddisfano le proprietà di *i) associatività*: $\tau_1 \circ \tau_2$ è ancora una trasformazione ottenuta facendo corrispondere τ_2 all'immagine di τ_1 ; *ii) esistenza dell'elemento neutro*: $\tau = e$ è la trasformazione identica che associa ogni raggio di \mathcal{PH}_S se stesso; *iii) esistenza dell'elemento inverso*: τ^{-1} è la trasformazione inversa di τ , definita di modo che $\tau^{-1} \circ \tau = \tau \circ \tau^{-1} = e$.

Così come per le trasformazioni di base, anche le trasformazioni di simmetria possono essere interpretate attivamente e passivamente: nell'**interpretazione attiva** un unico osservatore contempla due distinti sistemi fisici ottenuti trasformando l'uno nell'altro, mentre nell'**interpretazione passiva** due osservatori collegati da una trasformazione contemplano lo stesso sistema. Le due visioni sono equivalenti e legittime grazie alla richiesta di omogeneità ed isotropia dello spazio e le trasformazioni ad esse associate sono *una l'inversa dell'altra*, dato che una traslazione simultanea di osservatore e sistema deve tradursi nella trasformazione identica.

5.2 Teorema di Wigner e legge di trasformazione delle osservabili. Secondo la definizione presentata, una trasformazione di simmetria è una isometria del proiettivo \mathcal{PH}_S ¹⁹. Un esempio immediato è dato da un'isometria di \mathcal{H}_S in sé, i.e. un'applicazione *lineare* del tipo $|\psi\rangle \mapsto |U\psi\rangle$ t.c. $\langle U\psi|U\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$; grazie alla linearità $|U\psi\rangle = U|\psi\rangle$ e quindi $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$, ovvero U è un operatore unitario. D'altro canto, dovendo essere conservati i moduli quadri dei prodotti scalari, anche l'isometria *antilineare* $|\psi\rangle \mapsto |U\psi\rangle$ tale che $\langle U\psi|U\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$ definisce una trasformazione di simmetria. Come già osservato nel §4.1, i casi precedenti sono gli unici ammessi alla luce del seguente

TEOREMA (DI WIGNER) - *Ogni trasformazione di simmetria τ su un dato spazio di Hilbert \mathcal{H}_S è implementabile mediante una isometria lineare od antilineare $U(\tau)$ tra i settori di superselezione di \mathcal{H}_S ; l'operatore $U(\tau)$ risulta univocamente fissato da τ a meno di un fattore di fase.*

In altre parole, il teorema di Wigner afferma che le trasformazioni di simmetria sono dei cambiamenti di base nello spazio di Hilbert dei vettori di stato, con l'aggiunta di una eventuale coniugazione complessa sulle coordinate nel caso di un'implementazione antiunitaria.

Vediamo ora come viene implementata una trasformazione di simmetria al livello delle osservabili. Assumendo che la trasformazione di simmetria $|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle$ agisca in senso attivo sui vettori di stato, possiamo definire l'operatore attivamente trasformato X' sfruttando la proprietà di invarianza (5.1)

$$|\langle\psi|X'|\phi\rangle|^2 = |\langle\psi'|X|\phi'\rangle|^2, \quad (5.2)$$

dove $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ sono arbitrari vettori di \mathcal{H}_S . Viceversa, dal punto di vista passivo è

$$|\langle\psi'|X'|\phi'\rangle|^2 = |\langle\psi|X|\phi\rangle|^2. \quad (5.3)$$

Dal punto di vista operativo l'*interpretazione passiva per le osservabili è naturalmente coniugata a quella attiva per gli stati*: difatti, se la trasformazione di simmetria agisce sugli apparati strumentali di modo da modificare lo stato di preparazione del sistema, lasciando però inalterati gli strumenti di misura, è necessaria una trasformazione passiva per le osservabili. Dal punto di vista matematico, le relazioni (5.2) e (5.3) mostrano che è sempre possibile passare da un'interpretazione ad un'altra tramite la sostituzione $\tau \rightarrow \tau^{-1}$. Pertanto, se la trasformazione di simmetria è implementata da un operatore unitario $U(\tau)$ t.c. $|\psi'\rangle = U(\tau)|\psi\rangle$, risultano valide (a meno di un fattore di fase) le seguenti regole di trasformazione:

$$\text{interpretazione attiva} \quad : \quad X' = U^\dagger(\tau)XU(\tau) = U^{-1}(\tau)XU(\tau), \quad (5.4)$$

$$\text{interpretazione passiva} \quad : \quad X' = U(\tau)XU^\dagger(\tau) = U(\tau)XU^{-1}(\tau). \quad (5.5)$$

Dalle precedenti relazioni è evidente che $X = X'$, ovvero X è τ -*invariante*, sse $[X, U(\tau)] = 0$.

Con degli opportuni accorgimenti è possibile ottenere delle regole di trasformazione analoghe alla (5.4) e (5.5) anche nel caso di un'implementazione antiunitaria. Tuttavia, ciò esula dagli interessi di

¹⁹Al fine di alleggerire il linguaggio sottointenderemo d'ora in avanti la proprietà di conservazione delle regole di superselezione, a meno di situazioni in cui non sia esplicitamente richiesto.

questo corso nel quale incontreremo solo *gruppi di trasformazione continui*; la continuità del gruppo, infatti, implica necessariamente un'implementazione *unitaria*, essendo $\mathbb{1}$ esso stesso unitario²⁰. Inoltre, al fine di non creare confusione, interpreteremo d'ora in avanti la trasformazione di simmetria τ su \mathcal{S} in senso attivo per i vettori di stato e passivo per le osservabili (se non diversamente specificato), i.e.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\xrightarrow{\tau} |\psi'\rangle = U(\tau)|\psi\rangle, \\ A &\xrightarrow{\tau} A' = U(\tau)AU^{-1}(\tau). \end{aligned} \quad (5.6)$$

OSSERVAZIONE – Il teorema di Wigner non fa altro che fissare (a meno di un fattore di fase) le proprietà delle rappresentazioni lineari di gruppi di trasformazione continui su spazi di Hilbert. Si ricordi che se (\mathcal{G}, \circ) è un gruppo e V uno spazio di vettoriale su un campo \mathbb{K} , si definisce **rappresentazione lineare** di \mathcal{G} su V l'omeomorfismo $U : \mathcal{G} \rightarrow \Gamma \subseteq \text{End}(V)$, dove $\text{End}(V) = \{U : V \rightarrow V : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, U(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha U\mathbf{x} + \beta U\mathbf{y}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ è il gruppo degli endomorfismi di V , tale che

$$U(\tau_1 \circ \tau_2) = U(\tau_1) \cdot U(\tau_2), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{G}.$$

Dalla definizione precedente seguono banalmente le proprietà $U(e) = \mathbb{1}_V$ ed $U(\tau^{-1}) = U^{-1}(\tau)$. Si noti che lo stesso insieme delle rappresentazioni di \mathcal{G} forma un gruppo. Più in generale, si parla di **rappresentazione proiettiva** o **per raggi** se vale la legge di composizione

$$U(\tau_1 \circ \tau_2) = e^{i\omega(\tau_1, \tau_2)} U(\tau_1) \cdot U(\tau_2), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{G}, \quad (5.7)$$

dove $\omega(\tau_1, \tau_2)$ è detto **termine di cociclo**; se $\omega = 0$, la rappresentazione è detta **propria** o **vettoriale**.

5.3 Trasformazioni infinitesimali, generatori e teorema di Stone. Nel paragrafo precedente si è fatto riferimento alla proprietà di continuità di un gruppo: un gruppo si dice *continuo* se ogni suo elemento dipende da uno o più parametri continui e linearmente indipendenti. Un esempio è dato dal gruppo delle traslazioni in \mathbb{R}^n , ovvero dall'insieme di trasformazioni $\mathcal{T}_n := \{\tau : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tau(\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$, soddisfacenti la legge di composizione $\tau(\mathbf{u}) * \tau(\mathbf{u}') = \tau(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$; \mathcal{T}_n è un gruppo continuo ad n parametri e la singola traslazione lungo una direzione fissata forma un *sottogruppo continuo ad un parametro*. Si osservi che la dipendenza del gruppo da una famiglia di parametri viene ereditata dal gruppo delle rappresentazioni ad esso associato. Valgono quindi le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE (GRUPPO UNIPARAMETRICO FORTEMENTE CONTINUO) - Sia $\{\mathcal{U}(s), s \in \mathbb{R}\}$ una famiglia di operatori definiti su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Tale famiglia individua un **gruppo ad un parametro di operatori** se

$$\mathcal{U}(t_1)\mathcal{U}(t_2) = \mathcal{U}(t_1 + t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

In particolare, il gruppo uniparametrico $\{\mathcal{U}(t), t \in \mathbb{R}\}$ si dirà **fortemente continuo** se

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{U}(t)|\psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \mathcal{U}(t_0)|\psi\rangle, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad (5.9)$$

ovvero se la funzione $\mathcal{U}(\cdot)|\psi\rangle : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{U}(t)|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ è continua $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Spesso si usa scrivere la condizione (5.9) come $s\text{-}\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R}$. In relazione ai gruppi di operatori ad un parametro si introduce quindi il concetto di generatore infinitesimo del gruppo.

DEFINIZIONE (GENERATORE INFINITESIMALE) - Sia $\{\mathcal{U}(t), t \in \mathbb{R}\}$ un gruppo ad un parametro di operatori definiti su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. L'operatore $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ è detto **generatore infinitesimale** di $\{\mathcal{U}(t), t \in \mathbb{R}\}$ se

$$\mathcal{A}|\psi\rangle := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{U}(t) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}]|\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \left\{ |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}} : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{U}(t) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}] \right\}. \quad (5.10)$$

²⁰Si supponga, e.g., che $U(\ell)$ descriva una traslazione lungo una certa direzione della quantità ℓ ; detta traslazione può essere ottenuta secondo diverse composizioni: $U(\ell) = U(\ell/2)U(\ell/2) = U(\ell/3)U(\ell/3)U(\ell/3) = \dots$. Ma il prodotto di un numero pari di operatori antiunitari è unitario, mentre il prodotto di un numero dispari è antiunitario; se dunque le traslazioni fossero implementate da operatori antiunitari, dalla prima uguaglianza ne concluderemmo che $U(\ell)$ è unitario, mentre dalla seconda che $U(\ell)$ è antiunitario, il che è assurdo in quanto le traslazioni formano un gruppo continuo.

Equivalentemente, introducendo il concetto di "derivata forte" $s\text{-}\frac{d}{dt}$ come limite in senso forte del rapporto incrementale rispetto al parametro da cui il gruppo dipende, potremo definire $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ come

$$\mathcal{A} := s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{i}{t} [\mathcal{U}(t) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}] \quad \iff \quad \mathcal{A} = i s\text{-}\frac{d \mathcal{U}(t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Nel seguito lavoreremo esclusivamente con gruppi uniparametrici di *operatori unitari*. La richiesta di unitarietà fissa le proprietà di hermitianità del generatore. Infatti, considerando una trasformazione infinitesima $\mathcal{U}(t) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - it\mathcal{A} + \mathcal{O}(t^2)$ ed invocando la condizione $\mathcal{U}(t)\mathcal{U}^\dagger(t) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$, sarà

$$\mathcal{U}(t)\mathcal{U}^\dagger(t) = [\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - it\mathcal{A} + \mathcal{O}(t^2)] [\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} + i\mathcal{A}^\dagger + \mathcal{O}(t^2)] = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} + t(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\dagger) + \mathcal{O}(t^2) \quad \iff \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger.$$

avendo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore. Si noti che $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ genera $\mathcal{U}(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e non solo per t infinitesimi; ciò può essere mostrato differenziando la regola di composizione $\mathcal{U}(t_1 + t_2) = \mathcal{U}(t_1)\mathcal{U}(t_2)$ rispetto a t_2 ed osservando che $\frac{d}{dt} \mathcal{U}(t)|_{t=0} = -i\mathcal{A}$, sicché

$$\partial_{t_2} \mathcal{U}(t_1 + t_2)|_{t_2=0} = \mathcal{U}(t_1) \frac{d}{dt_2} \mathcal{U}(t_2)|_{t_2=0} \quad \implies \quad \begin{cases} \dot{\mathcal{U}}(t)|_{t=t_1} = -i\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1), \\ \mathcal{U}(0) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}. \end{cases}$$

Il problema di Cauchy operatoriale che ne segue è ben definito ed ha un'unica soluzione, alla luce del

TEOREMA (DI STONE) - Sia $\{\mathcal{U}(t), t \in \mathbb{R}\}$ un gruppo uniparametrico fortemente continuo di operatori unitari su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Allora esiste uno ed un solo operatore autoaggiunto $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$, $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ t.c.

$$\mathcal{U}(t) = e^{-it\mathcal{A}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Segue allora il seguente corollario, relativo alla risoluzione di equazioni differenziali in spazi di Hilbert.

COROLLARIO (EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN SPAZI DI HILBERT) - Sia $A = A^\dagger$, $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ e $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t |\psi(t)\rangle = -i\mathcal{A}|\psi(t)\rangle, \\ |\psi(0)\rangle = |\psi\rangle. \end{cases} \quad (5.12)$$

Allora esiste un'unica soluzione $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ rappresentabile nella forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\mathcal{A}}|\psi\rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Il corollario precedente risalta l'importanza che il teorema di Stone ha in Meccanica Quantistica. La Schrödinger temporale, infatti, è della forma (5.12) con $\mathcal{A} = \mathcal{H}$, essendo $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ l'hamiltoniano del sistema. Sicché $\partial_t |\psi(t)\rangle = -i\mathcal{H}|\psi(t)\rangle$ ammette una ed una sola soluzione sse $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ è autoaggiunto.

OSSERVAZIONE - Sia $\mathfrak{J} \equiv \{\tau(s), s \in \mathbb{R}\}$ un gruppo ad un parametro di trasformazioni di simmetria di \mathcal{S} ; grazie al teorema di Wigner sappiamo che \mathfrak{J} ammette su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ una rappresentazione unitaria proiettiva, ovvero è garantita l'esistenza di un operatore unitario $\mathcal{U}_\tau = \mathcal{U}_\tau(s)$ che implementa ciascun $\tau(s)$ a meno di un fattore di fase. L'insieme $\{\mathcal{U}_\tau(s), s \in \mathbb{R}\}$ formerebbe un gruppo continuo ad un parametro di operatori unitari se la legge di composizione interna (5.7) non fosse dipendente da il fattore di ciclo $\omega(\tau(s), \tau(s')) \equiv \omega(s, s')$; per simili gruppi, tuttavia, si può dimostrare che il termine $\omega(s, s')$ è sempre eliminabile mediante un'opportuna ridefinizione delle fasi relative a ciascun $\mathcal{U}_\tau(s)$. Sicché, se $\{\mathcal{U}_\tau(s), s \in \mathbb{R}\}$ è fortemente continuo, allora esiste (alla luce del teorema di Stone) un operatore autoaggiunto $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ che genera ciascuna trasformazione implementata da $\{\mathcal{U}_\tau(s), s \in \mathbb{R}\}$.

Grazie alla precedente osservazione è possibile quindi determinare come si trasformano le osservabili di \mathcal{S} a seguito di una trasformazione di simmetria infinitesima $\tau(s)$. Dalla relazione (5.6) si trova che

$$X' = U_\tau(s) X U_\tau^\dagger(s) = e^{-is\mathcal{A}} X e^{is\mathcal{A}} \simeq (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - is\mathcal{A}) X (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} + is\mathcal{A}) = X + is[\mathcal{A}, X] + \mathcal{O}(s^2). \quad (5.13)$$

Possiamo allora concludere che l'operatore X è *invariante* rispetto alla trasformazione di simmetria $\tau(s)$ sse esso *commuta col generatore della trasformazione*.

5.4 Traslazioni spaziali, temporali e rotazioni. Prima di sviluppare il tema della dinamica in Meccanica Quantistica, discutiamo alcune applicazioni dei teoremi di Wigner e Stone legate a tre fondamentali gruppi di trasformazioni di simmetria, i.e. *traslazioni spaziali, rotazioni e traslazioni temporali*. A tal proposito, lavoreremo in rappresentazione di Schrödinger. Si tenga presente che, in tal caso, $\mathcal{H}_S = L_2(\mathbb{R}^3)$ e lo stato $\xi \in P\mathcal{H}_S$ è rappresentato dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \in L_2(\mathbb{R}^3)$, sicché $\psi'(\mathbf{x}) = \mathcal{U}_\tau \psi(\mathbf{x})$ sarà la funzione d'onda attivamente trasformata a seguito dell'azione del gruppo di trasformazioni τ su \mathcal{H}_S . D'altra parte, il valore della funzione nel punto trasformato dev'essere lo stesso della vecchia funzione nel punto originario, i.e. $\psi'(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x}' \equiv \tau \mathbf{x}$. Pertanto $\psi'(\mathbf{x}') = \psi(\tau^{-1} \mathbf{x}')$ e quindi, facendo cadere l'indice muto della variabile, si trova

$$\psi(\mathbf{x}) \xrightarrow{\tau} \psi'(\mathbf{x}) = \psi(\tau^{-1} \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Alla luce di tanto, consideriamo l'azione di $\mathcal{T}_3 \equiv \{\mathcal{T}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ su $L_2(\mathbb{R}^3)$. Sia quindi $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{T}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^3$, dove $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$; è banale verificare che \mathcal{T}_3 è un gruppo abeliano continuo (a tre parametri). Per il teorema di Wigner, ciascun $\mathcal{T}_{\mathbf{a}} \in \mathcal{T}_3$ è rappresentato su $L_2(\mathbb{R}^3)$ da un operatore unitario $\mathcal{U}(\mathbf{a})$ t.c. $\psi'(x) = (\mathcal{U}(\mathbf{a})\psi)(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | \mathcal{U}(\mathbf{a})\psi \rangle = \langle \mathcal{T}_{\mathbf{a}}^{-1} \mathbf{x} | \psi \rangle = \psi(\mathcal{T}_{\mathbf{a}}^{-1} \mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ovvero

$$\psi'(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

essendo $(\mathcal{T}_{\mathbf{a}})^{-1} = \mathcal{T}_{-\mathbf{a}}$. A riprova della validità del teorema di Wigner, è possibile dimostrare che la famiglia $\{\mathcal{U}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ individua effettivamente un gruppo a tre parametri di operatori unitari. Verifichiamo che $\{\mathcal{U}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ è fortemente continuo; per farlo, è sufficiente verificarne la forte continuità in $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Si noti che $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta essere

$$\|[\mathcal{U}(\mathbf{a}) - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}]\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = 2\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2\Re \left\{ \langle \mathcal{U}(\mathbf{a})\psi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} \right\},$$

essendo $\mathcal{U}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}$; posto quindi $\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \equiv \lim_{a_1 \rightarrow 0} \lim_{a_2 \rightarrow 0} \lim_{a_3 \rightarrow 0}$, sarà

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \langle \mathcal{U}(\mathbf{a})\psi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \bar{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

dove il passaggio al limite sotto il segno di integrale è ammesso alla luce del teorema sulla *convergenza dominata secondo Lebesgue* (si noti infatti che $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ è denso in $L_2(\mathbb{R}^3)$). Pertanto

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \|[\mathcal{U}(\mathbf{a}) - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}]\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = 2\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \Re \left\{ \langle \mathcal{U}(\mathbf{a})\psi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} \right\} = 0, \quad \forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3),$$

ovvero $\{\mathcal{U}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ è fortemente continuo. Sia ora il sottogruppo $\{\mathcal{U}(a_1, 0, 0), a_1 \in \mathbb{R}\}$: dal teorema di Stone segue che esiste $(\mathcal{A}_1, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_1})$ autoaggiunto t.c. $\mathcal{U}(a_1, 0, 0) = e^{-ia_1 \mathcal{A}_1}$. Determiniamo il generatore infinitesimo del gruppo: per definizione, l'insieme $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}$ è l'insieme delle $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ t.c.

$$s\text{-}\partial_{a_1} \mathcal{U}(a_1, 0, 0)|_{a_1=0} = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{1}{a_1} [\mathcal{U}(a_1, 0, 0) - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}]\psi(x_1, x_2, x_3) = -\partial_{x_1} \psi(x_1, x_2, x_3),$$

ovvero $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1} = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \partial_{x_1} \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)\} =: \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ (essendo $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ di Sobolev), sicché

$$\forall \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) \quad (i\mathcal{A}_1) = \partial_{x_1} \psi(x_1, x_2, x_3) \iff \mathcal{A}_1 = -i\partial_{x_1} = \mathbf{p}_1,$$

dove $\mathbf{p}_1 = -i\partial_{x_1}$ è la rappresentazione su $L_2(\mathbb{R}^3)$ della componente dell'operatore impulso canonicamente coniugata ad x_1 . Pertanto $(\mathbf{p}_1, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ è il generatore infinitesimo del sottogruppo $\mathcal{T}_1 = \{\mathcal{T}(a_1, 0, 0), a_1 \in \mathbb{R}\}$ e vale la rappresentazione $\mathcal{U}(a_1, 0, 0) = e^{-ia_1 \mathbf{p}_1}$ su $L_2(\mathbb{R}^3)$. Analogamente si dimostra che i generatori dei sottogruppi $\{\mathcal{U}(0, a_2, 0), a_2 \in \mathbb{R}\}$ ed $\{\mathcal{U}(0, 0, a_3), a_3 \in \mathbb{R}\}$ sono rispettivamente $(\mathbf{p}_2, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ ed

$(\mathfrak{p}_3, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$. D'altra parte, essendo \mathcal{F}_3 abeliano, sarà $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = \mathbf{0}$ per $i, j = 1, 2, 3$, sicché $\{\mathcal{U}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ è generato su $L_2(\mathbb{R}^3)$ dall'operatore $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$, dove $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3) := \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \partial_{x_1}\psi, \partial_{x_2}\psi, \partial_{x_3}\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)\}$. In definitiva $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ si ha $(\mathcal{U}(\mathbf{a})\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = e^{-i a_1 \mathfrak{p}_1} e^{-i a_2 \mathfrak{p}_2} e^{-i a_3 \mathfrak{p}_3} \psi(\mathbf{x})$, i.e.

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = e^{-i \mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{p} \equiv (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)^\top. \quad (5.14)$$

Consideriamo ora l'azione del gruppo ortogonale speciale $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ su $L_2(\mathbb{R}^3)$. Sia quindi $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ il gruppo generale lineare reale di dimensione tre, ovvero il gruppo delle matrici 3×3 invertibili a valori reali, ed $\text{SO}(3, \mathbb{R}) = \{\mathcal{R} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}), \mathcal{R}^\top \mathcal{R} = \mathbf{1}_3 = \mathcal{R} \mathcal{R}^\top, \det(\mathcal{R}) = +1\}$ la rappresentazione naturale del gruppo ortogonale speciale su \mathbb{R}^3 , i.e. il gruppo delle matrici ortogonali reali con determinante unitario. In particolare, sia $\mathcal{R}_\theta \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ una rotazione di un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ intorno all'asse \hat{x}_3 :

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathcal{R}_\theta(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{R}_\theta \mathbf{x} = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, x_3) \in \mathbb{R}^3$. La famiglia $\{\mathcal{R}_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$ individua un sottogruppo ad un parametro di $\text{SO}(3, \mathbb{R})$, il quale è continuo e connesso, sicché (per il teorema di Wigner) l'azione di ciascun \mathcal{R}_θ è implementata su $L_2(\mathbb{R}^3)$ da un operatore $\mathcal{U}_\theta(\cdot) : \psi \in L_2(\mathbb{R}^3) \mapsto (\mathcal{U}_\theta \psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathcal{R}_\theta^{-1} \mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3)$, la cui collezione forma a sua volta un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari²¹. Determiniamo il generatore di $\{\mathcal{U}_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$; è conveniente ricorrere al fatto che $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ è di Lie, per cui è lecito sviluppare ciascun elemento nell'intorno dell'identità: per $|\theta| \ll 1$ sarà $\mathcal{R}_\theta = \mathbf{1}_3 + \theta \Omega + \mathcal{O}(\theta^2)$ con $\Omega \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$. Dovendo soddisfare la condizione $\mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\theta^\top = \mathbf{1}_3$, la matrice $\Omega \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ dev'essere *antisimmetrica*, infatti

$$\mathbf{1}_3 = \mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\theta^\top = \mathbf{1}_3 + \theta(\Omega + \Omega^\top) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad \iff \quad \Omega^\top = -\Omega,$$

avendo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore al primo. In particolare, dev'essere

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenendo presente che $\mathcal{R}_\theta^{-1} \simeq \mathbf{1}_3 - \theta \Omega$ ed indicando con \mathcal{A} il generatore del gruppo, si trova che $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ fattorizzabile nel prodotto di una funzione radiale ed una armonica sferica²² è

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\psi)(\mathbf{x}) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [\mathcal{U}_\theta - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}] \psi(\mathbf{x}) = i \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\psi(x_1 + \theta x_2, x_2 - \theta x_1, x_3) - \psi(x_1, x_2, x_3)}{\theta} \\ &= i \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta x_2 \partial_{x_1} \psi(\mathbf{x}) - \theta x_1 \partial_{x_2} \psi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\theta^2)}{\theta} = i(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) \psi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ma $\mathfrak{L}_3 = \frac{1}{2}(\mathfrak{q}_1 \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_2 \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_2 \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1 \mathfrak{q}_2) \xrightarrow{\text{R.S.}} i(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2})$ per cui $\mathcal{A} = \mathfrak{L}_3$. Risulta allora che una rotazione di un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ intorno all'asse \hat{x}_3 è implementata su $L_2(\mathbb{R}^3)$ da un operatore unitario \mathcal{U}_θ il cui generatore è individuato dalla terza componente dell'operatore momento angolare, i.e. $\mathcal{U}_\theta = e^{-i\theta \mathfrak{L}_3}$. Si dimostra in modo analogo che se $\theta \in [0, 2\pi)$ è l'angolo relativo alla rotazione intorno ad un generico asse \hat{n} , allora $\mathcal{U}_\theta = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \mathfrak{L}}$, dove $\mathfrak{L} \equiv (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3)^\top$ è l'operatore momento angolare.

