



Meccanica Statistica di Buco Nero

Ivan Bonamassa

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio de Giorgi"

6 Giugno 2012

$$S_{BH} = \frac{1}{4} \frac{c^3 k}{\hbar G} A_H$$

Principi della Meccanica
dei Buchi neri

GR

Evaporazione
di Hawking

QFT su spazi curvi

Meccanica Statistica di
buco nero

Gravità quantistica



Richiami alla teoria dei buchi neri

- J. MITCHELL (1783, *lettera a H. Cavendish*), P.S. LAPLACE (1796, *Exposition du system du Monde*): “oggetto la cui forza di gravità è tale da non permettere che la luce emessa raggiunga un osservatore esterno”.

Idea: $v_{fuga}^{(N)} \geq c$, la quale è soddisfatta sse

$$R_{\star} \leq \frac{2GM_{\star}}{c^2} \equiv r_s, \quad (\text{raggio di Schwarzschild}).$$

Richiami alla teoria dei buchi neri

- J. MITCHELL (1783, *lettera a H. Cavendish*), P.S. LAPLACE (1796, *Exposition du system du Monde*): “oggetto la cui forza di gravità è tale da non permettere che la luce emessa raggiunga un osservatore esterno”.

Idea: $v_{fuga}^{(N)} \geq c$, la quale è soddisfatta sse

$$R_{\star} \leq \frac{2GM_{\star}}{c^2} \equiv r_s, \quad (\text{raggio di Schwarzschild}).$$

- Equazioni di campo di Einstein (1916, A. EINSTEIN):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (R = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu});$$

Richiami alla teoria dei buchi neri

- J. MITCHELL (1783, *lettera a H. Cavendish*), P.S. LAPLACE (1796, *Exposition du system du Monde*): “oggetto la cui forza di gravità è tale da non permettere che la luce emessa raggiunga un osservatore esterno”.

Idea: $v_{fuga}^{(N)} \geq c$, la quale è soddisfatta sse

$$R_{\star} \leq \frac{2GM_{\star}}{c^2} \equiv r_s, \quad (\text{raggio di Schwarzschild}).$$

- Equazioni di campo di Einstein (1916, A. EINSTEIN):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (R = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu});$$

“Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve”.

J. A. WHEELER, *A Journey into gravity and space* (1990).

Richiami alla teoria dei buchi neri

- J. MITCHELL (1783, *lettera a H. Cavendish*), P.S. LAPLACE (1796, *Exposition du system du Monde*): “oggetto la cui forza di gravità è tale da non permettere che la luce emessa raggiunga un osservatore esterno”.

Idea: $v_{fuga}^{(N)} \geq c$, la quale è soddisfatta sse

$$R_{\star} \leq \frac{2GM_{\star}}{c^2} \equiv r_s, \quad (\text{raggio di Schwarzschild}).$$

- Equazioni di campo di Einstein (1916, A. EINSTEIN):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (R = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu});$$

“Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve”.

J. A. WHEELER, *A Journey into gravity and space* (1990).

OSSERVAZIONE I: *spaziotempo* \equiv *campo grav.* (background indep.);

OSSERVAZIONE II: *generale covarianza* (diff.-invariante).

Soluzione di Schwarzschild (1916)

Spazio tempo (\mathcal{M}, g^{Sch}) corrisp. al campo gravitazionale di un oggetto di massa M a *simmetria sferica, statico* ($(t \mapsto -t)$ -invariante), immerso nel *vuoto* ($T_{\mu\nu} = 0$). Elemento di linea (segnatura $(-+++)$):

$$ds_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$f(r) \equiv 1 - \frac{rs}{r}, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi.$$

Soluzione di Schwarzschild (1916)

Spazio tempo (\mathcal{M}, g^{Sch}) corrisp. al campo gravitazionale di un oggetto di massa M a *simmetria sferica, statico* ($(t \mapsto -t)$ -invariante), immerso nel *vuoto* ($T_{\mu\nu} = 0$). Elemento di linea (segnatura $(-+++)$):

$$ds_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$f(r) \equiv 1 - \frac{rs}{r}, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi.$$

- Soluzione è *unica*: $(SO(3) + T_{\mu\nu} = 0) \Rightarrow (t \leftrightarrow -t)$ (G. D. BIRKHOFF, 1923).