Consideriamo infine l'azione su $L_2(\mathbb{R}^{3+1})$ delle traslazioni temporali. Sia $\mathcal{T}_s(\cdot) : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{T}_s(t) = t + s \in \mathbb{R}$ la rappresentazione naturale su \mathbb{R} del gruppo delle traslazioni temporali; com'è immediato dimostrare, la famiglia $\{\mathcal{T}_s, s \in \mathbb{R}\}$ individua un gruppo connesso ad un parametro rispetto all'operazione di somma e la sua azione su $L_2(\mathbb{R}^{3+1})$ è implementata da un operatore unitario \mathcal{U}_s t.c. $\mathcal{U}_s(\cdot) : \psi(\mathbf{x}, t) \in$

²¹Tali proprietà si dimostrano procedendo come per il gruppo delle traslazioni.

²²Passando in armoniche sferiche, si dimostra che $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ è composto dalle $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ fattorizzabili come $\psi_{\ell, m}(r, \theta, \phi) = \mathcal{R}(r) \mathcal{Y}_{\ell, m}(\theta, \phi)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$; \mathcal{R} è detta componente radiale e le $\mathcal{Y}_{\ell, m}$ sono le note armoniche sferiche.

$L_2(\mathbb{R}^{3+1}) \mapsto (\mathcal{U}_s \psi)(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, \mathcal{T}_s^{-1} t) \psi(\mathbf{x}, t - s) \in L_2(\mathbb{R}^{3+1})$. La famiglia $\{\mathcal{U}_s, s \in \mathbb{R}\}$ individua un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari, avente come generatore l'operatore

$$(\mathcal{A}\psi)(\mathbf{x}, t) = \iota \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(\mathbf{x}, t - s) - \psi(\mathbf{x}, t)}{s} = \iota \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} = \iota \partial_t.$$

D'altronde $\mathcal{E} \xrightarrow{\text{R.S.}} -\iota \partial_t$, essendo \mathcal{E} l'energia del sistema, per cui $(\mathcal{U}_s \psi)(\mathbf{x}, t) = (e^{-\iota s \mathcal{E}} \psi)(\mathbf{x}, t)$. Si noti che, sebbene \mathcal{E} non sia un operatore, se ne da ugualmente una rappresentazione operatoriale al fine di distinguere la sua azione (una pura traslazione temporale), da quella dell'hamiltoniano $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$, contenente invece le informazioni relative alla dinamica del sistema. Anche quest'ultimo, difatti, soddisfa l'equazione $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\iota \mathcal{H} \mathbf{x}(t)$, sicché se $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$ ed $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, allora esiste ed è unica la soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\iota t \mathcal{H}} \mathbf{x}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$. In questo senso $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ viene interpretato come il *generatore dell'evoluzione temporale* del sistema. Discuteremo questo argomento nel prossimo paragrafo.

Prima di passare a tale argomento, vediamo come si trasformano gli operatori $(\mathbf{q}, \mathcal{D}_{\mathbf{q}})$ e $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ sotto traslazioni spaziali e rotazioni. Interpretando passivamente l'azione del gruppo di trasformazioni sulle osservabili, avremo che $A \xrightarrow{\tau} A' = \mathcal{U}_\tau A \mathcal{U}_\tau^{-1}$. Cominciamo con l'azione di $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ su $(\mathbf{q}, \mathcal{D}_{\mathbf{q}})$, dove $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top$ è la tripla di operatori di posizione in $L_2(\mathbb{R}^3)$. Pertanto $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta

$$(\mathbf{q}' \psi)(\mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{\mathbf{a}} \mathbf{q} \mathcal{U}_{\mathbf{a}}^{-1} \psi)(\mathbf{x}) = (\mathbf{q} \mathcal{U}_{\mathbf{a}}^{-1} \psi)(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) (\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^{-1} \psi)(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = [(\mathbf{q} - \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}) \psi](\mathbf{x}),$$

avendo osservato che $\mathbf{q} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \psi(\mathbf{x})$. Essendo valida $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ dev'essere

$$\mathbf{q} \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbf{a}}} \mathbf{q}' = \mathbf{q} - \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.16)$$

D'altronde sappiamo che $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ individua il generatore del gruppo delle traslazioni: adoperando quindi una trasformazione infinitesima, troviamo

$$\mathbf{q} - \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} = e^{-\iota \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} e^{\iota \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} = \mathbf{q} - \iota [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{q} - \mathbf{q} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})] + \mathcal{O}(a^2).$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo in \mathbf{a} e leggendo l'uguaglianza precedente componente per componente, i.e. $[(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}), (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top] = \iota (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)^\top \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}$, si ha che

$$\begin{cases} a_1 [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1] + a_2 [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2] + a_3 [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_3] = \iota a_1 \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} & \Longleftrightarrow & \begin{cases} [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1] = \iota \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \\ [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2] = \mathbf{0} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_3], \end{cases} \\ a_1 [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1] + a_2 [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2] + a_3 [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_3] = \iota a_2 \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} & \Longleftrightarrow & \begin{cases} [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2] = \iota \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \\ [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1] = \mathbf{0} = [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_3], \end{cases} \\ a_1 [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_1] + a_2 [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_2] + a_3 [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3] = \iota a_3 \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} & \Longleftrightarrow & \begin{cases} [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3] = \iota \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \\ [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_1] = \mathbf{0} = [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_2]. \end{cases} \end{cases}$$

In definitiva, le precedenti condizioni si riassumono nella regola di commutazione canonica

$$[\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] = \iota \delta_{ij} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.17)$$

Sia ora $\mathcal{R}_\theta \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ una rotazione di $\theta \in [0, 2\pi)$ intorno all'asse \hat{x}_3 : $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta

$$(\mathbf{q}' \psi)(\mathbf{x}) = (\mathcal{U}_\theta \mathbf{q} \mathcal{U}_\theta^{-1} \psi)(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_\theta^{-1} \mathbf{x} (\mathcal{U}_\theta^{-1} \psi)(\mathcal{R}_\theta^{-1} \mathbf{x}) = (\mathcal{R}_\theta^{-1} \mathbf{q} \psi)(\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{q} \xrightarrow{\mathcal{R}_\theta} \mathbf{q}' = \mathcal{R}_\theta^{-1} \mathbf{q},$$

dove $\mathcal{R}_\theta^{-1} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top$ va intesa come prodotto matrice-"vettore". Determiniamo le regole di commutazione tra \mathbf{q} ed \mathcal{L}_3 : sia quindi la trasformazione infinitesima $\mathcal{R}_\theta^{-1} \simeq \mathbf{1}_3 - \theta \Omega_3$ (posto $\Omega \equiv \Omega_3$), sicché

$$(\mathbf{1}_3 - \theta \Omega_3) \mathbf{q} \simeq e^{-\iota \theta \mathcal{L}_3} \mathbf{q} e^{\iota \theta \mathcal{L}_3} = \mathbf{q} + \iota \theta [\mathbf{q}, \mathcal{L}_3] + \mathcal{O}(\theta^2).$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo in θ otteniamo le relazioni

$$[\mathbf{q}, \mathfrak{L}_3] = \imath\Omega_3\mathbf{q} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} [\mathbf{q}_1, \mathfrak{L}_3] = -\imath\mathbf{q}_2, \\ [\mathbf{q}_2, \mathfrak{L}_3] = \imath\mathbf{q}_1, \\ [\mathbf{q}_3, \mathfrak{L}_3] = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Analogamente, per rotazioni di $\phi \in [0, 2\pi)$ attorno a \hat{x}_2 e di $\varphi \in [0, 2\pi)$ attorno a \hat{x}_1 si trova rispettivamente $[\mathbf{q}, \mathfrak{L}_2] = \imath\Omega_2\mathbf{q}$ e $[\mathbf{q}, \mathfrak{L}_1] = \imath\Omega_1\mathbf{q}$, essendo $\mathcal{R}_\phi \approx \mathbb{1}_3 + \phi\Omega_2$ e $\mathcal{R}_\varphi \approx \mathbb{1}_3 + \varphi\Omega_1$, dove

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando le precedenti, si giunge alla nota regola di commutazione tra \mathbf{q} e \mathfrak{L} :

$$[\mathbf{q}_i, \mathfrak{L}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{q}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.18)$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore di *Levi-Civita*. Diremo allora che \mathbf{q} è un *operatore vettoriale*, nel senso che si trasforma come un vettore rispetto ad $\text{SO}(3, \mathbb{R})$. Passiamo all'azione su $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$: $\forall \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3)$ è

$$(\mathbf{p}'\psi)(\mathbf{x}) = -\imath\mathcal{R}_\theta^{-1} \frac{\partial(\mathcal{U}_\theta\psi)}{\partial\mathbf{x}}(\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathbf{x}) = (\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathbf{p}\psi)(\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{R}_\theta} \mathbf{p}' = \mathcal{R}_\theta^{-1}\mathbf{p}.$$

Come \mathbf{q} , anche \mathbf{p} è un operatore vettoriale e soddisfa pertanto la regola di commutazione

$$[\mathbf{p}_i, \mathfrak{L}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{p}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

Occupiamoci infine delle regole di commutazione soddisfatte dai generatori delle rotazioni, i.e. $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3)$. Poiché $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ è non-abeliano, ci aspettiamo che le componenti di \mathfrak{L} non commutino tra loro. Siano quindi $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ed \mathcal{R}_3 gli operatori di \mathbb{R}^3 associati alle rotazioni attorno agli assi \hat{x}_1, \hat{x}_2 ed \hat{x}_3 rispettivamente. Consideriamo la seguente composizione di rotazioni infinitesime:

$$\mathcal{R}_{2,\theta}^{-1}\mathcal{R}_{1,\theta}^{-1}\mathcal{R}_{2,\theta}\mathcal{R}_{1,\theta} \approx (\mathbb{1}_3 - \theta\Omega_2)(\mathbb{1}_3 - \theta\Omega_1)(\mathbb{1}_3 + \theta\Omega_2)(\mathbb{1}_3 + \theta\Omega_1) = \mathbb{1} - \theta^2[\Omega_1, \Omega_2] + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Tenendo presente la forma della matrici Ω_i per $i = 1, 2, 3$, troviamo $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_3$ per cui

$$\mathcal{R}_{2,\theta}^{-1}\mathcal{R}_{1,\theta}^{-1}\mathcal{R}_{2,\theta}\mathcal{R}_{1,\theta} \approx \mathbb{1}_3 - \theta^2\Omega_3 \approx \mathcal{R}_{3,\theta^2}^{-1}.$$

Pertanto, gli operatori $\mathcal{U}_{i,\theta}$ per $i = 1, 2, 3$ dovranno soddisfare un'espressione analoga, a meno di un fattore di fase $\omega = \omega(1, 2)$ (legato alla non-commutatività tra \mathfrak{L}_1 ed \mathfrak{L}_2), in altre parole

$$\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3) \quad (\mathcal{U}_{1,\theta}^{-1}\mathcal{U}_{2,\theta}^{-1}\mathcal{U}_{1,\theta}\mathcal{U}_{2,\theta}\psi)(\mathbf{x}) = e^{i\omega}(\mathcal{U}_{3,\theta^2}\psi)(\mathbf{x}).$$

Per trovare le regole di commutazione, riscriviamo quest'ultima relazione in forma infinitesima:

$$\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} - \theta^2[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] \approx e^{i\omega}e^{-i\theta^2\mathfrak{L}_3} \approx \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}(1 + i\omega) - i\theta^2\mathfrak{L}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] = \imath\mathfrak{L}_3 - \omega_{1,2}\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

dove $\omega_{1,2} \equiv \omega(1, 2)/\theta^2$. Procedendo analogamente per le altre componenti si trova

$$[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathfrak{L}_k - \omega_{ij}\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

Il fattore di fase ω_{ij} deve soddisfare la proprietà di antisimmetria del commutatore, per cui

$$\imath\epsilon_{ijk}\mathfrak{L}_k - \omega_{ij}\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} = [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = -[\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_i] = -\imath\epsilon_{jik}\mathfrak{L}_k + \omega_{ji}\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Possiamo porre $\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\beta_k$, con $\beta_k \in \mathbb{R} \forall k = 1, 2, 3$, di modo che $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = \imath\epsilon_{ijk}(\mathfrak{L}_k - \beta_k\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})$; si può così rimuovere l'identità sostituendo $\mathfrak{L}_i \mapsto \mathfrak{L}_i + \beta_i\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}$ per $i = 1, 2, 3$, cosicché

$$[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathfrak{L}_k. \quad (5.20)$$

La sostituzione precedente fa sì che $\mathcal{U}_{i,\theta} \mapsto \mathcal{U}_{i,\theta} = e^{i\theta\beta_i}e^{-i\theta\mathfrak{L}_i}$; tali operatori sono unitari e la loro collezione forma ancora un gruppo ad un parametro fortemente continuo.

6 EVOLUZIONE TEMPORALE ED EQUAZIONI DEL MOTO

A completamento della struttura formale della Meccanica Quantistica, introduciamo alcune nozioni utili alla descrizione della *dinamica* di un dato sistema quantistico \mathcal{S} . Supponiamo quindi di aver preparato \mathcal{S} in un determinato stato ρ ed assumiamo che il sistema evolva indisturbato nell'intervallo di tempo che separa due misurazioni successive; sia t_0 la coordinata temporale alla quale \mathcal{S} inizia la sua evoluzione e $t > t_0$ quella che specifica il momento nel quale una nuova misurazione viene effettuata. Poiché tutti i possibili stati puri sono rappresentati da raggi di un unico spazio proiettivo \mathcal{PH}_S , è lecito assumere che \mathcal{H}_S sia stabile rispetto all'evoluzione temporale. Ne segue che dev'essere possibile descrivere l'evoluzione temporale indisturbata di \mathcal{S} mediante un'applicazione di \mathcal{H}_S in sé tale che

$$|\psi\rangle \equiv |\psi(t_0)\rangle \longmapsto |\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_S, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_S.$$

In particolare, per uno stato miscela del tipo $\rho \equiv \sum_n \omega_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, avremo che

$$\rho \equiv \rho(t_0) \longmapsto \rho(t) = \sum_n \omega_n |\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|,$$

dove le probabilità $\{\omega_n\}_n$ sono costanti nel tempo. Possiamo pertanto introdurre il seguente quarto assioma della Meccanica Quantistica relativo all'evoluzione temporale di un sistema quantistico.

QUARTO ASSIOMA (EVOLUZIONE TEMPORALE)

L'evoluzione indisturbata di un sistema quantistico \mathcal{S} dall'istante iniziale t_0 a quello finale $t > t_0$ è realizzata mediante una trasformazione di simmetria \mathcal{T}_{t,t_0} su \mathcal{H}_S .

Poiché $\mathcal{T}_{t_0,t_0} = \mathbb{1}$, la naturale richiesta di continuità di $\{\mathcal{T}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}, t > t_0\}$ induce l'unitarietà del gruppo ad un parametro $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}, t > t_0\}$ su \mathcal{H}_S (teorema di Wigner); abbiamo quindi

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}_{t,t_0} |\psi(t_0)\rangle \quad \text{e} \quad \rho(t) = \mathcal{U}_{t,t_0} \rho(t_0) \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger, \quad (6.1)$$

dove $\mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} = \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{U}_{t,t_0}$. Le equazioni di evoluzione (6.1) valgono indipendentemente da che il sistema sia isolato o meno. Se \mathcal{S} è isolato (i.e. se $\partial_t \mathcal{H} = 0$) allora l'evoluzione temporale è invariante per traslazioni dell'origine dei tempi e l'azione di \mathcal{H} su \mathcal{H}_S è implementata dall'operatore unitario $\mathcal{U}_{t,t_0} = e^{-i(t-t_0)\mathcal{H}}$ con $t, t_0 \in \mathbb{R}$, ottenuto come *soluzione forte* del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} = -i\mathcal{H} \mathcal{U}_{t,t_0}, \\ \mathcal{U}_{t_0,t_0} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Se invece \mathcal{H} dipende esplicitamente dal tempo, allora è possibile procedere nel modo seguente. Il quarto postulato ed il teorema di Wigner garantiscono che $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}\}$ è ancora un gruppo ad un parametro di operatori unitari²³. Supponiamo che \mathcal{U}_{t,t_0} soddisfi un'equazione analoga alla (6.2): identicamente

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} = \mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,t_0} \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}(t) \equiv i \left(\frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} \right) \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1}. \quad (6.3)$$

²³Si noti che, sebbene l'unitarietà di ciascun \mathcal{U}_{t,t_0} sia garantita, non c'è ragione a priori per richiedere che $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}, t > t_0\}$ formi un gruppo ad un parametro per fissato t_0 , in quanto $\forall t_1 \in [t_0, t]$

$$\mathcal{U}_{t,t_1} \mathcal{U}_{t_1,t_0} = e^{i\omega(t,t_1,t_0)} \mathcal{U}_{t,t_0},$$

dove $\omega(t, t_1, t_0)$ è un fattore di fase dipendente a priori dagli estremi di ciascun intervallo temporale. D'altra parte, l'associatività del gruppo additivo $(\mathbb{R}^+, +)$ impone che $\omega(t, t_1, t_0)$ soddisfi la relazione

$$\omega(t, t_1, t_0) = \tilde{\omega}(t, t_1) + \tilde{\omega}(t_1, t_0) - \tilde{\omega}(t, t_0),$$

per cui possiamo ridefinire $\mathcal{U}_{t,t_0} \mapsto e^{i\tilde{\omega}(t,t_0)} \mathcal{U}_{t,t_0}$ senza perdere in generalità; in questo modo

$$\mathcal{U}_{t,t_1} \mathcal{U}_{t_1,t_0} = \mathcal{U}_{t,t_0}, \quad \forall t_1 \in [t_0, t].$$

Dunque $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}, t > t_0\}$ forma un gruppo ad un parametro di operatori unitari $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ con $t \geq t_0$.

Per come definito, $\mathcal{H}(t)$ è autoaggiunto essendo \mathcal{U}_{t,t_0} unitario (infatti $\mathcal{H}^\dagger(t) - \imath(d_t \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1})\mathcal{U}_{t,t_0}$ ed $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} \Rightarrow d_t \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = -\mathcal{U}^\dagger d_t \mathcal{U}$) ed è indipendente da t_0 . Occorrerà allora risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} = -\imath \mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,t_0}, \\ \mathcal{U}_{t_0,t_0} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \end{cases} \iff \mathcal{U}_{t,t_0} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} - \imath \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') \mathcal{U}_{t',t_0} dt'.$$

L'equazione integrale precedente può formalmente essere risolta per iterazione, osservando che

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}_{t,t_0}^{(n)}, \quad \mathcal{U}_{t,t_0}^{(n)} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} - \imath \int_{t_0}^t \mathcal{U}_{t',t_0}^{(n-1)} \mathcal{H}(t') dt', \quad \mathcal{U}_{t,t_0}^{(0)} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (6.4)$$

dove il limite è ancora una volta inteso in senso forte. Si genera in questo modo la *serie di Dyson*

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-\imath)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1. \quad (6.5)$$

Una forma più elegante e compatta della precedente può essere ottenuta introducendo il cosiddetto **prodotto cronologicamente ordinato** (semplicemente *prodotto T-ordinato*) di operatori

$$\mathbb{T}\{\mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n)\} = \sum_{\pi \in S_n} \theta(t_{\pi_1}, t_{\pi_2}, \dots, t_{\pi_n}) \mathcal{H}(t_{\pi_1}) \mathcal{H}(t_{\pi_2}) \cdots \mathcal{H}(t_{\pi_n}),$$

dove S_n è il gruppo delle permutazioni e $\theta(t_1, \dots, t_n)$ è la *funzione di Heaviside* a molteplici argomenti

$$\theta(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_1 > t_2 > \cdots > t_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tenendo conto delle precedenti definizioni, il termine n -esimo della (6.5) si riscrive come

$$(-\imath)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_n} \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1 = \frac{1}{n!} \mathbb{T} \left(-\imath \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') dt' \right)^n,$$

e quindi la (6.5) si riscrive elegantemente in termini del cosiddetto *esponenziale T-ordinato*:

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = \mathbb{T} e^{-\imath \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') dt'}. \quad (6.6)$$

Se $[\mathcal{H}(t'), \mathcal{H}(t'')] = \mathbb{O}$ per ogni $t', t'' \in [t_0, t]$, l'ordinamento è irrilevante ed il simbolo \mathbb{T} può essere omissso; inoltre, nel caso in cui \mathcal{H} non dipende esplicitamente dal tempo, la (6.6) si riduce all'espressione di \mathcal{U}_{t,t_0} per sistemi isolati, i.e. $\mathcal{U}_{t,t_0} = e^{-\imath(t-t_0)\mathcal{H}}$.

Il ragionamento esposto rappresenta grossomodo l'inverso del contenuto del teorema enunciato di seguito, con la quale si dimostra (tra le altre cose) che la serie di Dyson converge uniformemente (i.e. rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}_S)$ ²⁴) ad \mathcal{U}_{t,t_0} . Preliminarmente, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE (PROPAGATORE UNITARIO) - Sia $\{\mathcal{U}_{t,s}, t, s \in \mathbb{R}\}$ una famiglia a due parametri di operatori unitari definiti su \mathcal{H}_S . Diremo che tale famiglia forma un **propagatore unitario** se

$$(a) \quad \mathcal{U}_{t,r} \mathcal{U}_{r,s} = \mathcal{U}_{t,s}, \quad (b) \quad \mathcal{U}_{t,t} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (c) \quad \mathcal{U}_{t,s} \text{ è fortemente continuo in } t \text{ ed } s.$$

TEOREMA (SERIE DI DYSON) - Sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ e $t \mapsto \mathcal{H}(t)$ fortemente continua da \mathbb{R} in $B(\mathcal{H}_S)$ Esiste allora un propagatore unitario $\{\mathcal{U}_{t,s}, t, s \in \mathbb{R}\} : \forall t, s \in \mathbb{R}, \mathcal{U}_{t,s}$ è soluzione forte dell'equazione

$$\partial_t \mathcal{U}_{t,s} = -\imath \mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,s}.$$

²⁴Dove $B(\mathcal{H}_S)$ è lo spazio normato degli operatori lineari limitati da \mathcal{H}_S in sé, munito della usuale norma operatoriale.

OSSERVAZIONE – Il teorema richiede che $\mathcal{H} \in B(\mathcal{H}_S)$: ciò non rappresenta una grossa limitazione dal momento che, nella maggior parte dei casi, la dipendenza di \mathcal{H} dal tempo è dovuta al termine potenziale \mathcal{V} , ovvero $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = \mathcal{K}(\mathbf{p}) + \mathcal{V}(\mathbf{q}, t)$ e l'operatore $\mathcal{K}(\mathbf{p})$ è (in generale) non-limitato ed autoaggiunto. In tal caso la serie di Dyson è di aiuto: passando in **rappresentazione d'interazione**, definiamo

$$\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q}, t) := e^{it\mathcal{K}(\mathbf{p})} \mathcal{V}(\mathbf{q}, t) e^{-it\mathcal{K}(\mathbf{p})}. \quad (6.7)$$

Pertanto, se $t \mapsto \mathcal{V}(\cdot, t)$ soddisfa le ipotesi del teorema, lo stesso vale per $t \mapsto \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, t)$ ed esiste quindi un propagatore unitario $\{\tilde{\mathcal{U}}_{t,s}, t, s \in \mathbb{R}\}$ ad essa associato; dunque, definendo con

$$\mathcal{U}_{t,s} \equiv e^{-it\mathcal{K}(\mathbf{p})} \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}(\mathbf{p})},$$

troviamo che, formalmente, l'operatore $\mathcal{U}_{t,s}$ soddisfa la seguente equazione

$$\partial_t \mathcal{U}_{t,s} = -i\mathcal{K}e^{-it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}} - ie^{-it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{V}}(t) \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}} = -i(\mathcal{K} + \mathcal{V}(t)) \mathcal{U}_{t,s},$$

per cui $|\psi_s(t)\rangle = \mathcal{U}_{t,s}|\psi\rangle$ è soluzione in senso forte dell'equazione

$$\partial_t |\psi_s(t)\rangle = -i(\mathcal{K}(\mathbf{p}) + \mathcal{V}(\mathbf{q}, t)) |\psi_s(t)\rangle, \quad |\psi_s(s)\rangle = |\psi\rangle. \quad (6.8)$$

La precedente può creare alcuni problemi: l'operatore $\mathcal{K} \mathcal{U}_{t,s} |\psi\rangle = e^{-it\mathcal{K}} \mathcal{K} \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}} |\psi\rangle$ può non esser definito, dal momento che $\tilde{\mathcal{U}}_{t,s} |\psi\rangle$ può non appartenere al dominio di \mathcal{K} , sebbene $|\psi\rangle$ lo sia. Si può tuttavia dimostrare che la (6.8) ha senso se la mappa $t \mapsto [\mathcal{K}, \mathcal{V}(t)]$ è fortemente continua.

Lo sviluppo di Dyson è utile, ad esempio, nel calcolo delle probabilità di transizione. Sia \mathcal{K} l'hamiltoniano di particella libera e $|\psi_k\rangle, |\psi_l\rangle \in \mathcal{H}_S$ due autostati di \mathcal{K} corrispondenti agli autovalori $\lambda_k, \lambda_l \in \mathbb{R}$, rispettivamente: in assenza di un potenziale esterno, se $|\psi_k\rangle$ è lo stato iniziale del sistema si ha che $e^{it\mathcal{K}} |\psi_k\rangle = e^{i\lambda_k t} |\psi_k\rangle$ ed \mathcal{S} resterà in $|\psi_k\rangle$; se però accendiamo per un certo intervallo di tempo un potenziale $\mathcal{V}(t)$, la dinamica sarà data da $e^{-it\mathcal{K}} \mathcal{U}_{t,0} |\psi_k\rangle$ e la probabilità che \mathcal{S} al tempo t sia in $|\psi_l\rangle$ è data dal modulo quadro del prodotto scalare

$$\begin{aligned} \langle \psi_l | e^{it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{U}}_{t,0} | \psi_k \rangle &= \langle \psi_l | e^{-it\mathcal{K}} | \psi_k \rangle - i \int_0^t \langle \psi_l | e^{-it_1\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{V}}(t_1) | \psi_k \rangle dt_1 + \dots \\ &= -i \int_0^t e^{-i\lambda_l t} e^{-i(\lambda_k - \lambda_l)t_1} \langle \psi_l | \mathcal{V}(t_1) | \psi_k \rangle dt_1 + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned}$$

dove i termini contenuti in $\mathcal{O}(t^2)$ possono essere stimati calcolando le code della serie di Dyson²⁵.

6.1 Equazioni del moto e leggi di conservazione. Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto le equazioni di evoluzione (6.1); si è detto che entrambe descrivono l'evoluzione indisturbata di \mathcal{S} nell'intervallo temporale $[t_0, t]$. Ci siamo quindi concentrati sull'analisi delle proprietà del gruppo $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}, t \geq t_0\}$ ed abbiamo osservato che ciascun \mathcal{U}_{t,t_0} soddisfa (in senso forte) un'equazione di evoluzione della forma (6.2). Vediamo ora come descrivere la dinamica di \mathcal{S} dal punto di vista dei vettori di stato e delle osservabili. Per cominciare, consideriamo la prima delle equazioni in (6.1): differenziando ambo i membri rispetto a t ed invocando la definizione formale (6.3) per $\mathcal{H}(t)$, si trova

$$\partial_t |\psi(t)\rangle = (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0}) |\psi(t_0)\rangle = -i\mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,t_0} |\psi(t_0)\rangle = -i\mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (6.9)$$

i.e. l'equazione di Schrödinger temporale in forma astratta. Sia ora la seconda equazione in (6.1): procedendo come per la (6.9), abbiamo $\dot{\rho}(t) = (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0}) \rho(t_0) \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1} - \mathcal{U}_{t,t_0} \rho(t_0) \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1} (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0}) \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1}$, da cui

$$\dot{\rho}(t) = i[\rho(t), \mathcal{H}(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (6.10)$$

²⁵Si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, Vol. 2, Academic Press, Inc. (1975)*.

la quale è nota in letteratura come **equazione di Liouville–von Neumann**.

Le equazioni (6.9) ed (6.10) descrivono equivalentemente la dinamica di \mathcal{S} ; in particolare, entrambe racchiudono le informazioni relative all'evoluzione temporale nei vettori di stato, mantenendo le osservabili fisse nel tempo. Tale approccio all'analisi delle proprietà dinamiche di \mathcal{S} è noto come *interpretazione* (o "*pittura*") *di Schrödinger*. Equivalentemente, è possibile interpretare la dinamica di \mathcal{S} nel modo opposto, vale a dire mantenendo fissi i vettori di stato e facendo evolvere le osservabili. Dal punto di vista del formalismo della Meccanica Quantistica, il passaggio dall'interpretazione alla Schrödinger a quest'ultima è immediato: all'istante t_0 tutte le informazioni sullo stato $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$ di \mathcal{S} sono contenute nell'insieme dei valori medi $\langle \mathcal{A} \rangle_{\rho_0} = \text{Tr}(\rho_0 \mathcal{A})$ al variare dell'osservabile \mathcal{A} ; tali informazioni cambiano nel tempo (durante l'evoluzione indisturbata di \mathcal{S}), secondo l'equazione

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{\rho_0} \longmapsto \langle \mathcal{A} \rangle_{\rho(t)} = \text{Tr}[\rho(t) \mathcal{A}] = \text{Tr}(\mathcal{U}_{t,t_0} \rho_0 \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{A}).$$

Sfruttando la proprietà di ciclicità della traccia, la precedente ammette due interpretazioni equivalenti:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{\rho(t)} = \text{Tr}[\rho(t) \mathcal{A}] = \text{Tr}(\mathcal{U}_{t,t_0} \rho_0 \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{A}) = \text{Tr}(\rho_0 \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{A} \mathcal{U}_{t,t_0}) = \langle \mathcal{A}_H(t) \rangle_{\rho_0}, \quad (6.11)$$

dove $\mathcal{A}_H(t)$ rappresenta l'evoluzione temporale (interpretata passivamente) di $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_H(t_0)$, i.e.

$$\mathcal{A}_H(t) := \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{A} \mathcal{U}_{t,t_0}. \quad (6.12)$$

L'interpretazione della dinamica di \mathcal{S} riassunta nelle ultime due uguaglianze della (6.11) prende il nome di *interpretazione alla Heisenberg* (da cui il suffisso H nelle precedenti). Procedendo come per le equazioni (6.9) ed (6.10), è possibile ottenere l'equazione di evoluzione per \mathcal{A}_H : differenziando ambo i membri della (6.12) rispetto a t si trova $d_t \mathcal{A}_H(t) = (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger) \mathcal{A}(t) \mathcal{U}_{t,t_0} + \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger (\partial_t \mathcal{A}(t)) \mathcal{U}_{t,t_0} + \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{A}(t) (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0})$; d'altronde dalla (6.3) si ha $\mathcal{H}_H(t) = \imath \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0})$ e dall'unitarietà $\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger = -\mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger (\partial_t \mathcal{U}_{t,t_0}) \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger$. Sostituendo le precedenti nell'espressione per $d_t \mathcal{A}_H$, otteniamo

$$\frac{d \mathcal{A}_H(t)}{d t} = \imath [\mathcal{H}_H(t), \mathcal{A}_H(t)] + (\partial_t \mathcal{A}(t))_H, \quad (6.13)$$

dove l'ultimo termine è presente se e solo se l'operatore \mathcal{A} dipende esplicitamente dal tempo. L'equazione di evoluzione (6.13) prende allora il nome di **equazione del moto di Heisenberg**²⁶.

Consideriamo ora l'evoluzione temporale dei valori di aspettazione dell'osservabile \mathcal{A} . Tenendo presenti le equazioni di evoluzione di Liouville–von Neumann (6.10) e di Heisenberg (6.13), otteniamo le espressioni per l'equazione di **equazione di Hamilton–Ehrenfest**

$$\text{Schrödinger} \quad : \quad \frac{d}{d t} \langle \mathcal{A}(t) \rangle_{\rho(t)} = \imath \text{Tr} \left([\rho(t), \mathcal{H}(t)] \mathcal{A}(t) \right) + \langle \partial_t \mathcal{A}(t) \rangle_{\rho(t)}, \quad (6.14)$$

$$\text{Heisenberg} \quad : \quad \frac{d}{d t} \langle \mathcal{A}(t) \rangle_{\rho(t)} = \imath \text{Tr} \left(\rho_0 [\mathcal{H}_H(t), \mathcal{A}_H(t)] \right) + \langle (\partial_t \mathcal{A}(t))_H \rangle_{\rho_0}, \quad (6.15)$$

in pittura di Schrödinger e di Heisenberg, rispettivamente.

6.2 Stati stazionari, invarianze e leggi di conservazione. Possiamo ora discutere il ruolo delle invarianze e delle leggi di conservazione in Meccanica Quantistica. Nel §5.2 avevamo osservato che un'osservabile $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ è invariante rispetto alla trasformazione di simmetria τ sse $\mathcal{A} = \mathcal{U}_{\tau} \mathcal{A} \mathcal{U}_{\tau}^\dagger$, equivalentemente sse commuta con il generatore infinitesimo della trasformazione i.e. $[\mathcal{A}, \mathcal{X}] = \mathbf{0}$. Vediamo ora come queste proprietà di invarianza si traducono nel caso in cui la trasformazione di simmetria τ corrisponda (alla luce del quarto postulato) all'evoluzione dinamica del sistema.

Cominciamo dal caso di un sistema conservativo, i.e. tale per cui $\partial_t \mathcal{H} = 0$: dal momento che $[\mathcal{H}_H, \mathcal{H}_H] = \mathbf{0}$ ed $\mathcal{H}_H = \mathcal{H}$, è evidente dalla (6.13) che $d_t \mathcal{H} = \mathbf{0}$, equivalentemente che $d_t \langle \mathcal{H} \rangle_{\rho(t)} = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (vedi equazione (6.15)). In analogia col caso classico, si usa quindi identificare $\mathcal{H} = \mathcal{E}$

²⁶Si noti che l'equazione (6.13) e la (6.10) sono mutuamente esclusive, essendo legate a due interpretazioni complementari della dinamica in Meccanica Quantistica (come del resto è evidente dalla differenza di segno tra le due equazioni).

od $\langle \mathcal{H} \rangle_{\rho(t)} = \mathcal{E}$, essendo \mathcal{E} l'energia del sistema. Supponiamo ora che \mathcal{H} sia invariante rispetto ad una certa trasformazione di simmetria continua di \mathcal{H}_S avente $(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}})$ come generatore. Sovente i generatori delle trasformazioni di simmetria corrispondono a variabili dinamiche di \mathcal{S} (vedi §5.4) e dal momento che essi non dipendono esplicitamente da t , troviamo (alla luce dalla (6.15)) che $d_t \langle \mathcal{X} \rangle_{\rho(t)} = 0$. D'altra parte, se \mathcal{X} commuta con \mathcal{H} , allora anche una qualsiasi sua funzione $f = f(\mathcal{X})$ commuta con \mathcal{H} , per cui anche $\langle f(\mathcal{X}) \rangle$ è indipendente dal tempo. In particolare, scegliamo $f(\mathcal{X}) = \theta(\mathcal{X} - \chi)$: secondo quanto affermato, anche la probabilità che \mathcal{X} abbia autovalori (sullo stato $\rho(t)$) minori di χ è costante nel tempo, i.e. $\text{Prob}(\mathcal{X} < \chi | \rho(t)) \equiv |\langle \theta(\mathcal{X} - \chi) \rangle_{\rho(t)}|^2 = \text{costante}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, indipendentemente dallo stato iniziale. Una variabile dinamica che soddisfa tale proprietà è detta **costante del moto** del sistema.

OSSERVAZIONE – È importante non confondere il concetto di *costante del moto* da quello di *stato stazionario*. Supponiamo che \mathcal{H} non dipenda esplicitamente da t e che \mathcal{S} sia preparato in un autostato di \mathcal{H} corrispondente all'autovalore E_n , i.e. $\rho_0 = |E_n\rangle\langle E_n|$ con $\mathcal{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$. In tal caso la soluzione dell'equazione di Schrödinger è $|\psi(t)\rangle = e^{-itE_n}|E_n\rangle$; ne segue che il valore di aspettazione di *qualsiasi* variabile dinamica \mathcal{A} che non dipenda esplicitamente dal tempo è esso stesso indipendente dal tempo:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{\rho(t)} = \text{Tr}(\rho(t)\mathcal{A}) = \langle \psi(t) | \mathcal{A} | \psi(t) \rangle = \langle E_n | \mathcal{A} | E_n \rangle = \text{Tr}(\rho_0 \mathcal{A}) = \langle \mathcal{A} \rangle_{\rho_0},$$

ovvero $\rho(t) = \rho_0 \forall t \in \mathbb{R}$. Pertanto, uno stato stazionario è tale per cui i valori di aspettazione e le probabilità di *qualsiasi variabile dinamica* (che non dipenda esplicitamente dal tempo) sono costanti nel tempo; diversamente, una costante del moto è una variabile dinamica di \mathcal{S} i cui valori di aspettazione e probabilità sono costanti nel tempo *per ogni stato*.

Supponiamo ora che \mathcal{H} dipenda esplicitamente dal tempo; sappiamo che, per definizione, l'evoluzione temporale agisce su tutte le caratteristiche del sistema e quindi anche sulle altre trasformazioni di simmetria. Sotto l'aspetto formale, questo fatto si traduce in un passaggio dalla rappresentazione di Schrödinger a quella di Heisenberg: nella prima una trasformazione τ su \mathcal{H}_S è vista come generata da operazioni su \mathcal{S} ed è quindi implementata da un dato operatore \mathcal{U}_τ ; nella seconda, invece, τ è interpretata come corrispondenza tra variabili dinamiche ed è perciò implementata dall'operatore di Heisenberg

$$\mathcal{U}_\tau^H(t) = \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{U}_\tau \mathcal{U}_{t,t_0}. \quad (6.16)$$

Diremo quindi che una fissata trasformazione di simmetria di \mathcal{S} è una **invarianza** di \mathcal{S} sse essa commuta con l'evoluzione temporale del sistema stesso, ovvero sse

$$\mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{U}_\tau \mathcal{U}_{t,t_0} = e^{i\Phi(t,t_0)} \mathcal{U}_\tau, \quad (6.17)$$

la quale può essere riletta equivalentemente nella forma

$$\mathcal{U}_\tau \mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{U}_\tau^\dagger = e^{i\Phi(t,t_0)} \mathcal{U}_{t,t_0}, \quad (6.18)$$

esprimendo cioè l'invarianza dell'evoluzione temporale rispetto alla trasformazione di simmetria τ .

OSSERVAZIONE – Si noti che il fattore di fase nella (6.17) soddisfa le condizioni $\Phi(t_0, t_0) = 0$, $\Phi(t, t_0) = -\Phi(t_0, t)$ e $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) + \Phi(t_1, t_0)$, per cui $\Phi(t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$. Mostriamo ora che detto fattore può essere posto a zero a patto che risultino soddisfatte alcune naturali condizioni relative all'hamiltoniano \mathcal{H} . Differenziamo quindi la (6.18) rispetto a t e facciamo uso dell'equazione (6.3):

$$\mathcal{U}_\tau \mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{U}_\tau^\dagger = e^{i\Phi(t,t_0)} [\mathcal{H}(t) - \dot{\varphi}(t)] \mathcal{U}_{t,t_0}.$$

Invocando nuovamente la (6.18) troviamo in definitiva la relazione $\mathcal{U}_\tau \mathcal{H}(t) \mathcal{U}_\tau^\dagger = \mathcal{H}(t) - \dot{\varphi}(t)$; ne segue che se $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, allora \mathcal{U}_τ agisce come un operatore di traslazione su $\mathcal{H}(t)$. D'altronde sappiamo che perché \mathcal{H} sia fisicamente accettabile, lo spettro $\sigma(\mathcal{H})$ dev'essere inferiormente limitato per ogni t , per cui $\dot{\varphi}(t) = 0$ necessariamente e quindi $\Phi(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Si noti inoltre che, indipendentemente dalle

proprietà dello spettro di \mathcal{H} , se \mathcal{U}_τ è idempotente per un certo n naturale, i.e. $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathcal{U}_\tau^n = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, allora $e^{in\Phi} = 1$ ma $\Phi(t_0, t_0) = 0$, sicché $\Phi(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ per continuità.

Alla luce dell'unicità di \mathcal{U}_{t,t_0} a partire da $\mathcal{H}(t)$, riassumiamo le precedenti osservazioni nella seguente

DEFINIZIONE (INVARIANZA) - Sia τ una trasformazione di simmetria di \mathcal{S} ; τ è un'invarianza di \mathcal{S} sse

$$\mathcal{U}_\tau \mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{U}_\tau^\dagger = \mathcal{U}_{t,t_0} \quad \text{equiv.} \quad [\mathcal{K}_\tau, \mathcal{H}(t)] = \mathbf{0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (6.19)$$

essendo $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ l'hamiltoniano di \mathcal{S} e $(\mathcal{K}_\tau, \mathcal{D}_{\mathcal{K}_\tau})$ il generatore infinitesimo della trasformazione.

6.2.1 Trasformazioni dipendenti dal tempo. Nel paragrafo precedente si è tacitamente assunto che ciascuna trasformazione di simmetria τ di \mathcal{S} fosse indipendente dal tempo. Vediamo ora come rimuovere questa limitazione, considerando cioè la famiglia di trasformazioni di simmetria $\{\tau(t), t \in \mathbb{R}\}$ ²⁷ di \mathcal{S} . In tal caso la condizione di invarianza (6.19), va modificata tramite l'espressione

$$\mathcal{U}_{\tau(t)} \mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{U}_{\tau(t_0)} = e^{i\Phi(t,t_0)} \mathcal{U}_{t,t_0}. \quad (6.20)$$

Anche in questo caso le proprietà del gruppo $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}, t > t_0\}$ impongono che $\Phi(t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, sicché possiamo riassorbere il fattore di fase ponendo $\mathcal{U}_{\tau(t)} \equiv e^{i\varphi(t)} \mathcal{V}_\tau(t)$; la (6.20) diventa ora

$$\mathcal{V}_\tau(t) \mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{V}_\tau^\dagger(t_0) = \mathcal{U}_{t,t_0}. \quad (6.21)$$

Assumendo che ciascun $\mathcal{V}_\tau(t)$ sia unitario, possiamo rileggere equivalentemente la (6.21) in interpretazione alla Heisenberg, i.e. $\mathcal{V}_\tau(t) = \mathcal{U}_{t,t_0} \mathcal{V}_\tau(t_0) \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger$, ma $\mathcal{V}_\tau^H(t) = \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger \mathcal{V}_\tau(t) \mathcal{U}_{t,t_0}$ sicché $\mathcal{V}_\tau^H(t) = \mathcal{V}_\tau^H(t_0)$ e cioè $\mathcal{V}_\tau^H(t)$ è costante nel tempo. La condizione (6.21) esprime in modo equivalente la *covarianza* (i.e. l'invarianza in forma) delle equazioni di evoluzione di \mathcal{S} sotto l'azione della trasformazione di simmetria; infatti, differenziando rispetto a t la (6.21) ed invocando nuovamente la (6.3), troviamo

$$\partial_t \mathcal{V}_\tau(t) = i[\mathcal{V}_\tau(t), \mathcal{H}(t)], \quad (6.22)$$

la quale è formalmente equivalente alla (6.10). Se assumiamo inoltre che ciascun per ogni $t \in \mathbb{R}$ ciascun $\mathcal{V}_\tau(t)$ sia generato da un operatore $(\mathcal{K}_\tau(t), \mathcal{D}_{\mathcal{K}_\tau(t)})$, allora possiamo riscrivere la (6.22) nella forma

$$\partial_t \mathcal{K}_\tau(t) = i[\mathcal{K}_\tau(t), \mathcal{H}(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6.23)$$

Abbiamo così ottenuto da un lato la legge di trasformazione infinitesima per l'hamiltoniano e dall'altro la legge di conservazione per l'evoluto di Heisenberg del generatore infinitesimo $\mathcal{K}_\tau(t)$, i.e.

$$d_t \mathcal{K}_\tau^H(t) = i[\mathcal{H}_H(t), \mathcal{K}_\tau^H(t)] + (\partial_t \mathcal{K}_\tau(t))_H = \mathbf{0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (6.24)$$

avendo osservato che $(\partial_t \mathcal{K}_\tau(t))_H = i\mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger [\mathcal{K}_\tau(t), \mathcal{H}(t)] \mathcal{U}_{t,t_0} = i[\mathcal{K}_\tau^H(t), \mathcal{H}_H(t)]$.

7 GRUPPI DI SIMMETRIA E DI INVARIANZA

Discutiamo ora il ruolo che i gruppi di simmetria hanno in *Meccanica Quantistica non-relativistica*, i.e. laddove lo spazio-tempo è supposto omogeneo ed isotropo ed il tempo è assunto assoluto. Lo scopo ultimo sarà pertanto quello di implementare sull'Hilbert \mathcal{H}_S l'azione del gruppo di Galilei $G(3, 1)$ il quale, come vedremo, si compone di traslazioni spazio-temporali, rototraslazioni e trasformazioni galileiane pure (o *boost* di Galilei). A questo scopo, sarà conveniente interpretare *attivamente* le trasformazioni di simmetria sia sugli stati di \mathcal{S} che sulle sue osservabili²⁸. Tuttavia, è bene cominciare con alcuni richiami alle principali proprietà dell'*algebra di Lie* dei generatori di un *gruppo di Lie connesso*.

²⁷S'intende che la dipendenza di ciascuna trasformazione τ dal tempo t sia continua e fissata a priori, senza cioè alcun riferimento all'evoluzione temporale di \mathcal{S} . Vedremo più avanti un esempio importante legato alle trasformazioni di Galilei.

²⁸La ragione è legata al ruolo speciale rivestito dalla variabile tempo in Meccanica Quantistica. Nel §7.2 vedremo infatti che un'interpretazione attiva della traslazione $t \mapsto t + \tau$ conduce ad un ordinamento naturale nella composizione degli operatori unitari che ne implementano l'azione su \mathcal{H}_S .