Soluzione di Schwarzschild (1916)

Spazio tempo (\mathcal{M}, g^{Sch}) corrisp. al campo gravitazionale di un oggetto di massa M a *simmetria sferica, statico* ($(t \mapsto -t)$ -invariante), immerso nel *vuoto* ($T_{\mu\nu} = 0$). Elemento di linea (segnatura $(-+++)$):

$$ds_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$f(r) \equiv 1 - \frac{r_S}{r}, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi.$$

- Soluzione è *unica*: $(SO(3) + T_{\mu\nu} = 0) \Rightarrow (t \leftrightarrow -t)$ (G. D. BIRKHOFF, 1923).
- **Asintoticamente piatto**: $(\mathcal{M}, g^{Sch}) \rightarrow (\mathbb{R}^{3,1}, \eta)$ per $r \rightarrow \infty$.

Soluzione di Schwarzschild (1916)

Spazio tempo (\mathcal{M}, g^{Sch}) corrisp. al campo gravitazionale di un oggetto di massa M a *simmetria sferica, statico* ($(t \mapsto -t)$ -invariante), immerso nel *vuoto* ($T_{\mu\nu} = 0$). Elemento di linea (segnatura $(-+++)$):

$$d s_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$f(r) \equiv 1 - \frac{r_S}{r}, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi.$$

- Soluzione è *unica*: $(SO(3) + T_{\mu\nu} = 0) \Rightarrow (t \leftrightarrow -t)$ (G. D. BIRKHOFF, 1923).
- **Asintoticamente piatto**: $(\mathcal{M}, g^{Sch}) \rightarrow (\mathbb{R}^{3,1}, \eta)$ per $r \rightarrow \infty$.
- Metrica singolare in $r = 0, r_S$: $r = 0$ è "*fisica*" ($R_{\mu\nu}(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$), $r = r_S$ è *eliminabile* ($R_{\mu\nu}(r_S) < \infty$), dovuta alla scelta delle coordinate. 2-Sfera $r = r_S$ (2-sfera di Schwarzschild) è a **red-shift infinito**:

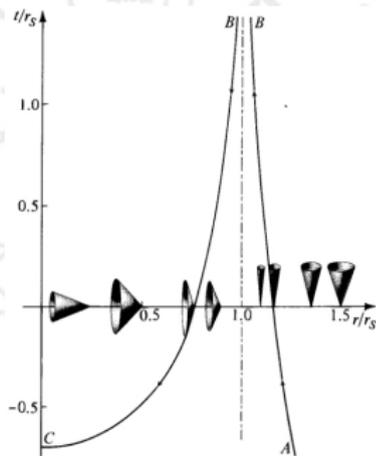
$$\frac{[d s_{Sch}]^\infty}{[d s_{Sch}]^{rest}} = \frac{\sqrt{-g_{00}^{Sch}(r \rightarrow \infty)}}{\sqrt{-g_{00}^{Sch}(r = r_S)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}} \xrightarrow{r \rightarrow r_S} +\infty.$$

(J. R. OPPENHEIMER, M. KRUSKAL, R. PENROSE, A. EDDINGTON, ...)

Orizzonte degli eventi e buco nero

- Struttura causale dello spaziotempo (\mathcal{M}, g^{Sch}) : per una curva luce radiale sono θ, ϕ costanti, $ds_{Sch}^2 = 0$; pendenza dei coni luce:

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \begin{cases} r > r_s & \text{c.l. } \parallel \text{ asse } t, \\ r = r_s & \text{c.l. appiatt.}, \\ r < r_s & \text{c.l. } \parallel \text{ asse } r. \end{cases}$$



Orizzonte degli eventi e buco nero

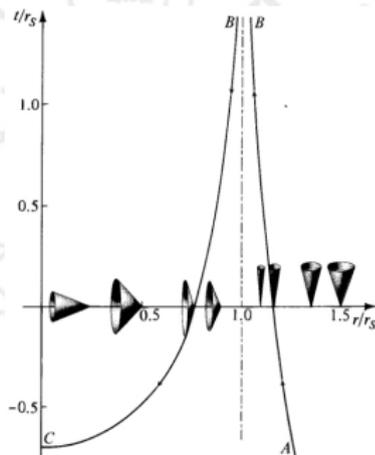
- Struttura causale dello spaziotempo (\mathcal{M}, g^{Sch}) : per una curva luce radiale sono θ, ϕ costanti, $ds_{Sch}^2 = 0$; pendenza dei coni luce:

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \begin{cases} r > r_S & \text{c.l. } \parallel \text{ asse } t, \\ r = r_S & \text{c.l. appiatt.}, \\ r < r_S & \text{c.l. } \parallel \text{ asse } r. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE I: (\mathcal{M}, g^{Sch}) def. per $r > r_S$.

OSSERVAZIONE II: regioni

con $r < r_S$ ed $r > r_S$ sono *causalmente sconnesse* (in $r < r_S$ c.l. sono intrappolati) e la 2-sfera ad $r = r_S$ agisce da “membrana unidirezionale”.



Estensioni

\mathcal{H} è regolare \Rightarrow *crd.* di Eddington–Finkelstein $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (u, v, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} v, u = t \pm r^*, \\ r^* \equiv r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|, \end{cases} \implies ds_{EF}^2 = -f(r(u, v)) du dv + r^2 d\Omega^2.$$

Estensioni

\mathcal{H} è **regolare** \Rightarrow *crd.* di Eddington–Finkelstein $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (u, v, \theta, \phi)$

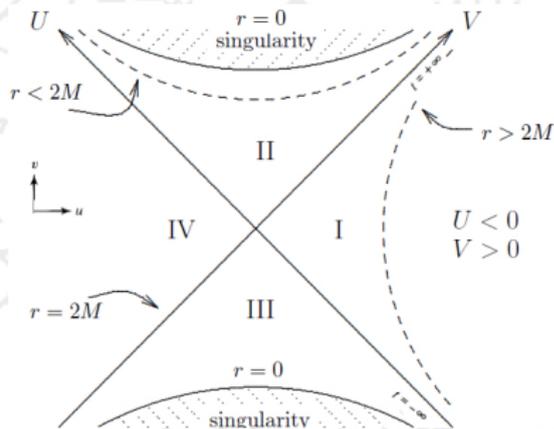
$$\begin{cases} v, u = t \pm r^*, \\ r^* \equiv r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|, \end{cases} \implies ds_{EF}^2 = -f(r(u, v)) du dv + r^2 d\Omega^2.$$

Passando in *crd.* di Kruskal–Szekeres, def. per $r > r_S$ come

$$U = -e^{-\frac{u}{2r_S}}, \quad V = e^{\frac{v}{2r_S}},$$

$$ds_{KS}^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} dU dV + r^2 d\Omega^2,$$

$$r = r(U, V) \text{ implic. } UV = e^{-r^*/r_S}.$$



Estensioni

\mathcal{H} è regolare \Rightarrow crd. di Eddington–Finkelstein $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (u, v, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} v, u = t \pm r^*, \\ r^* \equiv r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|, \end{cases} \implies ds_{EF}^2 = -f(r(u, v)) du dv + r^2 d\Omega^2.$$