7.1 Algebra di Lie, costanti di struttura ed estensione centrale. Sia quindi $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{S}, \circ)$ un gruppo di Lie connesso ed astratto ad r parametri e $\mathcal{T} \equiv \{\tau(g), g \in \mathcal{G}\}$ una collezione di trasformazioni di simmetria che realizza \mathcal{G} su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, i.e. un isomorfismo tra \mathcal{G} e \mathcal{T} t.c. $g \in \mathcal{G} \longleftrightarrow \tau(g) \in \mathcal{T}$. Alla luce del teorema di Wigner, esiste quindi una famiglia di operatori unitari $\{\mathcal{U}(g) \equiv \mathcal{U}_{\tau(g)}, g \in \mathcal{G}\}$ che implementa l'azione di ciascun elemento del gruppo astratto su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ a meno di un fattore di fase. Infatti, come abbiamo già avuto modo di osservare nel §5.2, l'insieme $\{\mathcal{U}(g), g \in \mathcal{G}\}$ individua (in generale) una *rappresentazione unitaria proiettiva* di \mathcal{G} su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, nel senso che

$$\mathcal{U}(g_1 \circ g_2) = e^{i\omega(g_1, g_2)} \mathcal{U}(g_1) \mathcal{U}(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}, \quad (7.1)$$

dove $\omega = \omega(g_1, g_2)$ prende il nome di *fattore di cociclo* (o *carica centrale*).

D'altra parte, essendo \mathcal{G} di Lie connesso, ciascuna trasformazione $\tau = \tau(g)$ può essere generata da trasformazioni infinitesime successive. Siano quindi $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ i parametri infinitesimi relative a tali trasformazioni in un intorno dell'elemento neutro di \mathcal{G} , $g(s_1, s_2, \dots, s_r)$ un generico elemento di \mathcal{G} in detto intorno ed $\mathcal{U}(g(s_1, s_2, \dots, s_r)) \equiv \mathcal{U}(s_1, s_2, \dots, s_r)$ l'operatore unitario ad esso associato. Come abbiamo più volte ripetuto nella sezione precedente, le fasi relative tra operatori appartenenti a sottogruppi ad un parametro (per i quali un solo parametro è variabile e gli altri sono mantenuti fissi) possono sempre essere scelte in modo che la rappresentazione sia vettoriale, i.e. di modo che

$$\mathcal{U}(\dots, s_i, \dots) \mathcal{U}(\dots, s_j, \dots) = \mathcal{U}(\dots, s_i + s_j, \dots).$$

Assumendo che ciascun sottogruppo sia fortemente continuo, possiamo invocare il teorema di Stone cosicché $\mathcal{U}(\dots, s_i, \dots) = e^{-is_i \mathcal{X}_i}$, essendo $(\mathcal{X}_i, \mathcal{D}_{\mathcal{X}_i})$ il generatore del sottogruppo corrispondente al parametro s_i . Ripetendo un ragionamento analogo per ciascun sottogruppo uniparametrico, si ottiene l'insieme di generatori $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_r\}$, per cui per un generico elemento del gruppo avremo che

$$\mathcal{U}(s_1, s_2, \dots, s_r) = \prod_{i=1}^r e^{-is_i \mathcal{X}_i}. \quad (7.2)$$

Combinando la precedente con la formula di trasformazione attiva per un'osservabile \mathcal{A} , troviamo

$$\mathcal{A}' = \left(\mathbb{1} + i \sum_{i=1}^r s_i \mathcal{X}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \mathcal{A} \left(\mathbb{1} - i \sum_{i=1}^r s_i \mathcal{X}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) = \mathcal{A} + i \sum_{i=1}^r s_i [\mathcal{X}_i, \mathcal{A}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

nell'ipotesi che $s_i \in \mathcal{O}(\varepsilon)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, r$. Pertanto, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, risulta

$$[\mathcal{X}_i, \mathcal{A}] = -i \partial_{s_i} \mathcal{A}' \Big|_{s_1 = \dots = s_r = 0}. \quad (7.3)$$

Vedremo più avanti come, una volta individuato un insieme irriducibile di osservabili $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots\}$ per \mathcal{S} , sarà possibile fissare (a meno di multipli dell'identità) i generatori $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1, \dots, r}$ di ciascun sottogruppo di \mathcal{G} in termini di tali osservabili a partire dalla formula (7.3).

Siano ora $g(s_1, \dots, s_r), \tilde{g}(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{G}$ due generici elementi; consideriamo quindi la regola di composizione proiettiva (7.1). Sostituendo in quest'ultima la (7.2), troviamo l'espressione

$$e^{-i \sum_i z_i \mathcal{X}_i} = \mathcal{U}(g \circ \tilde{g}) = e^{i\omega(g, \tilde{g})} e^{-i \sum_i (s_i + \ell_i) \mathcal{X}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_i \ell_j [\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)},$$

avendo invocato la *formula BCH* (A.2) per $\mathcal{U}(g) \mathcal{U}(\tilde{g})$ e tenuto conto del fatto che $g \circ \tilde{g} \in \mathcal{G}$. Osservando allora che $\omega(e_{\mathcal{G}}, \tilde{g}) = 0 = \omega(g, e_{\mathcal{G}})$, essendo $e_{\mathcal{G}}$ l'elemento neutro di \mathcal{G} , dev'essere necessariamente

$$\omega(g, \tilde{g}) = \sum_{i,j} s_i \ell_j \mathcal{D}_{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

dove le costanti \mathcal{D}_{ij} sono antisimmetriche, i.e. $\mathcal{D}_{ij} = -\mathcal{D}_{ji}$ per ogni $i, j = 1, 2, \dots, r$, in quanto $\omega(g, g) = 0$ per ipotesi. Combinando le precedenti osservazioni, otteniamo in definitiva le relazioni

$$[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] = i \sum_{k=1}^r C_{ij}^k \mathcal{X}_k + i \mathcal{D}_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, r, \quad (7.4)$$

$$z_i = s_i + \ell_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r s_j \ell_k C_{jk}^i + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \forall i = 1, 2, \dots, r. \quad (7.5)$$

I coefficienti C_{ij}^k prendono il nome di **costanti di struttura** del gruppo \mathcal{G} o, equivalentemente, dell'algebra di Lie \mathfrak{g} corrispondente²⁹; esse sono *antisimmetriche* (alla luce dell'antisimmetria del commutatore e delle costanti \mathcal{D}_{ij}), *reali* (essendo il commutatore anti-hermitiano) e soddisfano l'identità di Jacobi

$$\sum_n (C_{ij}^n \mathcal{D}_{kn} + C_{jk}^n \mathcal{D}_{in} + C_{ki}^n \mathcal{D}_{jn}) = 0.$$

Dalla relazione (7.4) è evidente allora che la natura proiettiva della rappresentazione (7.1) si traduce al livello dell'algebra di Lie in una cosiddetta *estensione centrale*, ovvero nella comparsa di immaginari puri alla destra delle regole di commutazione tra i generatori sullo spazio di Hilbert \mathcal{H}_S .

Sovente le trasformazioni indotte da \mathcal{G} su \mathcal{H}_S sono esse stesse delle trasformazioni di simmetria (nel senso dato nel §5.1). In tal caso, si usa introdurre la seguente

DEFINIZIONE (GRUPPO DI INVARIANZA) - *Un gruppo di Lie \mathcal{G} è un **gruppo di invarianza** di \mathcal{S} se ciascuna trasformazione di simmetria $\mathcal{T}_g \in \mathcal{T}$ è un'invarianza di \mathcal{S} , i.e. se $\forall t \in \mathbb{R}$ è*

$$\mathcal{U}^\dagger(g) \mathcal{H}(t) \mathcal{U}(g) = \mathcal{H}(t), \quad \forall g \in \mathcal{G}. \quad (7.6)$$

In particolare, se \mathcal{G} è connesso, allora la (7.6) si riscrive al livello dell'algebra di Lie come

$$[\mathcal{H}(t), \mathcal{X}] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathcal{X} \in \mathfrak{g}. \quad (7.7)$$

Pertanto, se \mathcal{G} è un gruppo di invarianza di \mathcal{S} , allora \mathfrak{g} è un'algebra di Lie di costanti del moto.

7.2 Traslazioni spazio-temporali e rototraslazioni. Nel §5.4 abbiamo avuto modo di discutere come le traslazioni spaziali, temporali e le rotazioni vengono implementate nel formalismo della Meccanica Quantistica. Vediamo ora come affrontare il problema nel caso in cui il gruppo di simmetria di \mathcal{S} coinvolga traslazioni spazio-temporali o rototraslazioni. Preliminarmente, introduciamo la seguente

DEFINIZIONE (INSIEME IRRIDUCIBILE DI OPERATORI) - *Un insieme di operatori hermitiani $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ di \mathcal{H}_S forma un **insieme irriducibile di operatori** (un insieme di osservabili fondamentali di \mathcal{S}) se non esiste alcun operatore che commuti con essi all'infuori di un multiplo dell'identità.*

Assumiamo quindi che \mathcal{S} ammetta l'insieme irriducibile di operatori $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \mathfrak{s}\}$, essendo \mathfrak{s} l'operatore di \mathcal{H}_S descrivente il *momento angolare intrinseco* del sistema (i.e. relativo al centro di massa di \mathcal{S} ; e.g., spin). Consideriamo quindi l'azione su \mathcal{S} del gruppo traslazionale tridimensionale $\mathcal{T}_3 = \{\mathcal{T}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ con $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{T}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, lasciando astratta la rappresentazione di \mathcal{H}_S . Nel §5.4 si era visto che l'azione di \mathcal{T}_3 su \mathcal{H}_S è implementata da una famiglia a tre parametri di operatori unitari $\{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ avente $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)^\top$ come generatore infinitesimo, i.e. tale per cui $\mathcal{U}_{\mathbf{a}} = e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}}$. Per le osservabili fondamentali $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \mathfrak{s}\}$ attivamente trasformate valgono quindi le relazioni

$$\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathfrak{q} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} = \mathfrak{q} + \mathbf{a} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathfrak{p} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} = \mathfrak{p}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathfrak{s} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} = \mathfrak{s}. \quad (7.8)$$

²⁹L'insieme dei generatori $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1,2,\dots,r}$ forma, infatti, un'algebra di Lie su \mathcal{H}_S essendo soddisfatte le proprietà di (i) *linearità*, (ii) *chiusura* (i.e. ogni coppia di generatori è esprimibile come combinazione lineare degli stessi) ed essendo verificata l'*identità di Jacobi*, i.e. $[[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j], \mathcal{X}_k] + [[\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_i], \mathcal{X}_j] + [[\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_k], \mathcal{X}_i] = \mathbf{0}$ per ogni $i, j, k = 1, 2, \dots, r$.

La rappresentazione di \mathcal{T}_3 su \mathcal{H}_S è puramente vettoriale, essendo $\mathcal{U}_a \mathcal{U}_b = \mathcal{U}_{a+b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^3$.

Consideriamo ora l'azione delle traslazioni temporali su \mathcal{S} : la trasformazione $t \mapsto t + \tau$ (attivamente interpretata) non è un'autentica traslazione (la variabile t non è un'osservabile), bensì rappresenta l'evoluzione del sistema da t a $t + \tau$. È evidente dunque che i concetti di traslazione ed evoluzione temporale sono strettamente connessi, sicché l'implementazione unitaria della traslazione $t \mapsto t + \tau$ deve discendere da quella per l'evoluzione temporale, i.e. da $\mathcal{U}_{t+\tau, t}$. Occorre perciò stabilire l'azione di $t \mapsto t + \tau$ sulle osservabili e/o sui vettori di stato. A questo proposito, lavoriamo in interpretazione di Heisenberg e consideriamo l'evoluzione dell'osservabile \mathcal{A} : alla traslazione $t \mapsto t + \tau$ sarà associata la trasformazione³⁰ $\mathcal{A}'_H(t + \tau) = \mathcal{A}_H(t)$, la quale può essere equivalentemente riscritta come

$$\mathcal{A}_H(t) \longmapsto \mathcal{A}'_H(t) = \mathcal{A}_H(t - \tau). \quad (7.9)$$

Sia allora $\mathcal{U}_H(\tau, t - \tau)$ l'operatore che implementa su \mathcal{H}_S la trasformazione (7.9): in interpretazione attiva, sarà $\mathcal{U}_H^\dagger(\tau, t - \tau) \mathcal{A}_H(t) \mathcal{U}_H(\tau, t - \tau) = \mathcal{A}_H(t - \tau)$, che possiamo riscrivere come

$$\mathcal{U}_H^\dagger(\tau, t) \mathcal{A}_H(t + \tau) \mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{A}_H(t). \quad (7.10)$$

Sostituendo quindi le espressioni per gli evoluti secondo Heisenberg di \mathcal{A} , troviamo

$$\mathcal{U}_H^\dagger(\tau, t) \mathcal{U}_{t+\tau, t_0}^\dagger \mathcal{A} \mathcal{U}_{t+\tau, t_0} \mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger \mathcal{A} \mathcal{U}_{t, t_0};$$

confrontando i membri a sinistra ed a destra, otteniamo in definitiva la seguente espressione

$$\mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{U}_{t+\tau, t_0}^\dagger \mathcal{U}_{t, t_0} = \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger \mathcal{U}_{t, t+\tau} \mathcal{U}_{t, t_0}, \quad (7.11)$$

avendo invocato il fatto che il gruppo $\{\mathcal{U}_{t, t_0}, t \in \mathbb{R}\}$ forma un propagatore unitario (vedi §6.1). L'espressione (7.11) fornisce quanto cercato, descrivendo l'implementazione della traslazione temporale $t \mapsto t + \tau$ in termini degli operatori di evoluzione temporale di \mathcal{S} . Si noti però che la famiglia $\{\mathcal{U}_H(\tau, t), \tau \in \mathbb{R}\}$ non forma un gruppo ad un parametro a causa della residua dipendenza da t , i.e.

$$\mathcal{U}_H(\tau_1 + \tau_2, t) = \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger \mathcal{U}_{t+\tau_2, t+\tau_2+\tau_1} \mathcal{U}_{t, t+\tau_2} \mathcal{U}_{t, t_0} = \mathcal{U}_H(\tau_1, t + \tau_2) \mathcal{U}_H(\tau_2, t), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}. \quad (7.12)$$

Pertanto la famiglia $\{\mathcal{U}_H(\tau, t), \tau \in \mathbb{R}\}$ non costituisce una vera e propria rappresentazione del gruppo delle traslazioni temporali su \mathcal{H}_S . Tuttavia, se il sistema in esame è *conservativo*, allora

$$\mathcal{U}_H(\tau) = \mathcal{U}_{t, t+\tau} = e^{i\tau \mathcal{H}}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

e la famiglia $\{\mathcal{U}_H(\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ individua un gruppo ad un parametro di operatori unitari, fornendo così una rappresentazione autentica delle traslazioni temporali su \mathcal{H}_S .

OSSERVAZIONE – La formula (7.11) per l'operatore di Heisenberg $\mathcal{U}_H(\tau, t)$ contiene una caratteristica peculiare delle traslazioni temporali. Si noti infatti che, pur avendo interpretato attivamente l'azione della trasformazione $t \mapsto t + \tau$ sull'osservabile \mathcal{A} , l'espressione ottenuta per $\mathcal{U}_H(\tau, t)$ è espressa in termini dell'operatore inverso $\mathcal{U}_{t+\tau, t}^\dagger = \mathcal{U}_{t+\tau, t}^{-1} = \mathcal{U}_{t, t+\tau}$, il quale descrive passivamente l'evoluzione di \mathcal{S} da t a $t + \tau$. Per contro, se avessimo interpretato passivamente l'azione della trasformazione $t \mapsto t + \tau$ sulle osservabili, allora in luogo della (7.11) avremmo trovato $\mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger \mathcal{U}_{t+\tau, t_0}$ e cioè

$$\mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger \mathcal{U}_{t+\tau, t} \mathcal{U}_{t, t_0}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Conseguentemente, la legge di composizione (7.12) avrebbe assunto la forma

$$\mathcal{U}_H(\tau_1 + \tau_2, t) = \mathcal{U}_H(\tau_2, t) \mathcal{U}_H(\tau_1, t + \tau_2), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, \quad (7.13)$$

³⁰Dovendo \mathcal{A}_H essere *funzione* di t , la regola di trasformazione è quella scalare, i.e. $f'(t') = f(t)$ quanto $t \mapsto t'$.

caratterizzata da un anti-ordinamento dell'azione degli operatori sugli stati rispetto alle trasformazioni. In interpretazione attiva, invece, la legge di composizione (7.12) permette un'implementazione più naturale della trasformazione, i.e. ad una traslazione di τ_2 al tempo t , segue una traslazione di τ_1 al tempo $t + \tau_2$. Il motivo di questa inversione tra le interpretazioni è legato al fatto che la sostituzione $t \mapsto t + \tau$ ha un significato intrinsecamente "passivo": essa collega le coordinate temporali usate da due osservatori i cui orologi non sono sincronizzati, ma potrebbero esserlo portando l'uno avanti o l'altro indietro.

Consideriamo ora l'azione delle traslazioni spazio-temporali su \mathcal{H}_S . Come operazioni in \mathbb{R}^{3+1} esse commutano, mentre come trasformazioni di simmetria su \mathcal{H}_S , esse commutano sse $[\mathcal{H}(t), \mathbf{p}] = \mathbf{0}$. Di conseguenza, se le trasformazioni (7.8) valgono nella descrizione di Schrödinger, esse non sono in generale soddisfatte nella pittura di Heisenberg. Per convincersene, si consideri l'azione di \mathcal{U}_a sull'osservabile di posizione: è evidente che $\mathcal{U}_a^\dagger \mathbf{q} \mathcal{U}_a = \mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S}$, mentre per la posizione di Heisenberg $\mathbf{q}_H(t)$ avremo

$$\mathcal{U}_H^\dagger(\mathbf{a}; t) \mathbf{q}_H(t) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}; t) = \mathbf{q}_H(t) + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S} \quad \text{dove} \quad \mathcal{U}_H(\mathbf{a}; t) = e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_H(t)}.$$

Pertanto, per ottenere l'operatore che implementa una traslazione spazio-temporale su \mathcal{H}_S con parametri $(\mathbf{a}, \tau) \in \mathbb{R}^{3+1}$, dovremo attaccare alla precedente l'operatore (7.11), di modo che

$$\mathcal{U}_H(\mathbf{a}, \tau; t) = \mathcal{U}_H(\tau, t) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}; t) = \mathcal{U}_H(\mathbf{a}; t + \tau) \mathcal{U}_H(\tau, t). \quad (7.14)$$

L'azione dell'operatore (7.14) su una generica osservabile $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ (che assumiamo senza dipendenze esplicite dal tempo) sarà quindi $\mathcal{U}_H^\dagger(\mathbf{a}, \tau; t) \mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}; t + \tau) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}, \tau; t) = \mathcal{U}_H^\dagger(\tau, t) [\mathcal{U}_H^\dagger(\mathbf{a}; t) \mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}; t + \tau) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}; t)] \mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{U}_H^\dagger(\tau, t) \mathcal{A}_H(\mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S}, \mathbf{p}, \mathbf{s}; t + \tau) \mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{A}_H(\mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S}, \mathbf{p}, \mathbf{s}; t)$, i.e.

$$\mathcal{U}_H^\dagger(\mathbf{a}, \tau; t) \mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}; t + \tau) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}, \tau; t) = \mathcal{A}_H(\mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S}, \mathbf{p}, \mathbf{s}, t),$$

essendo $\mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}; t) = \mathcal{A}(\mathbf{q}_H(t), \mathbf{p}_H(t), \mathbf{s}_H(t))$. Si noti che l'azione di $\mathcal{U}_H(\mathbf{a}, \tau; t)$ sulle osservabili coincide con quanto richiesto per una traslazione spazio-temporale, pur non essendo $\{\mathcal{U}_H(\mathbf{a}, \tau; t), (\mathbf{a}, \tau) \in \mathbb{R}^{3+1}\}$ una rappresentazione autentica del gruppo delle traslazioni spazio-temporali su \mathcal{H}_S , sempre a causa della dipendenza residua da t , infatti $\forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ e $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ risulta essere

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \tau_1 + \tau_2; t) &= \mathcal{U}_H(\tau_1 + \tau_2, t) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2; t) = \mathcal{U}_H(\tau_1, t + \tau_2) [\mathcal{U}_H(\tau_2, t) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_1; t)] \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_2; t) \\ &= [\mathcal{U}_H(\tau_1, t + \tau_2) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_1; t + \tau_2)] [\mathcal{U}_H(\tau_2, t) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_2; t)] = \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_1, \tau_1; t + \tau_2) \mathcal{U}_H(\mathbf{a}_2, \tau_2; t). \end{aligned}$$

Tuttavia, se \mathcal{S} è conservativo ed $[\mathcal{H}(t), \mathbf{p}] = \mathbf{0}$, allora $d_t \mathbf{p}_H = i[\mathcal{H}_H(t), \mathbf{p}_H(t)] = \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger [\mathcal{H}(t), \mathbf{p}] \mathcal{U}_{t, t_0} = \mathbf{0}$ e cioè $\mathbf{p}_H(t) = \mathbf{p}_H(t_0) \equiv \mathbf{p}$, per cui l'operatore $\mathcal{U}_H(\mathbf{a}, \tau; t)$ non dipende più da t ed assume la forma

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}, \tau) = e^{i(\tau \mathcal{H} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p})}, \quad (\mathbf{a}, \tau) \in \mathbb{R}^{3+1}. \quad (7.15)$$

In tal caso, la famiglia a $(3 + 1)$ parametri $\{\mathcal{U}(\mathbf{a}, \tau), (\mathbf{a}, \tau) \in \mathbb{R}^{3+1}\}$ individua una rappresentazione autentica del gruppo delle traslazioni spazio-temporali su \mathcal{H}_S .