Passando in crd. di Kruskal–Szekeres, def. per $r > r_S$ come

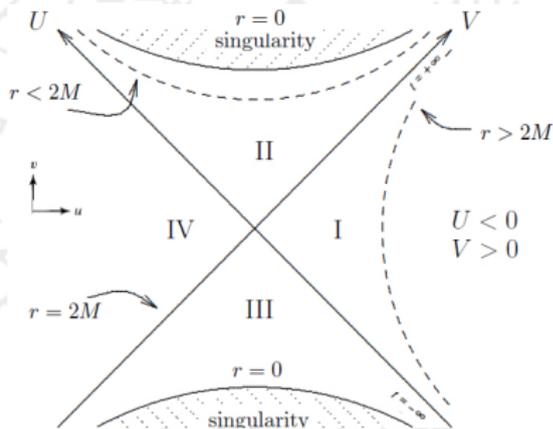
$$U = -e^{-\frac{u}{2r_S}}, \quad V = e^{\frac{v}{2r_S}},$$

$$ds_{KS}^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} dU dV + r^2 d\Omega^2,$$

$r = r(U, V)$ implic. $UV = e^{-r^*/r_S}$.

• $r > r_S$

$\Rightarrow r^*, v, u \in \mathbb{R}$ e ds_{KS}^2 def. $U \in \mathbb{R}^-$,
 $V \in \mathbb{R}^+$; *prol. analitico* ad $U \in \mathbb{R}_0^+$,
 $V \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow$ est. spaziotempo ad $r > 0$.



Estensioni

\mathcal{H} è regolare \Rightarrow crd. di Eddington–Finkelstein $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (u, v, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} v, u = t \pm r^*, \\ r^* \equiv r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|, \end{cases} \implies ds_{EF}^2 = -f(r(u, v)) du dv + r^2 d\Omega^2.$$

Passando in crd. di Kruskal–Szekeres, def. per $r > r_S$ come

$$U = -e^{-\frac{u}{2r_S}}, \quad V = e^{\frac{v}{2r_S}},$$

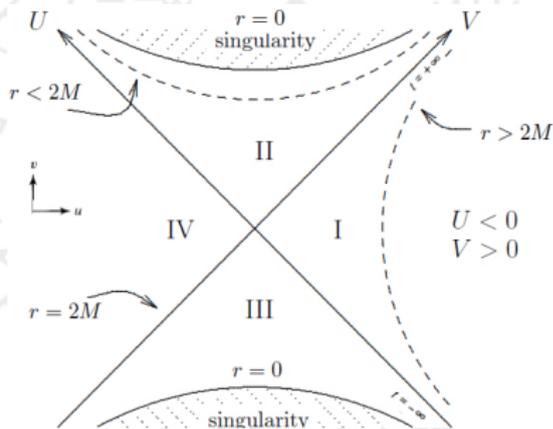
$$ds_{KS}^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} dU dV + r^2 d\Omega^2,$$

$r = r(U, V)$ implic. $UV = e^{-r^*/r_S}$.

• $r > r_S$

$\Rightarrow r^*, v, u \in \mathbb{R}$ e ds_{KS}^2 def. $U \in \mathbb{R}^-$,
 $V \in \mathbb{R}^+$; *prol. analitico* ad $U \in \mathbb{R}_0^+$,
 $V \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow$ est. spaziotempo ad $r > 0$.

• $r = r_S, 0 \mapsto UV = 0, 1$;



Estensioni

\mathcal{H} è regolare \Rightarrow crd. di Eddington–Finkelstein $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (u, v, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} v, u = t \pm r^*, \\ r^* \equiv r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|, \end{cases} \implies ds_{EF}^2 = -f(r(u, v)) du dv + r^2 d\Omega^2.$$

Passando in crd. di Kruskal–Szekeres, def. per $r > r_S$ come

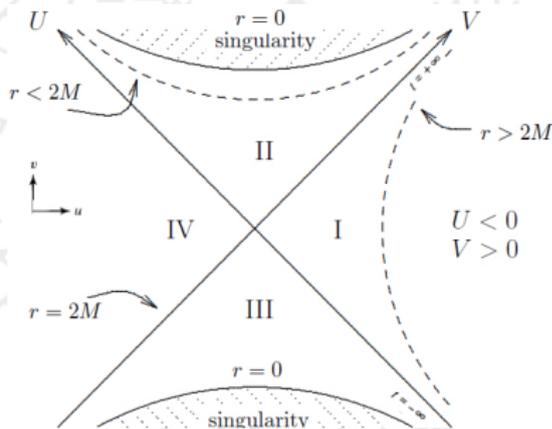
$$U = -e^{-\frac{u}{2r_S}}, \quad V = e^{\frac{v}{2r_S}},$$

$$ds_{KS}^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} dU dV + r^2 d\Omega^2,$$

$r = r(U, V)$ implic. $UV = e^{-r^*/r_S}$.

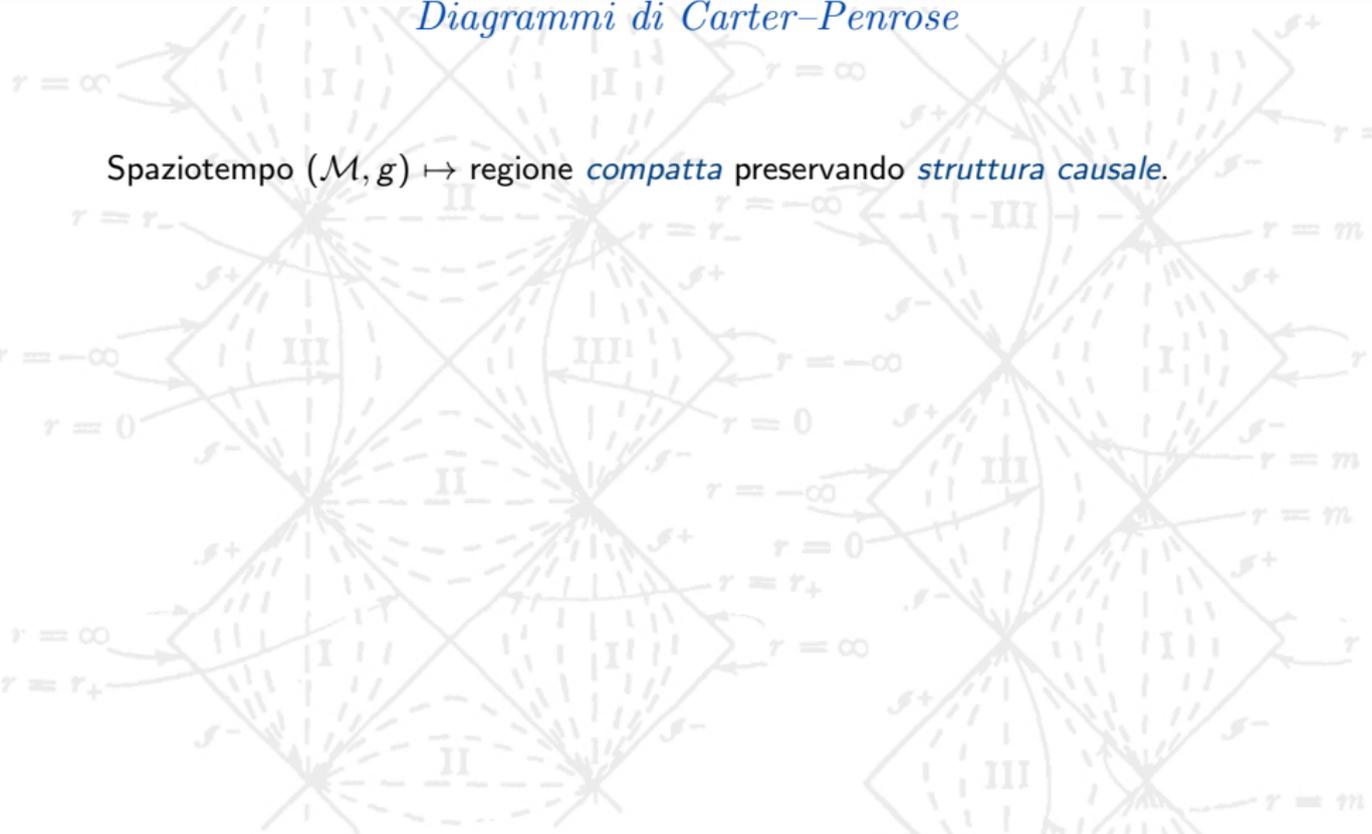
- $r > r_S$
 $\Rightarrow r^*, v, u \in \mathbb{R}$ e ds_{KS}^2 def. $U \in \mathbb{R}^-$,
 $V \in \mathbb{R}^+$; *prol. analitico* ad $U \in \mathbb{R}_0^+$,
 $V \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow$ est. spaziotempo ad $r > 0$.