Concludiamo la sezione con l'implementazione del gruppo delle rototraslazioni tridimensionali su \mathcal{H}_S . Sia quindi $\mathcal{E} = (\mathcal{R}_\theta, \mathbf{a})$ una rototraslazione di \mathbb{R}^3 , essendo $\mathcal{R}_\theta \in \text{O}(3, \mathbb{R})$ la matrice associata ad una rotazione di un angolo θ intorno ad un generico asse \hat{n} ed $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ il vettore corrispondente alla traslazione $\mathcal{T}_a \in \mathcal{T}_3$. L'azione di \mathcal{E} su \mathbb{R}^3 sarà quindi $\mathcal{E}(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{E}\mathbf{x} = \mathcal{R}\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$; l'insieme delle rototraslazioni, munito della legge di composizione $\mathcal{E}\mathcal{E}'\mathbf{x} = \mathcal{E}(\mathcal{R}'\mathbf{x} + \mathbf{a}') = \mathcal{R}\mathcal{R}'\mathbf{x} + \mathcal{R}\mathbf{a}' + \mathbf{a} = \mathcal{R}''\mathbf{x} + \mathbf{a}''$, dove $\mathcal{R}'' \equiv \mathcal{R}\mathcal{R}' \in \text{O}(3, \mathbb{R})$ ed $\mathbf{a}'' \equiv \mathcal{R}\mathbf{a}' + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, forma un gruppo ed è noto come **gruppo euclideo** $E(3, \mathbb{R})$. Diversamente da $\text{O}(3, \mathbb{R})$, \mathcal{T}_3 è un sottogruppo invariante di $E(3, \mathbb{R})$, infatti $\forall \mathcal{E}' \in E(3, \mathbb{R})$ si ha che $\mathcal{E}'\mathcal{T}_a\mathcal{E}'^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathcal{R}'_a\mathbf{a} \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{R}'_a\mathbf{a}}\mathbf{x}$, dove $\mathcal{T}_{\mathcal{R}'_a\mathbf{a}} \in \mathcal{T}_3$. Inoltre $\forall \mathcal{E} \in E(3, \mathbb{R})$ è immediato verificare che $\mathcal{E} \equiv (\mathcal{R}_\theta, \mathbf{a}) = (\mathcal{R}_\theta, \mathbf{0})(\mathbf{1}_3, \mathbf{a})$, essendo $e_{\mathcal{T}_3} = (\mathbf{1}_3, \mathbf{0}) = e_{\text{O}(3, \mathbb{R})}$. Di conseguenza $E(3, \mathbb{R})$ è isomorfo al *prodotto semi-diretto* tra $\text{O}(3, \mathbb{R})$ ed \mathcal{T}_3 , i.e. $E(3, \mathbb{R}) \cong \text{O}(3, \mathbb{R}) \ltimes \mathcal{T}_3$; nel seguito saremo interessati al **gruppo euclideo speciale** $SE(3, \mathbb{R}) \cong \text{SO}(3, \mathbb{R}) \ltimes \mathcal{T}_3$, ovvero alla componente connessa di $E(3, \mathbb{R})$. Alla

luce della "fattorizzazione" semi-diretta, le rappresentazioni di $\text{SE}(3, \mathbb{R})$ su \mathcal{H}_S si ottengono direttamente da quelle delle rotazioni e delle traslazioni secondo l'espressione

$$\mathcal{U}(\mathcal{E}) = \mathcal{U}_a \mathcal{U}_\theta = e^{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}} e^{-i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathcal{L}}, \quad (7.16)$$

essendo $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)^\top$ l'operatore momento angolare del sistema (vedi §5.4). Inoltre, la regola di composizione $(\mathcal{R}, \mathbf{a})(\mathcal{R}', \mathbf{a}') = (\mathcal{R}\mathcal{R}', \mathcal{R}\mathbf{a}' + \mathbf{a})$ viene implementata in modo analogo su \mathcal{H}_S , i.e.

$$\mathcal{U}(\mathcal{R}, \mathbf{a})\mathcal{U}(\mathcal{R}', \mathbf{a}') = \mathcal{U}(\mathcal{R}\mathcal{R}', \mathcal{R}\mathbf{a}' + \mathbf{a}),$$

grazie al fatto che i generatori \mathbf{p} e \mathcal{L} soddisfano la regola di commutazione (5.20). Quest'ultima, unita alle regole di commutazione tra le componenti di \mathbf{p} e le componenti di \mathcal{L} , definiscono una rappresentazione dell'algebra di Lie dei generatori del gruppo euclideo speciale $\text{SE}(3, \mathbb{R})$:

$$\mathfrak{se}(3, \mathbb{R}) \quad : \quad \begin{cases} [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k, \\ [\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j] = \varepsilon_{ijk} \mathbf{p}_k, \\ [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \forall i, j, k = 1, 2, 3. \quad (7.17)$$

OSSERVAZIONE – Si noti che la rappresentazione (7.17) di $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$ è scritta in forma puramente vettoriale, dato che le estensioni centrali \mathcal{D}_{ij} dell'algebra non compaiono esplicitamente. Questo fatto non è in generale garantito, in quanto le regole di commutazione (7.17) sono state ottenute in precedenza analizzando l'azione di \mathcal{T}_3 ed $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ su \mathcal{H}_S come gruppi di simmetria di \mathcal{S} e non come sottogruppi di un gruppo di simmetria più generale. In linea di principio avremmo quindi dovuto includere nell'algebra (7.17) le corrispondenti estensioni centrali³¹, di modo che

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] &= \varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k + \mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ [\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j] &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{p}_k + \mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] &= \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \end{aligned}$$

Le estensioni centrali possono quindi essere determinate a partire dalle proprietà dei commutatori. Nel caso della sottoalgebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ è possibile procedere come mostrato nel §5.4: l'antisimmetria delle $\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j)$ permette di scrivere queste ultime nella forma $\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) = \varepsilon_{ijk} \beta_k$ con $\beta_k \in \mathbb{R}$ per $k = 1, 2, 3$; per cui la riparametrizzazione $\mathcal{L}_i \mapsto \mathcal{L}_i + \beta_i \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$ per $i = 1, 2, 3$ consente di porre il commutatore $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j]$ nella forma (7.17). Passiamo ora alle relazioni tra le componenti di \mathcal{L} e \mathbf{p} : in tal caso l'argomento è più complesso del precedente, dato che le estensioni centrali $\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j)$ non sono ora necessariamente antisimmetriche, non essendo più relative ad una sottoalgebra di $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$. Possiamo tuttavia invocare l'identità di Jacobi, alla quale i generatori di $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$ devono soddisfare: in particolare, avremo che

$$[[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j], \mathbf{p}_k] + [[\mathbf{p}_k, \mathcal{L}_i], \mathcal{L}_j] + [[\mathcal{L}_j, \mathbf{p}_k], \mathcal{L}_i] = \mathbf{0}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Sostituendo nella precedente le regole di commutazione in presenza di estensioni centrali, risulta

$$(\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{lks} + \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jms} + \varepsilon_{jkn}\varepsilon_{nis}) \mathbf{p}_s + [\varepsilon_{ijl}\mathcal{D}(\mathcal{L}_l, \mathbf{p}_k) + \varepsilon_{ikm}\mathcal{D}(\mathcal{L}_j, \mathbf{p}_m) - \varepsilon_{jkn}\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_n)] \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} = \mathbf{0}.$$

La somma ciclica contenuta entro le parentesi tonde è nulla, come è banale verificare invocando l'identità $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Le estensioni centrali $\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j)$ devono dunque soddisfare la condizione

$$\varepsilon_{jkn}\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_n) = \varepsilon_{ijl}\mathcal{D}(\mathcal{L}_l, \mathbf{p}_k) + \varepsilon_{ikm}\mathcal{D}(\mathcal{L}_j, \mathbf{p}_m).$$

Moltiplicando ambo i membri per ε_{jks} e sommando su j e k , troviamo

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_n) + \mathcal{D}(\mathcal{L}_n, \mathbf{p}_i) = \delta_{in}\mathcal{D}(\mathcal{L}_m, \mathbf{p}_m),$$

³¹Relative ad un'eventuale rappresentazione proiettiva della sottoalgebra d'interesse all'interno della rappresentazione dell'algebra del gruppo di simmetria di \mathcal{S} .

dalla quale, sommando su $i = n$, segue che $\mathcal{D}(\mathcal{L}_m, \mathbf{p}_m) = 0$. Pertanto $\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_n) = -\mathcal{D}(\mathbf{p}_n, \mathcal{L}_i)$, ovvero le estensioni centrali relative alle regole di commutazione tra le componenti di \mathcal{L} e \mathbf{p} sono antisimmetriche e quindi $\mathcal{D}(\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j) = \varepsilon_{ijk}\gamma_k$ con $\gamma_k \in \mathbb{R}$ per $k = 1, 2, 3$; la ridefinizione $\mathbf{p}_k \mapsto \mathbf{p}_k - \gamma_k$ permette allora di riscrivere l'espressione per $[\mathcal{L}_i, \mathbf{p}_j]$ nella forma (7.17). Consideriamo infine la sottoalgebra $\mathfrak{t}(3, \mathbb{R})$ delle traslazioni spaziali: in tal caso, la sola proprietà di antisimmetria delle $\mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ non è d'aiuto nel determinarne le espressioni. Invochiamo perciò l'identità di Jacobi

$$[[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j], \mathcal{L}_k] + [[\mathcal{L}_k, \mathbf{p}_i], \mathbf{p}_j] + [[\mathbf{p}_j, \mathcal{L}_k], \mathbf{p}_i] = \mathbf{0}, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

dalla quale segue banalmente l'identità $\varepsilon_{kil}\mathcal{D}(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_j) = \varepsilon_{kjm}\mathcal{D}(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_i)$. Moltiplicando ambo i membri della precedente per ε_{kjm} e sommando su $k, j = 1, 2, 3$, otteniamo la condizione

$$2\mathcal{D}(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_j) = (\delta_{ij}\delta_{nm} - \delta_{im}\delta_{nj})\mathcal{D}(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_i).$$

Invocando ora l'antisimmetria delle $\mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$, segue subito che $\mathcal{D}(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_j) = 0$ per $j, l = 1, 2, 3$. Pertanto $\mathfrak{t}(3, \mathbb{R})$ non ammette rappresentazioni proiettive una volta inclusa come sottoalgebra di $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$.

7.3 Trasformazioni galileiane dello spazio-tempo. Occupiamoci ora delle trasformazioni dello spazio-tempo: esse si compongono di rotazioni, traslazioni (spaziali e temporali) e *boosts*, ovvero trasformazioni tra sistemi di riferimento in moto rettilineo ed uniforme l'uno rispetto all'altro. Queste ultime sono, in generale, trasformazioni di Lorentz e si riducono nel limite non-relativistico alle *trasformazioni di Galilei*, la cui azione in \mathbb{R}^3 è rappresentata da una traslazione dipendente in modo lineare dal tempo, i.e. dalla mappa $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}t \in \mathbb{R}^3$, dove $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ è la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento. Sia quindi $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta), \mathbf{v}, \mathbf{a}, \tau)$ la quadrupla corrispondente alla trasformazione spazio-temporale

$$\mathbb{R}^{3+1} \ni (\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{G}} (\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, t + \tau) \in \mathbb{R}^{3+1}.$$

È banale verificare che l'insieme di tali trasformazioni, munito della legge di composizione

$$(\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta), \mathbf{v}, \mathbf{a}, \tau) \circ (\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}'}(\theta'), \mathbf{v}', \mathbf{a}', \tau') = (\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}'}(\theta'), \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\mathbf{v}' + \mathbf{v}, \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\mathbf{a}' + \mathbf{v}\tau' + \mathbf{a}, \tau + \tau'),$$

forma un gruppo di Lie a dieci parametri, noto come **gruppo di Galilei** $G(3, 1)$. Come osservato in precedenza, nel seguito saremo interessati unicamente alla componente connessa di $G(3, 1)$ e cioè al *gruppo speciale di Galilei* $SG(3, 1)$ (si noti che $SE(3, \mathbb{R})$ individua un sottogruppo di $SG(3, 1)$).

Vediamo come implementare l'azione di $SG(3, 1)$ su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. A questo proposito, il modo più rigoroso di procedere è individuare l'algebra di Lie dei generatori di $SG(3, 1)$ e classificarne le rappresentazioni irriducibili rispetto ad un'opportuna scelta di osservabili fondamentali caratterizzanti il sistema \mathcal{S} in esame; in particolare, a partire dall'algebra $\mathfrak{sg}(3, 1)$ sarà possibile ricostruire la forma dell'Hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ per una particella libera con o senza gradi di libertà interni. Tuttavia, prima di procedere in questa direzione, è conveniente prendere confidenza con il sottogruppo dei boosts galileiani, studiandone l'azione su un'una semplice realizzazione di \mathcal{S} . Sia quindi \mathcal{S} una *particella libera* di massa m : dalla meccanica classica sappiamo che l'azione del boost $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ produce la trasformazione $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} + m\mathbf{v}$ sul momento lineare di \mathcal{S} e, conseguentemente, la trasformazione dell'energia $E \mapsto E + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}mv^2$, essendo $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Per determinarne l'azione sulle funzioni d'onda, consideriamo un'onda piana³² $\psi(\mathbf{x}, t) = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \in L_2(\mathbb{R}^{3+1})$ (posto $\hbar = 1$ per semplicità); alla luce delle precedenti, avremo

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{im(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}tv^2)}\psi(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, t), \quad (7.18)$$

essendo $t' = t$. Sia quindi $\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t) = e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)}$ l'operatore unitario di $L_2(\mathbb{R}^{3+1})$ tale per cui

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = (\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t)\psi)(\mathbf{x}, t).$$

³²Tale scelta non riduce la generalità dell'argomento: una generica funzione d'onda, infatti, ammette sempre uno sviluppo in onde piane, sicché il risultato generale potrà essere facilmente dedotto dal caso in studio.

Determiniamo il generatore infinitesimo $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{G}_1(t), \mathcal{G}_2(t), \mathcal{G}_3(t))^\top$: procedendo come nel §5.4, risulta

$$(\mathcal{G}(t)\psi)(\mathbf{x}, t) = \iota \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{v}} [(\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S})\psi](\mathbf{x}, t) = \iota \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{v}} [e^{\imath m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}v^2 t)}\psi(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, t) - \psi(\mathbf{x}, t)],$$

avendo definito formalmente $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{v}} \equiv (\lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{1}{v_1}, \lim_{v_2 \rightarrow 0} \frac{1}{v_2}, \lim_{v_3 \rightarrow 0} \frac{1}{v_3})^\top$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}(t)\psi)(\mathbf{x}, t) &= \iota \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{v}} \left\{ \left[\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} + \imath m \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathcal{O}(v^2) \right] \left[\psi(\mathbf{x}, t) - t \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(v^2) \right] - \psi(\mathbf{x}, t) \right\} \\ &= \iota \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{v}} \left[\imath m \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t) - t \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(v^2) \right] = -\imath t \partial_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) - m \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Tenendo quindi presente che $\mathfrak{p} \xrightarrow{\text{R.S.}} -\imath \partial_{\mathbf{x}}$ e $\mathfrak{q} \xrightarrow{\text{R.S.}} \mathbf{x}$, troviamo in definitiva

$$\mathcal{G}(t) = t\mathfrak{p} - m\mathfrak{q}. \quad (7.19)$$

La precedente, combinata con le regole di commutazione canoniche, conduce alle relazioni

$$[\mathcal{G}_i(t), \mathcal{G}_j(t)] = \mathbb{0}, \quad (7.20)$$

$$[\mathfrak{q}_i, \mathcal{G}_j(t)] = \imath t \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (7.21)$$

$$[\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j(t)] = \imath m \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \quad (7.22)$$

In particolare, dalla (7.20) segue subito che $\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t)\mathcal{U}_{\mathbf{v}'}(t) = \mathcal{U}_{\mathbf{v}+\mathbf{v}'}(t)$ con $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$, i.e. le rappresentazioni del gruppo delle trasformazioni galileiane pure su $L_2(\mathbb{R}^{3+1})$ sono strettamente vettoriali; dalla (7.22), invece, segue che le rappresentazioni delle trasformazioni dello spazio-tempo caratterizzate da una traslazione seguita da un boost o viceversa, ammettono in $L_2(\mathbb{R}^{3+1})$ una rappresentazione proiettiva la cui estensione centrale coincide con una grandezza fisica m caratterizzante il sistema in studio (nel caso in questione, la massa della particella). Vedremo più avanti che tale estensione centrale è caratteristica dell'algebra di Lie di Galilei $\mathfrak{sg}(3, 1)$ ed è matematicamente irremovibile³³. Si noti inoltre che le regole di commutazione (7.21) e (7.22) generano le trasformazioni operatoriali finite

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbf{v}}^\dagger(t)\mathfrak{q}\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t) &= e^{\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} \mathfrak{q} e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} = \mathfrak{q} + \imath [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t), \mathfrak{q}] + \dots = \mathfrak{q} + t \mathbf{v} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ \mathcal{U}_{\mathbf{v}}^\dagger(t)\mathfrak{p}\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t) &= e^{\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} \mathfrak{p} e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} = \mathfrak{p} + \imath [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t), \mathfrak{p}] + \dots = \mathfrak{p} + m \mathbf{v} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \end{aligned}$$

avendo invocato al primo passaggio la formula di Hadamard (A.5) ed al secondo il fatto che la (A.5) si riduce ai soli primi due termini nel caso in cui $[A, B]$ sia un multiplo dell'identità. Gli operatori \mathfrak{q} e \mathfrak{p} si trasformano dunque in modo analogo alle corrispondenti osservabili classiche.

OSSERVAZIONE – Alla luce dell'esplicita dipendenza del generatore \mathcal{G} dal tempo, l'implementazione delle trasformazioni galileiane pure rientra nell'analisi discussa nel §6.2.1. Per quanto riguarda la sola dipendenza esplicita dal tempo, invocando la formula di Zassenhaus (A.3), abbiamo

$$\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t + \tau) = e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t+\tau)} = e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t) - \imath \tau \mathbf{v} \cdot \mathfrak{p}} = e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{-\imath \tau \mathbf{v} \cdot \mathfrak{p}} e^{\frac{1}{2} \tau [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t), \mathbf{v} \cdot \mathfrak{p}]} \dots,$$

dove i termini di ordine superiore dipendono da commutatori annidati di ordine crescente del tipo $[A, [B, \dots, [A, B] \dots]]$. Nel caso in questione $[A, B] = [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t), \mathbf{v} \cdot \mathfrak{p}] = -\imath m v^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$ per cui in luogo della formula (A.3) è possibile applicare la (A.4), trovando

$$\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t + \tau) = e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{-\imath \tau \mathbf{v} \cdot \mathfrak{p}} e^{-\imath \frac{1}{2} \tau m v^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}} = e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{-\imath \tau \mathbf{v} \cdot \mathfrak{p} - \imath \frac{1}{2} \tau m v^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}},$$

dove l'ultimo passaggio segue alla luce della formula BCH (A.1). Otteniamo dunque l'espressione

$$\mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t + \tau) = \mathcal{U}_{\mathbf{v}}(t) e^{-\imath \tau (\mathbf{v} \cdot \mathfrak{p} + \frac{1}{2} m v^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S})}. \quad (7.23)$$

³³Questo fatto ha già una certa evidenza a questo livello, dato che le estensioni centrali $\mathcal{D}(\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j(t)) = m \delta_{ij}$ traggono direttamente origine dalle regole di commutazione canoniche.

Per quanto riguarda invece una traslazione temporale, passando in interpretazione di Heisenberg risulta

$$\mathcal{U}_H(\mathbf{v}; t) \equiv \mathcal{U}_{t, t_0}^\dagger \mathcal{U}_v(t) \mathcal{U}_{t, t_0} = e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}_H(t)}, \quad \mathcal{G}_H(t) = t\mathbf{p}_H(t) - m\mathbf{q}_H(t),$$

sicché alla trasformazione temporale $t \mapsto t + \tau$ corrisponderà la trasformazione operatoriale

$$\mathcal{U}_H^\dagger(\tau, t) \mathcal{U}_H(\mathbf{v}; t + \tau) \mathcal{U}_H(\tau, t) = \mathcal{U}_H(\mathbf{v}; t) e^{-i\tau [\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_H(t) + \frac{1}{2} m v^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}]}. \quad (7.24)$$

Insieme alle rototraslazioni, i boost galileiani individuano un sottogruppo di $SG(3, 1)$, i cui elementi hanno la forma $(\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta), \mathbf{v}, \mathbf{a}, 0) = (\mathbb{1}_3, \mathbf{0}, \mathbf{v}, 0) \circ (\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta), \mathbf{a}, \mathbf{0}, 0)$, corrispondente ad una rototraslazione seguita da un boost. La trasformazione indotta su \mathcal{H}_S è quindi implementata dall'operatore unitario

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}, t) = \mathcal{U}_v(t) \mathcal{U}(\mathcal{R}, \mathbf{a}), \quad (7.25)$$

avendo posto $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{R}, \mathbf{a}, \mathbf{v}, 0)$ ed $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ per brevità. Per come definito, $\mathcal{G}(t)$ è *vettoriale*, i.e.

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{G}_j(t)] = i\varepsilon_{ijk} \mathcal{G}_k(t), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.26)$$

Questo fatto, unito alla presenza dell'estensione centrale $m\delta_{ij}$ nella regola di commutazione (7.22), induce la presenza del termine di cociclo $\omega(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = -im\mathbf{a} \cdot (\mathcal{R}\mathbf{v}')$ (ottenuto sviluppando la (7.25) secondo la (A.2)); la (7.25) è quindi una rappresentazione proiettiva, ovvero

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}, t) \mathcal{U}(\mathcal{G}', t) = e^{-im\mathbf{a} \cdot (\mathcal{R}\mathbf{v}')} \mathcal{U}(\mathcal{G} \circ \mathcal{G}', t). \quad (7.27)$$

Per implementare su \mathcal{H}_S una trasformazione di Galilei completa occorre infine attaccare alla (7.25) le traslazioni temporali. Passiamo quindi in interpretazione di Heisenberg: l'operatore

$$\mathcal{U}_H(\mathcal{G}; t) = \mathcal{U}_H(\tau, t) \mathcal{U}_H(\mathbf{v}; t) \mathcal{U}_H(\mathcal{R}, \mathbf{a}; t), \quad (7.28)$$

implementa correttamente l'azione di $\mathcal{G} = (\mathcal{R}, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \tau) \in SG(3, 1)$, essendo soddisfatta la relazione

$$\mathcal{U}_H^\dagger(\mathcal{G}; t) \mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t + \tau) \mathcal{U}_H(\mathcal{G}; t) = \mathcal{A}_H(\mathcal{R}\mathbf{q} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \mathcal{R}\mathbf{p} + m\mathbf{v}, t),$$

avendo sottinteso le identità per semplicità di notazione. Vale quindi la regola di composizione

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_H(\mathcal{G}; t + \tau') \mathcal{U}_H(\mathcal{G}'; t) &= e^{\omega(\mathcal{G}, \mathcal{G}')} \mathcal{U}_H(\mathcal{G} \circ \mathcal{G}'; t), \\ \omega(\mathcal{G}, \mathcal{G}') &= -im \left[\frac{1}{2} \tau' v^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{v}\tau') \cdot (\mathcal{R}\mathbf{v}') \right]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Naturalmente, così come osservato nel caso del gruppo Euclideo speciale, anche in questo caso la famiglia degli operatori (7.29) non individua una rappresentazione autentica di $SG(3, 1)$ per via della esplicita dipendenza da t . Tuttavia, tale dipendenza scompare invocando il cosiddetto

PRINCIPIO DI INVARIANZA DI GALILEI

Se \mathcal{S} è un sistema non-relativistico ed isolato, allora $G(3, 1)$ è il gruppo di invarianza di \mathcal{S} .

Dal principio di invarianza galileiano segue allora che tutti i generatori sono costanti nel tempo, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_H(t) &= \mathbf{p}_H(t_0) \equiv \mathbf{p}, & \mathcal{G}_H(t) &= \mathcal{G}_G(t_0) \equiv \mathcal{G}, \\ \mathcal{H}_H(t) &= \mathcal{H}_H(t_0) \equiv \mathcal{H}, & \mathcal{L}_H(t) &= \mathcal{L}_H(t_0) \equiv \mathcal{L}, \end{aligned}$$

per cui la trasformazione indotta da $\mathcal{G} \in SG(3, 1)$ è implementata su \mathcal{H}_S dall'operatore unitario

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}) = e^{i\tau\mathcal{H}} e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}} e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} e^{-i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{L}} \quad (7.30)$$

OSSERVAZIONE – Dal principio di invarianza galileiano segue che il moto di un sistema quantistico isolato \mathcal{S} è rettilineo ed uniforme. Infatti, alla luce della condizione di invarianza (6.23), si ha che

$$[\mathcal{H}, \mathcal{G}(t)] = \imath \partial_t \mathcal{G}(t) = \imath \mathbf{p}. \quad (7.31)$$

Ma per via del principio di invarianza galileiano abbiamo che $\mathbb{O} = \imath \partial_t \mathbf{p} = [\mathcal{H}, \mathbf{p}]$, sicché

$$\mathbf{p} = \imath m [\mathcal{H}, \mathbf{q}]. \quad (7.32)$$

Sia quindi $\langle \mathbf{v} \rangle := d_t \langle \mathbf{q} \rangle$ l'operatore velocità di \mathcal{S} , i.e. $\mathbf{v} = \imath [\mathcal{H}, \mathbf{q}]$; dal confronto con la (7.32), risulta evidente che $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$. Passando quindi in interpretazione di Heisenberg, la (7.32) si riduce all'espressione

$$d_t \mathbf{q}_H(t) = \imath [\mathcal{H}, \mathbf{q}_H(t)] = \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{q}_H(t) = \mathbf{q}_H(t_0) + (t - t_0) \mathbf{v}.$$

7.3.1 Regola di superselezione di Bargmann. Si è visto come la massa m sia all'origine della struttura proiettiva delle rappresentazioni di $\text{SG}(3, 1)$ su \mathcal{H}_S , manifestandosi nella presenza del termine di cociclo nella composizione (7.27) o, equivalentemente, dell'estensione centrale $\mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathcal{G}_j) = m \delta_{ij}$ nel commutatore (7.22). Vediamo ora come il ruolo della massa m sia alla base di un'importante proprietà della Meccanica Quantistica non-relativistica, nota come *regola di superselezione di Bargmann*, la quale impedisce di sovrapporre linearmente vettori di stato corrispondenti a valori diversi della massa m del sistema.