- $r = r_S, 0 \mapsto UV = 0, 1$;
- ds_{KS}^2 est. *analitica massimale* di ds_{Sch}^2 .



Diagrammi di Carter-Penrose

Spaziotempo $(\mathcal{M}, g) \mapsto$ regione *compatta* preservando *struttura causale*.



Diagrammi di Carter–Penrose

Spaziotempo $(\mathcal{M}, g) \mapsto$ regione *compatta* preservando *struttura causale*.

Compattificazione conforme¹ (B. CARTER (1964), R. PENROSE, (1966)):
 proprietà globali (\mathcal{M}, g) , singularità, condizioni iniziali...

¹FRAUENDIENER J. – *Conformal infinity*, Max Planck Inst. for Grav. Phys. (2003).

Diagrammi di Carter–Penrose

Spaziotempo $(\mathcal{M}, g) \mapsto$ regione *compatta* preservando *struttura causale*.

Compattificazione conforme¹ (B. CARTER (1964), R. PENROSE, (1966)):
 proprietà globali (\mathcal{M}, g) , singularità, condizioni iniziali...

Le metriche ds^2 (fisica) e $d\tilde{s}^2$ (“non fisica”) si dicono *conformi* sse

$$ds^2 \mapsto d\tilde{s}^2 = \Lambda^2(\mathbf{r}, t) ds^2, \quad \Lambda(\mathbf{r}, t) \neq 0, \text{ differenziabile,}$$

¹FRAUENDIENER J. – *Conformal infinity*, Max Planck Inst. for Grav. Phys. (2003). 

Diagrammi di Carter–Penrose

Spaziotempo $(\mathcal{M}, g) \mapsto$ regione *compatta* preservando *struttura causale*.

Compattificazione conforme¹ (B. CARTER (1964), R. PENROSE, (1966)):
 proprietà globali (\mathcal{M}, g) , singularità, condizioni iniziali...

Le metriche ds^2 (fisica) e $d\tilde{s}^2$ ("non fisica") si dicono *conformi* sse

$$ds^2 \mapsto d\tilde{s}^2 = \Lambda^2(\mathbf{r}, t) ds^2, \quad \Lambda(\mathbf{r}, t) \neq 0, \text{ differenziabile,}$$

scelta *par. conforme* Λ : mappare pti all'infinito di ds^2 in pti finiti di $d\tilde{s}^2$

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow +\infty \quad \text{e/o} \quad |t| \rightarrow +\infty.$$

¹FRAUENDIENER J. – *Conformal infinity*, Max Planck Inst. for Grav. Phys. (2003).

Diagrammi di Carter–Penrose

Spaziotempo $(\mathcal{M}, g) \mapsto$ regione *compatta* preservando *struttura causale*.

Compattificazione conforme¹ (B. CARTER (1964), R. PENROSE, (1966)):
 proprietà globali (\mathcal{M}, g) , singularità, condizioni iniziali...

Le metriche ds^2 (fisica) e $d\tilde{s}^2$ (“non fisica”) si dicono *conformi* sse

$$ds^2 \mapsto d\tilde{s}^2 = \Lambda^2(\mathbf{r}, t) ds^2, \quad \Lambda(\mathbf{r}, t) \neq 0, \text{ differenziabile,}$$

scelta *par. conforme* Λ : mappare pti all’infinito di ds^2 in pti finiti di $d\tilde{s}^2$

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow +\infty \quad \text{e/o} \quad |t| \rightarrow +\infty.$$

Sicché i pti all’infinito sono individuati dagli (\mathbf{r}, t) t.c. $\Lambda(\mathbf{r}, t) = 0$.

¹FRAUENDIENER J. – *Conformal infinity*, Max Planck Inst. for Grav. Phys. (2003). 

Diagramma CP dello spaziotempo di Minkowsky I

- **Coordin. cono-luce:** $u = \frac{1}{2}(t+r)$, $v = \frac{1}{2}(t-r)$,

$$\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \ni (r, t) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad v \leq u:$$

$$ds^2 \mapsto ds'^2 = -4du dv + (u-v)^2 d\Omega^2.$$

OSSERVAZIONE. Ogni punto individua una 2-sfera di raggio $r = u - v$.

- **Compattificazione:** $U = \arctan u$, $V = \arctan v$,

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (U, V) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{\times 2}, \quad V \leq U,$$

$$ds'^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} (-4dU dV + \sin^2(U-V) d\Omega^2).$$

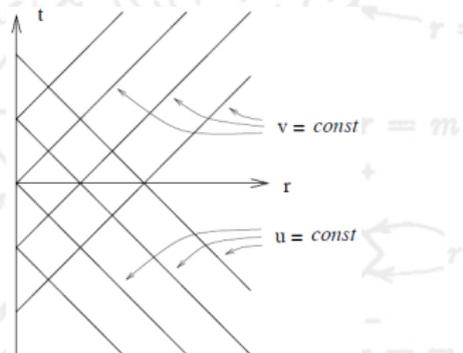


Diagramma CP dello spaziotempo di Minkowsky I

- **Coordin. cono-luce:** $u = \frac{1}{2}(t+r)$, $v = \frac{1}{2}(t-r)$,

$$\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \ni (r, t) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad v \leq u:$$

$$ds^2 \mapsto ds'^2 = -4du dv + (u-v)^2 d\Omega^2.$$

OSSERVAZIONE. Ogni punto individua una 2-sfera di raggio $r = u - v$.

- **Compattificazione:** $U = \arctan u$, $V = \arctan v$,

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (U, V) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{\times 2}, \quad V \leq U,$$

$$ds'^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} (-4dU dV + \sin^2(U-V) d\Omega^2).$$

OSSERVAZIONE I: $ds'^2 \rightarrow \infty$ per $|U|, |V| \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Lambda(U, V) \equiv (\cos U \cos V)$.

P.ti $|U|, |V| = \pi/2$ sono p.ti *finiti* nella nuova metrica

$$d\tilde{s}^2 = \Lambda^2 ds'^2 = -4dU dV + \sin^2(U-V) d\Omega^2.$$

OSS. II: $|U|, |V| = \pi/2$ p.ti accumulazione; $d\tilde{s}^2$ prolungata su tali p.ti.