Sia dunque $\mathcal{G} = (\mathbb{1}_3, \mathbf{a}, \mathbf{v}, 0) \in \text{SG}(3, 1)$ l'elemento grupale corrispondente ad una traslazione spaziale seguita da un boost; la composizione di \mathcal{G} col suo inverso, induce su \mathbb{R}^{3+1} la trasformazione identica

$$(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{G}} (\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, t) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} (\mathbf{x}, t).$$

Alla luce della (7.25), la precedente si traduce su \mathcal{H}_S nella regola di composizione

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}^{-1}) \mathcal{U}(\mathcal{G}) = e^{\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{-\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} = e^{\imath [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] - \frac{1}{2} [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t), \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \dots} e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{-\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}},$$

avendo invocato la formula BCH (A.1). D'altra parte $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)] = \imath m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathcal{G}^{-1}) \mathcal{U}(\mathcal{G}) &= e^{\imath \frac{1}{2} m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} e^{\imath [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}]} e^{-\imath \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)} e^{-\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \\ &= e^{\imath \frac{1}{2} m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} e^{\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} [\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(t)]} e^{-\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} = e^{\imath m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \end{aligned}$$

Sappiamo del resto che la famiglia $\{\mathcal{U}(\mathcal{G}), \mathcal{G} \in \text{SG}(3, 1)\}$ è una rappresentazione di $\text{SG}(3, 1)$ su \mathcal{H}_S , sicché all'identità del gruppo $e_{\mathcal{G}}$ corrisponderà l'identità $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$. Confrontando con quanto ottenuto precedentemente, troviamo quindi che la rappresentazione di $\text{SG}(3, 1)$ su \mathcal{H}_S è *non-fedele*, avendo $e_{\mathcal{G}}$ una rappresentazione non-unica su \mathcal{H}_S . Supponiamo ora che \mathcal{H}_S sia riducibile rispetto ad $\text{SG}(3, 1)$ in sottospazi che sostengono da rappresentazioni proiettive con diversi valori di m . In particolare, siano $|\psi_m\rangle$ e $|\psi_{m'}\rangle$ due vettori di stato di \mathcal{H}_S appartenenti a sottospazi relativi a masse m ed m' , rispettivamente. Allora l'operatore $\mathcal{U}_m \equiv e^{\imath m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$ non agisce più su \mathcal{H}_S come multiplo dell'identità, in quanto la sua azione su $|\psi_{m,m'}\rangle \equiv \alpha |\psi_m\rangle + \beta |\psi_{m'}\rangle$ si traduce in un fattore di fase globale

$$\mathcal{U}_m |\psi_{m,m'}\rangle = \alpha e^{\imath m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} |\psi_m\rangle + \beta e^{\imath m' \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} |\psi_{m'}\rangle = e^{\imath M \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} \left(\alpha |\psi_m\rangle + \beta e^{\imath (m' - m) \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} |\psi_{m'}\rangle \right), \quad (7.33)$$

con $M \equiv m + m'$, la cui presenza potrebbe dar luogo a fenomeni di interferenza calcolati rispetto ad osservabili con elementi di matrice non nulli tra i settori corrispondenti ad m, m' . In Meccanica non-relativistica simili fenomeni non avvengono e per questa ragione si usa introdurre la seguente

REGOLA DI SUPERSELEZIONE (DI BARGMANN)

Se \mathcal{S} è isolato, allora i sottospazi di \mathcal{H}_S che sostengono rappresentazioni proiettive di $\text{SG}(3, 1)$ con valori differenti della massa inerziale totale m sono settori di superselezione.

In altre parole, l'assunzione che il gruppo di invarianza di un dato sistema fisico \mathcal{S} sia il gruppo di Galilei implica l'esistenza su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ di una regola di superselezione avente la massa inerziale totale di \mathcal{S} come carica di superselezione. Naturalmente, la regola di superselezione di Bargmann non ha motivo di essere soddisfatta in Meccanica Quantistica relativistica, laddove il gruppo di invarianza è il gruppo di Poincaré e la massa inerziale del sistema non è più superselezionata (né costante del moto).

7.4 Algebra di Lie di Galilei, particelle elementari e simmetrie interne. Riassumendo, in questo paragrafo si sono indagate le proprietà delle rappresentazioni di $\text{SG}(3, 1)$ partendo dalla trasformazione di una funzione d'onda piana descrivente lo stato di una particella libera di massa m . Abbiamo quindi ottenuto l'espressione (7.19) per il generatore dei boosts galileiani, a partire dalla quale abbiamo dedotto le regole di commutazione (7.20), (7.22), (7.26) e (7.31). Combinando le precedenti con le regole per la sottoalgebra $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$, troviamo l'algebra di Lie dei generatori del gruppo di Galilei³⁴

$$\mathfrak{sg}(3, 1) \quad : \quad \begin{cases} [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = \mathbb{O}, & [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] = \mathbb{O}, & [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = \imath \varepsilon_{ijk} \mathfrak{L}_k, \\ [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{p}_j] = \imath \varepsilon_{ijk} \mathfrak{p}_k, & [\mathfrak{L}_i, \mathcal{G}_j] = \imath \varepsilon_{ijk} \mathcal{G}_k, & [\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j] = m \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}, \\ [\mathcal{H}, \mathfrak{p}_i] = \mathbb{O}, & [\mathcal{H}, \mathfrak{L}_i] = \mathbb{O}, & [\mathcal{H}, \mathcal{G}_i] = \mathfrak{p}_i, \end{cases} \quad (7.34)$$

In altre parole, nel §7.3 abbiamo ricostruito l'algebra $\mathfrak{sg}(3, 1)$ a partire da una specifica realizzazione del sistema fisico \mathcal{S} . Vogliamo ora vedere come procedere nella direzione opposta, i.e. ricostruire la particella libera come rappresentazione irriducibile dell'algebra di Lie di Galilei.

A questo proposito, si consideri la seguente composizione di operatori infinitesimi

$$e^{\imath s_{\mu} \mathcal{X}_{\mu}} e^{\imath s_{\nu} \mathcal{X}_{\nu}} e^{-\imath s_{\mu} \mathcal{X}_{\mu}} e^{-\imath s_{\nu} \mathcal{X}_{\nu}} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} + s_{\nu} s_{\mu} [\mathcal{X}_{\nu}, \mathcal{X}_{\mu}] + \mathcal{O}(s_{\nu}^2 s_{\mu}, s_{\nu} s_{\mu}^2), \quad (7.35)$$

corrispondente alla composizione gruppale $g' \equiv g_{\mu}^{-1} \circ g_{\nu}^{-1} \circ g_{\mu} \circ g_{\nu} \in \mathcal{G}$. Per determinare le regole di commutazione in (7.35), possiamo eseguire la corrispondente sequenza di trasformazioni sullo spazio-tempo ed individuarne la trasformazione risultante; le regole di commutazione tra la coppia di generatori scelta differirà pertanto dal generatore corrispondente alla trasformazione indotta da $g' \in \mathcal{G}$ per non più di un multiplo dell'identità, corrispondente all'estensione centrale dell'algebra. Analizziamone alcuni esempi per $\mathcal{G} = \text{SG}(3, 1)$. Si consideri a.e. il caso in cui nella (7.35) siano coinvolte una traslazione spaziale lungo x_1 della quantità a_1 ed una traslazione temporale di τ , i.e.

$$e^{-\imath \tau \mathcal{H}} e^{\imath a_1 \mathfrak{p}_1} e^{\imath \tau \mathcal{H}} e^{-\imath a_1 \mathfrak{p}_1} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - a_1 \tau [\mathfrak{p}_1, \mathcal{H}] + \mathcal{O}(\tau^2 a_1, \tau a_1^2).$$

Al livello del punto spazio-temporale, la precedente corrisponde alla catena di trasformazioni

$$(x_1, x_2, x_3, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_{a_1}} (x_1 + a_1, x_2, x_3, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_{\tau}} (x_1 + a_1, x_2, x_3, t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{T}_{a_1}^{-1}} (x_1, x_2, x_3, t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{T}_{\tau}^{-1}} (x_1, x_2, x_3, t).$$

Le trasformazioni commutano, per cui $[\mathfrak{p}_1, \mathcal{H}] = \imath \mathcal{D}(\mathfrak{p}_1, \mathcal{H}) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$; d'altronde le stesse conclusioni si ottengono per traslazioni spaziali lungo un generico asse, per cui

$$[\mathfrak{p}_i, \mathcal{H}] = \imath \mathcal{D}(\mathfrak{p}_i, \mathcal{H}) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.36)$$

Considerazioni analoghe possono essere ripetute nel caso di composizioni tra traslazioni spaziali e boosts, traslazioni spaziali e rotazioni, boosts e rotazioni. Discutiamo ora un caso meno banale, i.e. la composizione di un boost con velocità v_1 lungo x_1 ed una traslazione temporale di τ

$$e^{-\imath \tau \mathcal{H}} e^{\imath v_1 \mathcal{G}_1} e^{\imath \tau \mathcal{H}} e^{-\imath v_1 \mathcal{G}_1} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - v_1 \tau [\mathcal{G}_1, \mathcal{H}] + \mathcal{O}(\tau^2 v_1, \tau v_1^2). \quad (7.37)$$

³⁴Si noti che le estensioni centrali per $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$ in (7.34) sono state poste a zero in modo arbitrario; tuttavia, vedremo tra breve che questo è il caso e che l'unica estensione centrale ineliminabile di $\mathfrak{sg}(3, 1)$ è data dalle costanti $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{p}_j) = m \delta_{ij}$.

Al livello spazio-temporale, le trasformazioni precedenti sono realizzate dalla catena

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, t) &\xrightarrow{\mathcal{T}_{v_1}} (x_1 + v_1 t, x_2, x_3, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_\tau} (x_1 + v_1 t, x_2, x_3, t - \tau) \\ &\xrightarrow{\mathcal{T}_{v_1}^{-1}} (x_1 + v_1 t - v_1(t - \tau), x_2, x_3, t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{T}_\tau^{-1}} (x_1 + v_1 \tau, x_2, x_3, t); \end{aligned}$$

la trasformazione risultante è quindi una traslazione spaziale lungo x_1 di $v_1 \tau$, per cui la composizione operatoriale (7.37) differirà al più per un fattore di fase $\omega(\mathcal{G}_1, \mathcal{H})$ dall'operatore $\mathcal{U}_{v_1 \tau}$, i.e.

$$e^{-i\tau\mathcal{H}} e^{iv_1\mathcal{G}_1} e^{i\tau\mathcal{H}} e^{-iv_1\mathcal{G}_1} = e^{i\omega(\mathcal{G}_1, \mathcal{H})} e^{-i(v_1\tau)\mathfrak{p}_1} \iff [\mathcal{H}, \mathcal{G}_1] = v\mathfrak{p}_1 + v\mathcal{D}(\mathcal{H}, \mathcal{G}_1)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}.$$

Dal momento che conclusioni simili valgono per ciascuno dei tre assi, troviamo in definitiva l'espressione

$$[\mathcal{H}, \mathcal{G}_i] = v\mathfrak{p}_i + v\mathcal{D}(\mathcal{H}, \mathcal{G}_i)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.38)$$

Ripetendo gli stessi argomenti per le composizioni tra rotazioni pure, rotazioni pure e traslazioni spaziali, rotazioni pure e boosts, otteniamo in definitiva le seguenti regole di commutazione per $\mathfrak{sg}(3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = v\mathcal{D}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, & \text{(f)} \quad [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = v\varepsilon_{ijk}\mathfrak{L}_k + v\mathcal{D}(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ \text{(b)} \quad [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] = v\mathcal{D}(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, & \text{(g)} \quad [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{p}_j] = v\varepsilon_{ijk}\mathfrak{p}_k + v\mathcal{D}(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{p}_j)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ \text{(c)} \quad [\mathcal{H}, \mathfrak{p}_i] = v\mathcal{D}(\mathcal{H}, \mathfrak{p}_i)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, & \text{(h)} \quad [\mathfrak{L}_i, \mathcal{G}_j] = v\varepsilon_{ijk}\mathcal{G}_k + v\mathcal{D}(\mathfrak{L}_i, \mathcal{G}_j)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ \text{(d)} \quad [\mathcal{H}, \mathfrak{L}_i] = v\mathcal{D}(\mathcal{H}, \mathfrak{L}_i)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, & \text{(i)} \quad [\mathcal{H}, \mathcal{G}_i] = v\mathfrak{p}_i + v\mathcal{D}(\mathcal{H}, \mathcal{G}_i)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \\ \text{(e)} \quad [\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j] = v\mathcal{D}(\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, & \end{array}$$

Per fissare le estensioni centrali possiamo procedere così come si è fatto nel §7.2 per $\mathfrak{se}(3, \mathbb{R})$, i.e. sfruttando la proprietà di anti-simmetria dei commutatori e l'identità di Jacobi. Operando in questo modo ed assorbendo, laddove possibile, i multipli dell'identità negli operatori, si giunge ad eliminare tutte le estensioni centrali di $\mathfrak{sg}(3, 1)$ ad eccezione delle costanti presenti nella (e), le quali sono *algebricamente irremovibili*. Infatti, applicando l'identità di Jacobi ai generatori $(\mathfrak{L}_1, \mathcal{G}_2, \mathfrak{p}_1)$ ed $(\mathfrak{L}_1, \mathcal{G}_2, \mathfrak{p}_3)$, si trova

$$\begin{aligned} v[\mathcal{G}_3, \mathfrak{p}_1] &= [\mathfrak{L}_1, \mathcal{G}_2, \mathfrak{p}_1] = [[\mathfrak{p}_1, \mathcal{G}_2], \mathfrak{L}_1] + [[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{p}_1], \mathcal{G}_2] = \mathbf{0}, \\ v[\mathcal{G}_3, \mathfrak{p}_3] &= [\mathfrak{L}_1, \mathcal{G}_2, \mathfrak{p}_3] = [[\mathfrak{p}_3, \mathcal{G}_2], \mathfrak{L}_1] + [[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{p}_3], \mathcal{G}_2] = -v[\mathfrak{p}_2, \mathcal{G}_2], \end{aligned}$$

dalle quali segue che $[\mathcal{G}_i, \mathfrak{p}_j] = \mathbf{0}$ per ogni $i \neq j$ ed $[\mathcal{G}_i, \mathfrak{p}_i] = [\mathcal{G}_j, \mathfrak{p}_j]$, rispettivamente. Pertanto

$$[\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j] = m\delta_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (7.39)$$

dove $m \in \mathbb{R}$ è una costante reale arbitraria caratteristica dell'algebra di Lie di Galilei.

7.4.1 Particelle elementari e variabili dinamiche. Determinate le regole di commutazione per l'algebra $\mathfrak{sg}(3, 1)$, proviamo ad identificarne i generatori con le variabili dinamiche di \mathcal{S} . A questo proposito, occorre individuare un sistema invariante rispetto ad $\text{SG}(3, 1)$; possiamo farci guidare dal principio di invarianza, grazie al quale sappiamo che se \mathcal{S} è isolato allora \mathcal{H}_S sostiene una rappresentazione unitaria di $\text{SG}(3, 1)$ individuata dalla famiglia di operatori $\Gamma \equiv \{\mathcal{U}(\mathcal{G}), \mathcal{G} = (\mathcal{R}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \tau) \in \mathcal{G}\}$. Tale rappresentazione è usualmente *riducibile* su \mathcal{H}_S , nel senso che tipicamente è possibile individuare un sottospazio proprio \mathcal{H}' di \mathcal{H}_S che sia Γ -invariante, i.e. tale per cui $\forall \mathcal{U}(\mathcal{G}) \in \Gamma, \forall \mathcal{G} \in \text{SG}(3, 1)$ e $\forall |\psi'\rangle \in \mathcal{H}'$ risulta $\mathcal{U}(\mathcal{G})|\psi'\rangle \in \mathcal{H}'$. In particolare, tanto più \mathcal{S} è complesso e quindi più numerose sono le sue osservabili fondamentali, tanto più riducibile sarà Γ su \mathcal{H}_S . Risulta quindi naturale dare la seguente

DEFINIZIONE (PARTICELLA ELEMENTARE) - Sia \mathcal{S} isolato e non-relativistico. Diremo che \mathcal{S} è una *particella elementare libera* se $\Gamma = \{\mathcal{U}(\mathcal{G}), \mathcal{G} = (\mathcal{R}, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \tau) \in \text{SG}(3, 1)\}$ è irriducibile su \mathcal{H}_S .

Il concetto di irriducibilità serve quindi a specificare dal punto di vista matematico quello di elementarità. In linea di principio è allora possibile dare una classificazione completa dell'insieme di particelle

elementari ammesse in Meccanica Quantistica non-relativistica, individuando tutte le rappresentazioni proiettive unitarie irriducibili di $SG(3, 1)$. Si tratta però di un problema complesso, per cui ci limiteremo a descrivere come ricostruire la particella libera (con o senza gradi di libertà interni) partendo dall'algebra di Lie (7.34). A tal fine avremo bisogno del seguente, fondamentale

LEMMA (SCHUR) - Sia $\{\mathfrak{D}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ un insieme irriducibile di operatori di \mathcal{H}_S ed $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_\mathcal{A})$ un generico operatore. Se $[\mathcal{A}, \mathfrak{D}_i] = \mathbf{0}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, allora $\mathcal{A} = \alpha \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Consideriamo quindi un sistema per il quale la coppia $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}\}$ forma un insieme irriducibile di operatori, le cui regole di commutazione "canoniche" sono ottenute traducendo al livello infinitesimo la trasformazione finita $\mathcal{U}_\mathfrak{a}^\dagger \mathfrak{q} \mathcal{U}_\mathfrak{a} = \mathfrak{q} + \mathfrak{a} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, per cui $[\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_j] = i\delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$. Determiniamo l'azione di $\mathcal{U}_\mathfrak{v} = e^{-i\mathfrak{v} \cdot \mathcal{G}}$ sull'operatore di posizione: interpretando attivamente la trasformazione indotta dal boost, troviamo

$$(\mathcal{U}_\mathfrak{v}^\dagger \mathfrak{q} \mathcal{U}_\mathfrak{v} \psi)(\mathbf{x}, t) = (\mathfrak{q} \mathcal{U}_\mathfrak{v} \psi)(\mathbf{x} + \mathfrak{v}t, t) = (\mathbf{x} + \mathfrak{v}t)(\mathcal{U}_\mathfrak{v} \psi)(\mathbf{x} + \mathfrak{v}t, t) = [(\mathfrak{q} + \mathfrak{v}t \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}) \psi](\mathbf{x}, t),$$

ovvero $\mathcal{U}_\mathfrak{v}^\dagger \mathfrak{q} \mathcal{U}_\mathfrak{v} = \mathfrak{q} + \mathfrak{v}t \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, in accordo con la trasformazione operatoriale ottenuta nel §7.3 partendo dall'espressione (7.19) per il generatore \mathcal{G} . Al livello infinitesimo, troviamo quindi la regola di commutazione $[\mathfrak{q}_i, \mathcal{G}_j] = i\delta_{ij} t \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$. Combinando la precedente con la (7.39), è immediato verificare che l'operatore $\mathcal{A} \equiv \mathcal{G} + m\mathfrak{q} - t\mathfrak{p}$ commuta sia con \mathfrak{p} che con \mathfrak{q} , infatti

$$\begin{aligned} [\mathfrak{q}_i, \mathcal{A}_j] &= [\mathfrak{q}_i, \mathcal{G}_j] + m[\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j] - t[\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_j] = i\delta_{ij} t \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} - i\delta_{ij} t \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} = \mathbf{0}, \\ [\mathfrak{p}_i, \mathcal{A}_j] &= [\mathfrak{p}_i, \mathcal{G}_j] + m[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_j] - t[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = i\delta_{ij} m \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} - i\delta_{ij} m \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

per $i, j = 1, 2, 3$. Dal lemma di Schur segue allora che $\exists \boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3$ t.c. $\mathcal{G} = t\mathfrak{p} - m\mathfrak{q} + \boldsymbol{\alpha} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$. D'altronde le regole di commutazione per l'algebra di Lie (7.34) ci dicono che \mathcal{G} è un operatore vettoriale, per cui $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ necessariamente. In definitiva, troviamo per il generatore dei boost l'espressione

$$\mathcal{G}(t) = t\mathfrak{p} - m\mathfrak{q},$$

come atteso (vedi formula (7.19)). Consideriamo ora il generatore delle rotazioni pure; nel §5.4 si è visto che \mathfrak{q} si trasforma vettorialmente sotto rotazioni, ovvero $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{q}_j] = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{q}_k$ per $i, j, k = 1, 2, 3$. Sia dunque $\mathfrak{J} \equiv \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{p}$, i.e. $\mathfrak{J}_i = \varepsilon_{ijk} \mathfrak{q}_j \mathfrak{p}_k$: \mathfrak{J} soddisfa regole algebriche analoghe a quelle soddisfatte dal generatore delle rotazioni \mathfrak{L} nell'algebra (7.34); in aggiunta, vale la relazione $[\mathfrak{J}_i, \mathfrak{q}_j] = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{q}_k$. Ne segue che l'operatore $\mathcal{L} \equiv \mathfrak{L} - \mathfrak{J}$ commuta sia con \mathfrak{q} che con \mathfrak{p} , infatti

$$\begin{aligned} [\mathfrak{q}_i, \mathcal{L}_j] &= [\mathfrak{q}_i, \mathfrak{L}_j] - \varepsilon_{jkl} [\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k \mathfrak{p}_l] = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{q}_k + \varepsilon_{jkl} \mathfrak{q}_k [\mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_i] = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{q}_k - i\varepsilon_{jkl} \delta_{li} \mathfrak{q}_k = \mathbf{0}, \\ [\mathfrak{p}_i, \mathcal{L}_j] &= [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{L}_j] - \varepsilon_{jkl} [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_k \mathfrak{p}_l] = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{p}_k + \varepsilon_{jkl} [\mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_i] \mathfrak{p}_l = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{p}_k + i\varepsilon_{jkl} \delta_{ki} \mathfrak{p}_l = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Invocando nuovamente il lemma di Schur, troviamo $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{J}_i + \beta \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, con $\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$; anche in questo caso le costanti β_i devono annullarsi affinché la regola di commutazione $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = i\varepsilon_{ijk} \mathfrak{L}_k$ sia soddisfatta. Pertanto, per un sistema isolato senza gradi di libertà interni risulta

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{p}. \quad (7.40)$$

Resta da determinare l'espressione per il generatore delle traslazioni temporali $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$. In tal caso è sufficiente partire dalla condizione $[\mathcal{G}_i, \mathcal{H}] = i\mathfrak{p}_i$ che, alla luce dell'espressione per \mathcal{G} , si riscrive nella forma $[\mathcal{H}, \mathfrak{q}_i] = im^{-1} \mathfrak{p}_i$. Dalle regole di commutazione canoniche segue che la dipendenza di \mathcal{H} da \mathfrak{p} dev'essere del secondo ordine, i.e. $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, la quale pur soddisfacendo le precedenti condizioni può non essere unica. Infatti, è immediato verificare che l'operatore $\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H} - \frac{1}{2m} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ commuta con \mathfrak{p} e \mathfrak{q} :

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}', \mathfrak{q}_i] &= [\mathcal{H}, \mathfrak{q}_i] - \frac{1}{2m} [\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}, \mathfrak{q}_i] = im^{-1} \mathfrak{p}_i - \frac{1}{2m} [\mathfrak{p}_i^2, \mathfrak{q}_i] = \mathbf{0}, \\ [\mathcal{H}', \mathfrak{p}_i] &= [\mathcal{H}, \mathfrak{p}_i] - \frac{1}{2m} [\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i] = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

per cui, a fronte del lemma di Schur, segue che \mathcal{H}' dev'essere un multiplo dell'identità, ovvero

$$\mathcal{H}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \frac{1}{2m} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} + \mathcal{E}_0 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (7.41)$$

dove $\mathcal{E}_0 \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria³⁵. Introduciamo infine l'operatore velocità $\mathbf{v} = \iota[\mathcal{H}, \mathbf{q}]$: nel §7.3 si era visto notato che $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; combinando quest'ultima con le relazioni (7.40) e (7.41), troviamo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathcal{L} = \mathbf{q} \wedge m\mathbf{v}, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{E}_0 \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (7.42)$$

dalle quali risulta evidente l'interpretazione fisica dei generatori \mathbf{p} , \mathcal{L} e \mathcal{H} .

OSSERVAZIONE – Se la carica centrale m corrispondesse alla massa della particella libera, allora le relazioni (7.42) rappresenterebbero le formule familiari per il momento lineare, il momento angolare e l'energia della particella. Tuttavia, poiché m non rappresenta necessariamente una massa, tutto ciò che possiamo dedurre dalle relazioni precedenti sono le regole di proporzionalità

$$\frac{m}{\text{massa}} = \frac{\mathbf{p}}{\text{momento lineare}} = \frac{\mathcal{L}}{\text{momento angolare}} = \frac{\mathcal{H}}{\text{energia}} \equiv \hbar^{-1}, \quad (7.43)$$

dove \hbar emerge dalla (7.43) come una costante fondamentale della teoria ed è nota come **costante di Planck ridotta**, essendo in realtà definita in termini della costante di Planck h come $\hbar = h/2\pi$. Il valore di \hbar è fissato sperimentalmente e vale $\hbar \simeq 1.054571726(47) \times 10^{-34} \text{Js}$ (CODATA, 2010). Alla luce di tanto, si usa spesso adoperare una notazione più convenzionale per i simboli m , \mathbf{p} , \mathcal{L} ed \mathcal{H} ridefinendo questi ultimi di modo che corrispondano rispettivamente alla *massa*, al *momento lineare*, al *momento angolare* ed all'*energia* del sistema. Sarà allora necessario riscrivere l'espressione (7.25) per l'operatore $\mathcal{U}(g)$ secondo le sostituzioni $m \mapsto m\hbar^{-1}$, $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}\hbar^{-1}$, $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}\hbar^{-1}$ ed $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}\hbar^{-1}$, sicché

$$\mathcal{U}(G) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{L}}, \quad G \in \text{SG}(3, 1).$$

7.4.2 Osservabile di spin e simmetrie interne. Supponiamo ora che la terna $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}\}$ individui l'insieme di osservabili fondamentali di \mathcal{S} , essendo $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)^\top$ l'operatore di \mathcal{H}_S relativo allo spin; evidentemente $[\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_j] = \mathbf{0} = [\mathbf{p}_i, \mathbf{s}_j]$. Per definizione \mathbf{s} rappresenta il contributo intrinseco al momento angolare totale, per cui occorrerà tenerne conto nell'espressione per \mathcal{L} ; la scelta più semplice per esprimere tale dipendenza è quella lineare: in luogo della (7.40), il generatore delle rotazioni si scriverà come

$$\mathcal{L} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{s}. \quad (7.44)$$

Dalle regole di commutazione per \mathcal{L} segue che anche \mathbf{s} deve soddisfare la condizione

$$[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j] = \iota \varepsilon_{ijk} \mathbf{s}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (7.45)$$

Vediamo come tale modifica si riflette sui restanti generatori, i.e. sulla dipendenza funzionale di \mathcal{G} ed \mathcal{H} da $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}\}$. Cominciamo dal generatore dei boost: procedendo come nel §7.4.1, troviamo che $\mathcal{G} - t\mathbf{p} + m\mathbf{q}$ commuta con \mathbf{q} e \mathbf{q} , ma può non commutare con \mathbf{s} , dato che $[\mathcal{G}_i, \mathbf{s}_j] \neq \mathbf{0}$ in generale. Assumiamo quindi che la dipendenza di \mathcal{G} da \mathbf{s} sia contenuta nella funzione vettoriale $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{s})$; l'unica funzione vettoriale di \mathbf{s} è al più un multiplo di \mathbf{s} stesso (essendo $\mathbf{s} \wedge \mathbf{s} = \iota \mathbf{s}$), per cui $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \alpha \mathbf{s}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ una costante arbitraria e quindi $\mathcal{G}(t, \mathbf{s}) = t\mathbf{p} - m\mathbf{q} + \alpha \mathbf{s}$. Ma le componenti di \mathcal{G} commutano, sicché

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= [\mathcal{G}_i(t, \mathbf{s}), \mathcal{G}_j(t, \mathbf{s})] = [t\mathbf{p}_i - m\mathbf{q}_i + \alpha \mathbf{s}_i, t\mathbf{p}_j - m\mathbf{q}_j + \alpha \mathbf{s}_j] \\ &= mt[\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_i] - mt[\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] + \alpha^2 [\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j] = \iota mt(\delta_{ji} - \delta_{ij}) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} + \iota \alpha^2 \varepsilon_{ijk} \mathbf{s}_k, \end{aligned} \quad \iff \quad \alpha \equiv 0$$

e cioè $\mathcal{G}(t) = t\mathbf{p} - m\mathbf{q}$. In particolare $[\mathcal{G}_i, \mathbf{s}_j] = \mathbf{0}$ per $i, j = 1, 2, 3$, ovvero una trasformazione di Galilei pura non induce alcuna trasformazione sullo spin del sistema³⁶. Passiamo al generatore delle traslazioni temporali: anche in questo caso, seguendo le stesse argomentazioni del §7.4.1, vale per \mathcal{H} l'espressione (7.41) dove però \mathcal{E}_0 può essere ora una funzione scalare di \mathbf{s} , i.e. $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{E}_0(\mathbf{s})$. La dipendenza funzionale di \mathcal{E}_0 da \mathbf{s} è fissata dalla regola di commutazione $[\mathcal{L}_i, \mathcal{H}] = \mathbf{0}$ per $i = 1, 2, 3$,

³⁵Non c'è ragione per fissare a zero detta costante, sicché $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ è unica a meno di multipli dell'identità.

³⁶Come atteso, essendo \mathbf{s} relativo al centro di massa del sistema.

dalla quale segue che $[\mathcal{L}_i, \mathcal{E}_0(\mathfrak{s})] = \mathbf{0}$. La precedente condizione è soddisfatta sse $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s})$, in quanto dalla (7.45) segue banalmente che $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}] = \mathbf{0}$ per $i = 1, 2, 3$. Si noti che la nuova forma di \mathcal{H} non modifica l'espressione per l'operatore velocità $\mathfrak{v} = \iota[\mathcal{H}, \mathfrak{q}]$ dal momento che $[\mathcal{E}_0(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}), \mathfrak{q}] = \mathbf{0}$, per cui l'identificazione $\mathfrak{p} = m\mathfrak{v}$ resta valida. In particolare, valgono ancora le identificazioni precedenti tra i generatori e le variabili dinamiche di \mathcal{S} , con l'unica differenza che ora \mathcal{E}_0 non è più una costante arbitraria, ma corrisponde al contributo in energia proveniente dallo spin del sistema.

OSSERVAZIONE – Spesso si usa far riferimento allo spin come ad una variabile dinamica corrispondente ad "grado di libertà interno" del sistema. In letteratura, tuttavia, si usa spesso distinguere il ruolo dello spin (inteso come solo contributo intrinseco al momento angolare di \mathcal{S}) dal ruolo di altri gradi di libertà interni, ai quali corrispondono usualmente osservabili in commutazione con i generatori di $\text{SG}(3, 1)$, ad eccezione di \mathcal{H} . Di fatto, risulta quindi più appropriato riservare a questi ultimi il titolo di gradi di libertà interni di \mathcal{S} ³⁷. L'esempio più noto di grado di libertà interno è l'**isospin**, una variabile dinamica che permette di distinguere tra gli stati di tipo "protone" e "neutrone" del nucleone. Le differenze tra questi ultimi, infatti, sono interamente dovute all'interazione elettrodebole in assenza della quale i due stati sarebbero indistinguibili. In quest'ultimo caso, il sistema \mathcal{S} ammetterebbe una perfetta **simmetria interna**, descritta dal gruppo di isospin $\text{SU}(2)$ e cioè dal gruppo delle matrici 2×2 unitarie a determinante unitario ed avrebbe come *gruppo di invarianza globale* il prodotto diretto $\text{SG}(3, 1) \otimes \text{SU}(2)$.

7.5 Interazioni minimali e rottura di simmetria. Affrontiamo ora il problema dell'interazione tra particelle e tra particelle e campi esterni nell'ipotesi che $\text{SG}(3, 1)$ sia il gruppo di invarianza di \mathcal{S} .

Consideriamo dapprima il caso di un sistema composto da N particelle libere: evidentemente, avremo

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H}_n,$$

essendo \mathcal{H}_n lo spazio di Hilbert della particella n -esima. Detto quindi $\mathfrak{q}_{\mathcal{S}}^{(n)} \equiv \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n-1}} \otimes \mathfrak{q}_n \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n+1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_N}$ l'operatore di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ corrispondente alla posizione della particella n -esima, avremo

$$[\mathfrak{q}_i^{(n)}, \mathfrak{q}_j^{(m)}] = \mathbf{0}, \quad \forall n, m = 1, 2, \dots, N, \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

In particolare, se \mathcal{S} è Galilei-invariante, allora ciascun generatore di $\mathfrak{sg}(3, 1)$ sarà rappresentato su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ come *somma di Kronecker* dei corrispondenti generatori che agiscono sui relativi sottospazi di singola particella; in altri termini, la trasformazione di simmetria indotta dall'elemento grupale $\mathcal{G} \in \text{SG}(3, 1)$ sullo spazio-tempo è implementata su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ attraverso l'operatore unitario

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}) = e^{\iota\tau\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} e^{-\iota\mathfrak{v} \cdot \mathcal{G}_{\mathcal{S}}} e^{-\iota\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}_{\mathcal{S}}} e^{-\iota\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{L}_{\mathcal{S}}} \quad \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{H}_1 \tilde{\oplus} \cdots \tilde{\oplus} \mathcal{H}_N, & \mathfrak{p}_{\mathcal{S}} \equiv \mathfrak{p}_1 \tilde{\oplus} \cdots \tilde{\oplus} \mathfrak{p}_N, \\ \mathcal{G}_{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{G}_1 \tilde{\oplus} \cdots \tilde{\oplus} \mathcal{G}_N, & \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{L}_1 \tilde{\oplus} \cdots \tilde{\oplus} \mathcal{L}_N, \end{cases}$$

dove il simbolo $\tilde{\oplus}$ definisce la somma operatoriale di Kronecker, i.e. $\mathfrak{a}_i \tilde{\oplus} \mathfrak{a}_j = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_i} \otimes \mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}_i \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_j}$. L'algebra di Lie (7.34) dei generatori di $\text{SG}(3, 1)$ resta dunque inalterata, a meno della presenza di una delta di Kronecker δ_{nm} con $n, m = 1, 2, \dots, N$ caratterizzante l'indice di particella, ovvero

$$\begin{aligned} [\mathfrak{p}_i^{(n)}, \mathfrak{p}_j^{(m)}] &= \mathbf{0}, & [\mathcal{G}_i^{(n)}, \mathcal{G}_j^{(m)}] &= \mathbf{0}, & [\mathcal{L}_i^{(n)}, \mathcal{L}_j^{(m)}] &= \iota\delta_{nm}\varepsilon_{ijk}\mathcal{L}_k^{(m)}, \\ [\mathcal{L}_i^{(n)}, \mathfrak{p}_j^{(m)}] &= \iota\delta_{nm}\varepsilon_{ijk}\mathfrak{p}_k^{(m)}, & [\mathcal{L}_i^{(n)}, \mathcal{G}_j^{(m)}] &= \iota\delta_{nm}\varepsilon_{ijk}\mathcal{G}_k^{(m)}, & [\mathfrak{p}_i^{(n)}, \mathcal{G}_j^{(m)}] &= \iota M\delta_{nm}\delta_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}, \\ [\mathcal{H}^{(n)}, \mathfrak{p}_i^{(m)}] &= \mathbf{0}, & [\mathcal{H}^{(n)}, \mathcal{L}_i^{(m)}] &= \mathbf{0}, & [\mathcal{H}^{(n)}, \mathcal{G}_i^{(m)}] &= \iota\delta_{nm}\mathfrak{p}_i^{(m)}, \end{aligned}$$

dove M è la massa totale. Valgono inoltre le regole di commutazione canoniche $[\mathfrak{q}_i^{(n)}, \mathfrak{p}_j^{(m)}] = \iota\delta_{nm}\delta_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$.

Supponiamo ora che le particelle interagiscano mutuamente secondo una relazione al momento non

³⁷Lo spin, trasformandosi sotto rotazioni, non è una vera osservabile interna del sistema.

specificata. È facile convincersi che \mathcal{H}_S dev'essere l'unico tra i generatori di $\text{SG}(3, 1)$ ad essere modificato dalla presenza di interazioni in \mathcal{S} ; infatti, gli operatori \mathfrak{p}_S , \mathfrak{L}_S ed \mathfrak{G}_S implementano su \mathcal{H}_S l'azione di trasformazioni puramente geometriche dello spazio-tempo; viceversa, sappiamo che l'operatore \mathcal{H}_S può essere interpretato come il generatore dell'evoluzione dinamica di \mathcal{S} su \mathcal{H}_S e dal momento che la dinamica viene modificata dalla presenza di interazione, dobbiamo attenderci che anche \mathcal{H}_S risulti parimenti modificato. Consideriamo, e.g., due particelle di masse m_1 , m_2 e spin \mathfrak{s}_1 , \mathfrak{s}_2 . L'invarianza galileiana di \mathcal{S} impone delle severe restrizioni sulle possibili realizzazioni dell'interazione tra le due particelle: la forma più generale di Hamiltoniano compatibile è dato da

$$\mathcal{H}_S = \frac{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_1}{2m_1} + \frac{\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2}{2m_2} + \mathcal{V}(r, \mathfrak{s}_S \cdot \mathfrak{s}_S), \quad (7.46)$$

dove $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ è la distanza relativa tra le particelle, $\mathfrak{s}_S = \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2$ è l'operatore di spin totale e \mathcal{V} è il potenziale di interazione. D'altronde $\mathfrak{s}_i \cdot \mathfrak{s}_i = s_i(s_i + 1)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_i}$ (è un Casimir), per cui

$$\mathfrak{s}_S \cdot \mathfrak{s}_S = s_1(s_1 + 1)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} + s_2(s_2 + 1)\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} + 2\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_2,$$

e quindi $\mathcal{V} = \mathcal{V}(r, \mathfrak{s}_S \cdot \mathfrak{s}_S)$ può scriversi come funzione del prodotto scalare tra gli operatori di spin³⁸.

La generalizzazione al caso di N particelle è immediata: l'invarianza galileiana fissa la dipendenza di \mathcal{H}_S da \mathfrak{p}_S , \mathfrak{L}_S e \mathfrak{q} , essendo ora $\mathfrak{q}_S = \frac{1}{M} \bigoplus_n m_n \mathfrak{q}_n$ l'operatore corrispondente al centro di massa del sistema; tenendo presente che $\mathfrak{G}_S = t\mathfrak{p}_S - M\mathfrak{q}_S$, dev'essere $\mathcal{H} = \frac{1}{2M}\mathfrak{p}_S + \mathcal{H}_{int}$, dove \mathcal{H}_{int} deve commutare con tutti i generatori di $\mathfrak{sg}(3, 1)$ (quindi anche con \mathfrak{q}_S). L'unica possibilità è che \mathcal{H}_{int} non dipenda né da \mathfrak{p}_S , \mathfrak{L}_S ed \mathfrak{q}_S , né da altre osservabili con proprietà di trasformazioni non-banali rispetto a $\text{SG}(3, 1)$. Resta la possibilità che \mathcal{H}_{int} dipenda dalle distanze relative $r_{nm} = |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|$, dai quadrati dei momenti relativi $\frac{1}{2}(m_n \mathfrak{p}_m - m_m \mathfrak{p}_n)/(m_n + m_m)$ oppure dai prodotti scalari tra spin $\mathfrak{s}_i \cdot \mathfrak{s}_j$. L'invarianza galileiana non pone vincoli sulla dipendenza di \mathcal{H}_{int} dalle suddette osservabili, per cui esistono argomenti di diversa natura per cercare di limitare le molteplici possibilità. La dipendenza dai momenti di ciascuna particella, e.g., può essere fissata confrontando \mathcal{H}_S con l'hamiltoniano $\mathcal{H}_{S,free}$ corrispondente ad N particelle libere: se l'interazione è istantanea e non dipende dalle velocità relative (ma solo dalle posizioni relative e dagli spin), allora $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{S,free} + \mathcal{V}$ dove \mathcal{V} non dipende dai momenti. La forma di \mathcal{V} è quindi introdotta a mano, rendendo il modello in studio una teoria efficace per il sistema fisico reale; in particolare, si usa spesso introdurre in \mathcal{V} un termine di interazione a due corpi, tale per cui

$$\mathcal{H}_S \simeq \mathcal{H}_{S,free} + \sum_{n \leq m} \mathcal{V}(r_{nm}, \mathfrak{s}_n \cdot \mathfrak{s}_m), \quad \mathcal{H}_{S,free} = \bigoplus_n \frac{1}{2m_n} \mathfrak{p}_n \cdot \mathfrak{p}_n.$$

7.5.1 Interazione con un campo esterno. Consideriamo ora l'interazione di una singola particella con un campo esterno ed assumiamo che il suo moto non modifichi la configurazione delle particelle generanti il campo di forze cui essa risponde. La presenza di un campo di forze "esterno", i.e. le cui proprietà non siano riconducibili alle equazioni dinamiche del moto, produce inevitabilmente una *rottura dell'invarianza galileiana* del sistema, la quale si manifesta in un'alterazione delle regole di commutazione (7.34), in particolare delle relazioni coinvolgenti \mathcal{H} ed i restanti generatori di $\mathfrak{sg}(3, 1)$. Un campo esterno non-uniforme, infatti, individua tipicamente posizioni e/o direzioni privilegiate nello spazio, per cui non è in generale garantito che la dinamica di \mathcal{S} resti invariante rispetto a traslazioni spaziali e/o rotazioni, i.e. $[\mathcal{H}, \mathfrak{p}] \neq 0 \neq [\mathcal{H}, \mathfrak{L}]$; analogamente $[\mathcal{H}, \mathfrak{G}_i] \neq i\mathfrak{p}_i$, potendo ora \mathcal{H} dipendere esplicitamente da \mathfrak{q} . In aggiunta, il campo esterno (e quindi l'hamiltoniano \mathcal{H}) può essere variabile nel tempo, rompendo così anche l'invarianza per traslazioni temporali. Per semplicità, partiamo dal caso di sistemi conservativi; vedremo dopo come estendere il discorso in presenza di campi variabili nel tempo.

Sia quindi $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ l'operatore velocità di \mathcal{S} ; in presenza di forze esterne, vale ancora per \mathbf{v} l'espressione $\mathbf{v} = i[\mathcal{H}, \mathfrak{q}]$, essendo quest'ultima ottenuta a partire dall'equazione del moto del sistema (i.e. indipendentemente dalla forma di \mathcal{H} , vedi §7.3). Determiniamo la trasformazione di \mathbf{v} rispetto a boosts galileiani: tenendo presente che $(\mathbf{v}) := d_t \langle \mathfrak{q} \rangle$ e che $\mathcal{U}_v^\dagger \mathfrak{q} \mathcal{U}_v = \mathfrak{q} + \mathbf{v}t\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, risulta

$$\mathcal{U}_v^\dagger \mathbf{v} \mathcal{U}_v = \mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad (7.47)$$

³⁸Si noti comunque che l'invarianza galileiana non impone vincoli sulla dipendenza di \mathcal{V} da r .

avendo osservato che $\langle \mathcal{U}_\downarrow^\dagger \mathbf{v} \mathcal{U}_\downarrow \rangle = \langle \mathbf{v}' \rangle = d_t \langle \mathbf{q} + \mathbf{v} t \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} \rangle$ per definizione. La trasformazione finita (7.47) si traduce al livello infinitesimo nella regola di commutazione

$$[\mathbf{v}_i, \mathcal{G}_j] = i \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7.48)$$

D'altra parte, le regole di commutazione tra le componenti di \mathcal{G} , \mathbf{p} e \mathbf{q} restano anch'esse invariate, essendo indipendenti da \mathcal{H} ; di conseguenza, ripetendo il ragionamento seguito nel §7.4.1, vale ancora l'espressione $\mathcal{G} = t\mathbf{p} - m\mathbf{q}$. Combinando quest'ultima con la (7.48), troviamo

$$[\mathbf{v}_i, t\mathbf{p}_j - m\mathbf{q}_j] = i \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i)} & [\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_j] = \mathbb{O}, \quad [\mathbf{v}_i, \mathbf{q}_j] = -i \delta_{ij} m^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}, \\ \text{(ii)} & [\mathbf{v}_i, \mathbf{q}_j] = \mathbb{O}, \quad [\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_j] = i \delta_{ij} t^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che la condizione (ii) è incompatibile col caso in studio, essendo $[\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_j]$ singolare in $t = 0$ ed \mathcal{S} conservativo per ipotesi³⁹. L'operatore velocità \mathbf{v} deve allora soddisfare simultaneamente le condizioni $[\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_j] = \mathbb{O}$, $[\mathbf{v}_i, \mathbf{q}_j] = -i \delta_{ij} m^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$: evidentemente $\mathbf{v} = m^{-1} \mathbf{p}$ è soluzione delle precedenti, ma non è più unica (per via della possibile dipendenza di \mathcal{H} da \mathbf{q}). Ciononostante, l'operatore $\mathbf{a} \equiv \mathbf{v} - m^{-1} \mathbf{p}$ commuta con le componenti di \mathbf{q} e con $\mathbf{s}^2 = s(s+1) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$ e questi ultimi (a loro volta in commutazione) formano un insieme completo di operatori in commutazione (I.C.O.C.), per cui qualsiasi operatore che commuti con essi, dev'essere esso stesso funzione di \mathbf{q} ed \mathbf{s}^2 . In altre parole $\mathbf{a} = \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)$, essendo $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)^\top$ una funzione vettoriale arbitraria, ovvero

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} [\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)]. \quad (7.49)$$

A questo punto è sufficiente inserire la (7.49) in $\mathbf{v} = i[\mathcal{H}, \mathbf{q}]$ per ottenere \mathcal{H} : una possibile soluzione è

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}^2) = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)]^2 \equiv \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)] \cdot [\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)].$$

L'espressione per \mathcal{H} può essere univocamente fissata osservando che $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ commuta con \mathbf{q} : infatti, alla luce della (7.49) si trova $i[\mathcal{H} - \mathcal{H}_0, \mathbf{q}] = \mathbf{v} - \frac{i}{2m} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}, \mathbf{q}] = \mathbf{v} - \frac{i}{m} (\mathbf{p} + \mathcal{A}) = \mathbb{O}$. Di conseguenza $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ deve a sua volta essere una funzione scalare di \mathbf{q} ed \mathbf{s}^2 , i.e.⁴⁰

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)]^2 + \mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2). \quad (7.51)$$

OSSERVAZIONE – Si noti che gli operatori coinvolti nella (7.51) possono essere intesi sia in interpretazione alla Schrödinger che in interpretazione alla Heisenberg, dato che \mathcal{H} è una costante del moto. Per sistemi non-conservativi, i.e. in presenza di campi esterni non-uniformi variabili nel tempo, la trattazione precedente resta valida a patto che tutti gli operatori coinvolti siano sostituiti con i corrispondenti evoluti di Heisenberg, dato che le regole di commutazione restano invariate in forma sotto l'azione di \mathcal{U}_{t,t_0} . In particolare, le relazioni (7.49) ed (7.51) si riscriveranno rispettivamente come

$$\mathbf{v}_H(t) = \frac{1}{m} [\mathbf{p}_H(t) - \mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2, t)], \quad (7.52)$$

$$\mathcal{H}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}, t) = \frac{1}{2} m [\mathbf{v}_H(t)]^2 + \mathcal{W}_H(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2, t), \quad (7.53)$$

³⁹L'invarianza per traslazioni temporali implica che l'istante $t = 0$ non ha nulla di più speciale rispetto agli altri.

⁴⁰È possibile giungere allo stesso risultato seguendo una via alternativa. Partiamo dalla trasformazione $e^{i\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}} \mathbf{v} e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}} = \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, con $\mathcal{G} = t\mathbf{p} - m\mathbf{q}$. La presenza di un campo esterno non-uniforme fa sì che i boosts non siano più delle invarianze di \mathcal{S} , in quanto $[\mathcal{H}, \mathcal{G}_i] \neq i\mathbf{p}_i$, in generale. Ciononostante, è possibile ancora far valere una sorta di invarianza, i.e. quella rispetto a *boosts istantanei* (dopotutto \mathcal{S} è conservativo, i.e. invariante per traslazioni temporali), nel qual caso $\mathcal{G} = -m\mathbf{q}$. Combinando la precedente con la relazione $[\mathcal{G}_i, \mathbf{v}_j] = -i \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}$, si trova $[\mathbf{p}_i - m\mathbf{v}_i, \mathcal{G}_j] = -m[\mathbf{p}_i, \mathcal{q}_j] - m[\mathbf{v}_i, \mathcal{G}_j] = \mathbb{O}$, per cui $\mathbf{p} - m\mathbf{v} = \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)$. Ma $\mathcal{G} = -m\mathbf{q}$ genera un'invarianza di \mathcal{S} e quindi (vedi (6.24))

$$[\mathcal{H}, \mathcal{G}_i] = i \partial_t \mathcal{G}_i = i m \mathbf{v} = i [\mathbf{p}_i - \mathcal{A}_i(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)], \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.50)$$

dove al secondo passaggio abbiamo implicitamente tenuto conto della definizione $\langle \mathbf{v} \rangle := d_t \langle \mathbf{q} \rangle$; la (7.50) sostituisce la relazione $[\mathcal{H}, \mathcal{G}_i] = i\mathbf{p}_i$ valida nel caso libero. La forma di \mathcal{H} è fissata: infatti, una soluzione immediata della (7.50) è data da $\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2)]^2$, sicché $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ commuta con \mathbf{q} e quindi \mathcal{H} dev'essere della forma (7.51).

dove $\mathcal{A}_H(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2, t) \equiv \mathcal{A}(\mathbf{q}_H(t), \mathbf{s}_H^2(t), t)$ e $\mathcal{W}_H(\mathbf{q}, \mathbf{s}^2, t) = \mathcal{W}(\mathbf{q}_H(t), \mathbf{s}_H^2(t), t)$. In particolare, le relazioni (7.52) ed (7.53) restano valide sia nella pittura di Heisenberg che in quella di Schrödinger, in quanto

$$\mathcal{U}_{t,t_0} f(\mathbf{q}_H(t), \mathbf{s}_H^2(t), t) \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger = f(\mathcal{U}_{t,t_0} \mathbf{q}_H(t) \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger, \mathcal{U}_{t,t_0} \mathbf{s}_H^2(t) \mathcal{U}_{t,t_0}^\dagger, t).$$

Il risultato ottenuto è particolarmente significativo in assenza di spin: l'invarianza della dinamica rispetto a boosts istantanei di Galilei (vedi nota 39) impone che le uniche interazioni possibili tra la particella ed il campo esterno corrispondano ad un hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ contenente un *potenziale scalare* $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{q}, t)$ ed un *potenziale vettore* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{q}, t)$. La somiglianza di questo risultato con l'**accoppiamento minimale** tra una particella carica ed il campo elettromagnetico, porterebbe allora indurre ad interpretare \mathcal{H} come l'hamiltoniano relativo a tale interazione; tuttavia, né \mathcal{A} né \mathcal{W} possono essere identificati con i potenziali elettromagnetici visto che essi non soddisfano (in generale) le equazioni di Maxwell⁴¹. C'è poi una seconda ragione se non è possibile a questo livello identificare \mathcal{A} e \mathcal{W} coi potenziali elettromagnetici. Assumiamo che \mathcal{A} e \mathcal{W} abbiano entrambi significato fisico e che soddisfino le equazioni di Maxwell: saranno allora $\mathcal{B} = \nabla \wedge \mathcal{A}$ ed $\mathcal{E} = -\nabla \mathcal{W} - \partial_t \mathcal{A}$ (avendo posto $c = 1$ per semplicità di notazione). Dalla (7.53) seguono dunque le regole di commutazione

$$[\mathcal{H}, \mathbf{p}_i] = -i\mathcal{O}(\partial_{x_i} \mathcal{W}(\mathbf{x}, t)), \quad [\mathcal{H}, \mathcal{L}_i] = i\varepsilon_{ijk} \left[\mathbf{q}_j \mathcal{O}(\partial_{x_k} \mathcal{W}(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{m} \mathcal{A}_j \mathbf{p}_k \right], \quad (7.54)$$

avendo richiamato la notazione introdotta nel §4.2 per le regole di quantizzazione (4.13). Come esempio, assumiamo \mathcal{B} uniforme e costante lungo l'asse \hat{x}_i : la presenza di \mathcal{B} individua in \mathcal{S} la direzione privilegiata \hat{x}_i , rispetto alla quale \mathcal{S} è *assi-simmetrico*, i.e. $[\mathcal{H}, \mathcal{L}_i] = \mathbf{0}$. Confrontando quest'ultima con la (7.54), troviamo che \mathcal{H} ed \mathcal{L}_i commutano sse $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{q}_j^2 - \mathbf{q}_k^2, t)$ ed $\mathcal{A}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$, la quale è evidentemente incompatibile con la presenza di un campo magnetico uniforme e costante. Tale inconveniente è riconducibile al fatto che $\text{SG}(3, 1)$ non è un buon gruppo di simmetria/invarianza per sistemi in presenza di interazioni elettromagnetiche; in tal caso, infatti, è necessario includere nella famiglia di trasformazioni di \mathcal{S} anche l'invarianza sotto *trasformazioni di gauge*, alle quali è dedicata la prossima sezione.

Prima di congedarci dall'argomento, deriviamo esplicitamente la forma dell'equazione del moto di Liouville–von Neumann (6.10) in rappresentazione di Schrödinger per l'hamiltoniano (7.51), trascurando (per semplicità) gli effetti dovuti allo spin. Consideriamo il caso di stati puri, i.e. tali che l'operatore densità ρ si scriva nella forma $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, e calcoliamo il valore di aspettazione della (6.10) rispetto all'autostato generalizzato $|\mathbf{x}, t\rangle$ dell'operatore posizione \mathbf{q} (i.e. $\mathbf{q}|\mathbf{x}, t\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}, t\rangle$): avremo

$$i\partial_t |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = i\langle \mathbf{x}, t | \dot{\rho} | \mathbf{x}, t \rangle = \langle \mathbf{x}, t | [\mathcal{H}, \rho] | \mathbf{x}, t \rangle = \psi^*(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}, t | \mathcal{H} | \psi \rangle - \text{c.c.},$$

essendo $\langle \mathbf{x}, t | \psi \rangle = \psi(\mathbf{x}, t)$. Esplicitiamo il valore di aspettazione $\langle \mathbf{x}, t | \mathcal{H} | \psi \rangle$:

$$\langle \mathbf{x}, t | \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{W}) | \psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle \mathbf{x}, t | (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}) | \psi \rangle + \langle \mathbf{x}, t | \mathcal{W} | \psi \rangle. \quad (7.55)$$

Essendo $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{q}, t)$ ed $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{q}, t)$, è evidente che $\langle \mathbf{x}, t | f(\mathbf{q}, t) | \psi \rangle = f(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t)$; di conseguenza, trattandosi di funzioni reali, gli ultimi due termini nella (7.55) si annullano una volta sommati ai corrispondenti complessi coniugati, ovvero $\psi^*(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}, t | \mathcal{W}(\mathbf{q}, t) | \psi \rangle - \text{c.c.} = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \mathcal{W}(\mathbf{x}, t) - \text{c.c.} = 0$ ed analogamente per $\psi^*(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}, t | \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} | \psi \rangle$. La (7.55) si riduce pertanto all'espressione

$$\langle \mathbf{x}, t | \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) | \psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle \mathbf{x}, t | (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \mathbf{p}) | \psi \rangle.$$

Si noti ora che la differenza tra gli operatori $\mathcal{A} \cdot \mathbf{p}$ ed $\mathbf{p} \cdot \mathcal{A}$ si scrive nella forma

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathcal{A} = i \text{div} \mathcal{A}, \quad (7.56)$$

ottenuta passando in rappresentazione di posizione, dove $\text{div} \mathcal{A}$ è intesa in senso operatoriale. Sostituendo la precedente nell'equazione di evoluzione e passando in rappresentazione, otteniamo in definitiva

$$\begin{aligned} i\partial_t |\psi|^2 &= \frac{1}{2m} \left[2i |\psi|^2 \nabla \cdot \mathcal{A} + 2i \mathcal{A} \cdot (\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) + \psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left(2i \nabla \cdot (\mathcal{A} |\psi|^2) + \psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi \right) = \frac{1}{2m} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi + 2i \mathcal{A} |\psi|^2). \end{aligned}$$

⁴¹Lo scalare \mathcal{W} , infatti, potrebbe anche essere interpretato come il potenziale gravitazionale newtoniano.

Riordinando i termini tra parentesi, otteniamo in definitiva l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathfrak{J}(\mathbf{x}, t) + \partial_t |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = 0, \quad \mathfrak{J}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{m} \Re \{ \psi^*(\mathbf{x}, t) (\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, t)) \psi(\mathbf{x}, t) \}, \quad (7.57)$$

dove $\mathfrak{J} := \Re \{ \psi^* \mathbf{v} \psi \}$ è la densità di corrente di probabilità corrispondente all'operatore velocità.

7.6 Trasformazioni di gauge. Le trasformazioni di gauge rappresentano un gruppo di trasformazioni essenziale per descrivere la dinamica di una particella carica in presenza di interazione elettromagnetica. Dal punto di vista classico, la gauge-invarianza delle equazioni di Maxwell è dovuta al fatto che i campi $\mathbf{E} = -\nabla \mathcal{W} - \partial_t \mathbf{A}$ e $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ sono invarianti rispetto alle trasformazioni (posto $c = 1$)

$$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}' = \mathcal{A} + \nabla \chi, \quad \phi \mapsto \phi' = \phi - \partial_t \chi, \quad (7.58)$$

dove $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$ è una funzione scalare arbitraria dello spazio-tempo. La coppia $(\mathcal{A}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t))$ non individua dunque delle osservabili fisiche del sistema, data l'arbitrarietà di χ .

Consideriamo ora le trasformazioni di simmetria di \mathcal{S} implementate su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ dall'operatore unitario

$$\mathcal{U}_{\chi} = e^{-i\chi(\mathbf{q}, t)}. \quad (7.59)$$

L'azione di \mathcal{U}_{χ} sulle osservabili fondamentali $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ di \mathcal{S} è data dalle espressioni

$$\mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathbf{q} \mathcal{U}_{\chi} = \mathbf{q}, \quad \mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathbf{p} \mathcal{U}_{\chi} = \mathbf{p} - \nabla \chi(\mathbf{q}, t), \quad (7.60)$$

dove l'ultima relazione segue dalla formula di Hadamard (A.5) e dalla regole di quantizzazione (4.13), avendo riscritto $\mathcal{O}(\nabla_{\mathbf{x}} \chi(\mathbf{x}, t)) \equiv \nabla \chi(\mathbf{q}, t)$ per semplicità. La famiglia $\{\mathcal{U}_{\chi}, \chi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{3+1})\}$ individua quindi una rappresentazione unitaria su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ del gruppo delle trasformazioni di gauge di \mathcal{S} .

Vediamo ora come si trasforma l'hamiltoniano (7.51). Cominciamo con la trasformazione dell'operatore velocità $\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}, t))$: dalle relazioni (7.60) segue che \mathbf{v} è *gauge-covariante*, nel senso che

$$\mathbf{v}' = \mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathbf{v} \mathcal{U}_{\chi} = \frac{1}{m} [\mathbf{p} - \mathcal{A}'(\mathbf{q}, t)], \quad (7.61)$$

dove $\mathcal{A}'(\mathbf{q}, t) = \mathcal{A}(\mathbf{q}, t) + \nabla \chi(\mathbf{q}, t)$. Tenendo quindi presente che, in presenza di trasformazioni di simmetria τ dipendenti dal tempo, l'hamiltoniano \mathcal{H} si trasforma secondo l'espressione⁴²

$$\mathcal{H}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathcal{U}_{\tau}^{\dagger}(t) \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \mathcal{U}_{\tau}(t) - i \mathcal{U}_{\tau}^{\dagger}(t) \partial_t \mathcal{U}_{\tau}(t), \quad (7.62)$$

ed essendo la (7.59) una trasformazione siffatta, vale per l'hamiltoniano (7.51) la trasformazione

$$\mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{W}) \mathcal{U}_{\chi} - i \mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \partial_t \mathcal{U}_{\chi} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^3 (\mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathbf{v}_{\ell}(\mathcal{A}) \mathcal{U}_{\chi})^2 + \mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathcal{W} \mathcal{U}_{\chi} - \partial_t \chi = \mathcal{H}(\mathcal{A}', \mathcal{W}') - \partial_t \chi,$$

avendo notato che $\partial_t \mathcal{U}_{\chi} = -i \mathcal{U}_{\chi} \partial_t \chi$. Pertanto, anche $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{W})$ è gauge-covariante, ovvero

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{\chi}^{\dagger} \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{W}) \mathcal{U}_{\chi} = \mathcal{H}(\mathcal{A}', \mathcal{W}'), \\ \mathcal{A}' = \mathcal{A} + \nabla \chi, \\ \mathcal{W}' = \mathcal{W} - \partial_t \chi. \end{cases} \quad (7.63)$$

Pertanto (in assenza di spin) le relazioni (7.63) coincidono con le trasformazioni di gauge (7.58) dei potenziali elettromagnetici classici. Se allora identificassimo rispettivamente \mathcal{A} e \mathcal{W} come gli analoghi quantistici di \mathbf{A} e ϕ , dovremmo concludere necessariamente che né \mathcal{A} , né \mathcal{W} sono osservabili fisiche di \mathcal{S} e quindi che alle coppie $(\mathcal{A}, \mathcal{W})$ ed $(\mathcal{A}', \mathcal{W}')$, legate dalle trasformazioni (7.63), corrisponde la stessa dinamica di \mathcal{S} . In tal caso la famiglia di operatori $\{\mathcal{U}_{\chi}, \chi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{3+1})\}$ implementa su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ non solo

⁴²Si noti che la condizione di invarianza (6.22) segue proprio dalla trasformazione (7.62) richiedendo che $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$.

una trasformazione di simmetria, ma una vera e propria *invarianza* di \mathcal{S} .

Possiamo chiederci se tale condizione di invarianza resti valida nel caso in cui i potenziali quantistici \mathcal{A} e \mathcal{W} non siano necessariamente identificati con i potenziali elettromagnetici, i.e. se esista un analogo quantistico di invarianza sotto trasformazioni di gauge. In verità, in Meccanica Quantistica l'invarianza di gauge delle equazioni del moto emerge in modo pressoché naturale dalla modularità delle teoria rispetto a fattori di fase. Nel §1 si è visto, infatti, che ciascuno stato fisico di \mathcal{S} è in corrispondenza uno ad uno con i *raggi* dello spazio proiettivo \mathcal{PH}_S (vedi §1), mentre è definito in termini del vettore di stato $|\psi\rangle$ di \mathcal{H}_S a meno di un fattore di fase, diciamo $e^{-i\chi(\mathbf{x},t)}$, al quale corrisponde evidentemente la trasformazione di simmetria implementata su \mathcal{H}_S dall'operatore unitario \mathcal{U}_χ . Alla luce di tanto, W. PAULI introdusse nel 1958 il seguente, fondamentale

PRINCIPIO DI INVARIANZA LOCALE DI GAUGE

L'evoluzione dinamica di \mathcal{S} è invariante rispetto alle trasformazioni di simmetria (di gauge) implementate su \mathcal{H}_S dalla famiglia di operatori unitari $\{\mathcal{U}_\chi, \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{3+1})\}$.

Le coppie di potenziali quantistici $(\mathcal{A}', \mathcal{W}')$ ed $(\mathcal{A}, \mathcal{W})$ in (7.63) sono allora fisicamente equivalenti.

OSSERVAZIONE – Il principio di invarianza locale di gauge potrebbe sembrare in conflitto col fatto che la Schrödinger è gauge-covariante e non gauge-invariante. Infatti, interpretando passivamente l'azione di \mathcal{U}_τ sulle osservabili ed attivamente sui vettori di stato, si ha $i\partial_t(\mathcal{U}_\tau^\dagger|\psi'\rangle) = \mathcal{H}(\mathcal{U}_\tau^\dagger(t)|\psi'\rangle)$ e quindi

$$i\partial_t|\psi'\rangle = (\mathcal{U}_\tau \mathcal{H} \mathcal{U}_\tau^\dagger - i\mathcal{U}_\tau \partial_t \mathcal{U}_\tau^\dagger) |\psi'\rangle = \mathcal{H}' |\psi'\rangle,$$

alla luce della (7.62). Ciononostante, è possibile tener conto della gauge-invarianza richiesta dal principio di locale invarianza procedendo analogamente al modo col quale il principio di generale covarianza è realizzato in Relatività Generale; per semplicità, lavoriamo in rappresentazione di posizione, sicché

$$i\partial_t|\psi\rangle = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2|\psi\rangle \quad \xrightarrow{\text{R.S.}} \quad (i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (7.64)$$

L'estensione del gruppo di Galilei (rispetto al quale la (7.64) è invariante) per mezzo del gruppo di trasformazioni di gauge si traduce geometricamente in una ridefinizione degli operatori di derivazione in termini delle cosiddette *derivate covarianti* \mathcal{D}_t ed \mathcal{D}_i , definite come

$$\mathcal{D}_t := \partial_t + i\mathcal{W}, \quad \mathcal{D}_i := \partial_{x_i} + i\mathcal{A}_i, \quad (7.65)$$

dove $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{x}, t)$ si trasformano come in (7.63) *simultaneamente* alla trasformazione $\psi(\mathbf{x}, t) \mapsto \psi'(\mathbf{x}, t) = e^{i\chi(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t)$ per le funzioni d'onda. Indicando allora con $\mathcal{D}^2 \equiv \delta_{ij}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j$ il laplaciano covariante (in notazione di somma su indice ripetuto), troviamo che la nuova equazione

$$\left(i\mathcal{D}_t + \frac{1}{2m}\mathcal{D}^2\right)\psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (7.66)$$

è manifestamente gauge-invariante. La (7.66) altro non è che la forma in rappresentazione di posizione dell'equazione di Schrödinger avente come hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{W}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \mathcal{A})^2 + \mathcal{W}$.

Concludiamo la sezione analizzando il legame tra le condizioni di gauge-invarianza e di Galilei-invarianza. A questo proposito, consideriamo una particella di massa m immersa in un campo magnetico $\mathcal{B} = \nabla \wedge \mathcal{A}$ costante; sia quindi $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ ed $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ lineare in \mathbf{x} , i.e. $\mathcal{A}_i(\mathbf{x}) = a_{ij}x_j$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie per $i, j = 1, 2, 3$. Data l'equivalenza della dinamica sotto trasformazioni di gauge, scegliamo le costanti a_{ij} antisimmetriche, così che $(a_{ij} + a_{ji})x_j = \partial_{x_i}(a_{jk}x_jx_k)$ sia un gauge "puro": avremo allora $a_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathcal{B}_k$ e cioè $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{B} \wedge \mathbf{q}$. Essendo \mathcal{B} costante, la dinamica della particella è invariante rispetto a traslazioni spaziali; tuttavia l'hamiltoniano (7.51) non è invariante rispetto a traslazioni spaziali, visto che $\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathcal{B} \wedge \mathbf{q}$ non commuta con \mathbf{p} . L'assurdo può essere risolto osservando

che alla trasformazione geometrica finita $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathcal{H} \mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ segue una trasformazione di gauge: difatti, invocando la trasformazione $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathbf{q} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} = \mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S}$ per l'operatore posizione e la costanza di \mathcal{B} , troviamo

$$\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathcal{H}(\mathcal{A}(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \mathcal{U}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathcal{B} \wedge (\mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S}) \right]^2 = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \mathcal{B} \wedge \mathbf{a} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_S} \right]^2,$$

dalla quale è evidente che il potenziale vettore \mathcal{A} è soggetto alla trasformazione di gauge

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) \xrightarrow{\chi} \mathcal{A}'(\mathbf{q}) = \mathcal{A}(\mathbf{q}) + \nabla \chi(\mathbf{q}) \quad \text{dove} \quad \chi(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{2} (\mathcal{B} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{q}.$$

In definitiva, l'Hamiltoniano del sistema si trasforma secondo la relazione

$$\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^\dagger \mathcal{H}(\mathcal{A}(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \mathcal{U}_{\mathbf{a}} = \mathcal{H}(\mathcal{A}'(\mathbf{q}), \mathbf{p}) = \mathcal{U}_{\chi}^\dagger \mathcal{H}(\mathcal{A}(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \mathcal{U}_{\chi}, \quad (7.67)$$

per cui, a fronte del principio di invarianza locale di gauge, \mathcal{H} è invariante sotto traslazioni spaziali. Procedendo in modo analogo, si dimostra che a ciascuna trasformazione geometrica $\tau_{\mathcal{G}}$ indotta su \mathcal{H}_S da $\mathcal{G} = (\mathcal{R}, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \tau) \in \text{SG}(3, 1)$ segue una trasformazione di gauge τ_{χ} tale per cui

$$\mathcal{U}^\dagger(\mathcal{G}) \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mathcal{U}(\mathcal{G}) = \mathcal{U}_{\chi}^\dagger \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mathcal{U}_{\chi}, \quad (7.68)$$

dove χ è una funzione di \mathbf{q} dipendente dai parametri gruppali $(\mathcal{R}, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \tau)$.

A FORMULA BCH, DI ZASSENHAUS E LEMMA DI HADAMARD

Il risultato ottenuto in (5.13) ricorda che l'algebra sulla quale insiste la Meccanica Quantistica è non-commutativa. In tal caso, è evidente che la ben nota proprietà dell'esponenziale $e^{x+y} = e^x e^y$ non è più (in generale) garantita e viene sostituita da una formula che ha serie implicazioni in teoria dei gruppi di Lie, nota come **formula di Backer–Campbell–Hausdorff**

$$e^A e^B = e^{A+B+\eta(A,B)}, \quad \eta(A,B) = \sum_{n=2}^{\infty} \eta_n(A,B),$$

$$(n+1)\eta_{n+1}(A,B) = \frac{1}{2} [A-B, \eta_n(A,B)] + \sum_{1 \leq p \leq \frac{n}{2}} \frac{B_{2p}}{(2p)!} \sum_{m_1+\dots+m_{2p}=n} [\eta_{m_1}, [\eta_{m_2}, \dots, [\eta_{m_{2p}}, \eta_1] \dots]],$$

$$\eta_1(A,B) \equiv A+B.$$

Nella pratica, tuttavia, è sufficiente limitarsi ai primi termini che sono dati esplicitamente da

$$e^A e^B \simeq e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]-\frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]]+\dots}, \quad (\text{A.1})$$

in particolare, se A e B sono canonici, i.e. $[A,B] = c\mathbf{1}$ con c un c -numero, la (A.1) diventa

$$e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha A + \beta B + \frac{1}{2}\alpha\beta c\mathbf{1}}. \quad (\text{A.2})$$

L'espressione duale della Backer–Campbell–Hausdorff è data dalla **formula di Zassenhaus**

$$e^{s(A+B)} = e^{sA} e^{sB} e^{-\frac{1}{2}s^2[A,B]} e^{\frac{1}{6}s^3(2[B,[A,B]]+[A,[A,B]])} e^{-\frac{1}{24}s^4([X,[X,[X,Y]]+3[Y,[X,[X,Y]]]+3[Y,[Y,[X,Y]])} \dots; \quad (\text{A.3})$$

anche qui, per operatori canonicamente coniugati, si ottiene l'espressione semplificata

$$e^{s(A+B)} = e^{sA} e^{sB} e^{-\frac{1}{2}s^2 c\mathbf{1}}. \quad (\text{A.4})$$

Infine, un'altra formula non-commutativa di uso frequente è associata al **lemma di Hadamard**

$$e^{sA} B e^{-sA} = B + s[A,B] + \frac{s^2}{2} [A,[A,B]] + \dots = B + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s^n}{n!} \underbrace{[A,[A,\dots,[A,B]\dots B]B]}_{n \text{ volte}}, \quad (\text{A.5})$$

per mezzo della quale è possibile riprodurre immediatamente il risultato ottenuto in (5.13); si noti che per la (A.5), se A e B sono operatori canonici ed A è il generatore di una trasformazione di simmetria τ , allora B è τ -invariante.