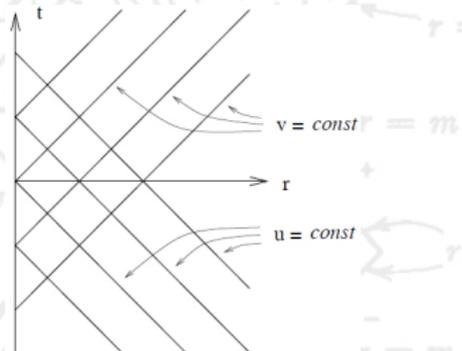


Diagramma CP dello spaziotempo di Minkowsky II

$(\mathbb{R}^{3,1}, \eta)$ immerso conformalmente in nuovo spaziotempo con "metrica" $d\tilde{s}^2$ e contorno $\Lambda = 0$.



²HAWKING S. W., G.F.R. ELLIS – *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Math. Phys. (1973).

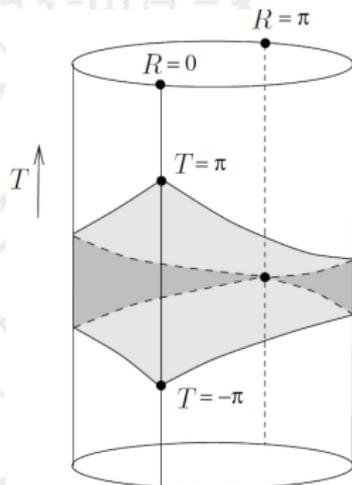
Diagramma CP dello spaziotempo di Minkowsky II

$(\mathbb{R}^{3,1}, \eta)$ immerso conformalmente in nuovo spaziotempo con “metrica” $d\tilde{s}^2$ e contorno $\Lambda = 0$. Topologia del nuovo spaziotempo emerge

- *antitrasf. in cono-luce*: $T = U + V, R = U - V,$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{\times 2} \ni (U, V) \mapsto (R, T) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi],$$

$$d\tilde{s}^2 \mapsto d\bar{s}^2 = \Lambda^2 d\tilde{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2,$$

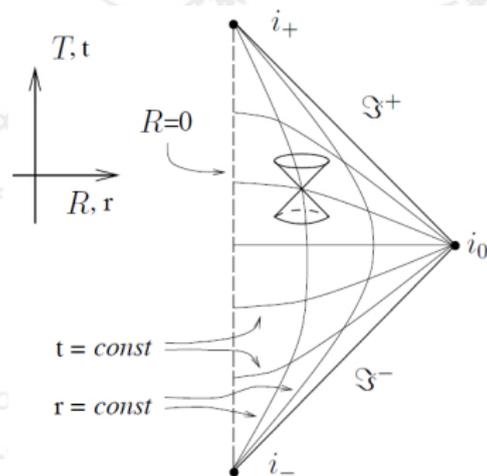


²HAWKING S. W., G.F.R. ELLIS – *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Math. Phys. (1973).

Diagramma CP dello spaziotempo di Minkowsky III

OSSERVAZIONE III: Diagramma CP ottenuto “srotolando” regione ombrata.

Nota: struttura causale è conservata (pendenza con luce ± 1 risp. assi T, R).

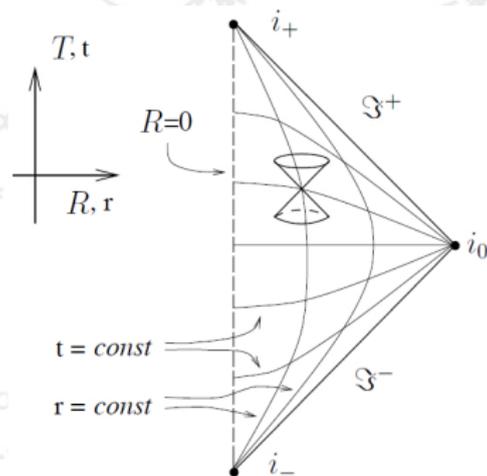


Classificazione degli infiniti conformi.

- ◇ i_+ : inf. di tipo tempo futuro;
- ◇ i_- : inf. di tipo tempo passato;
- ◇ i_0 : inf. di tipo spazio;
- ◇ \mathcal{J}^+ : inf. di tipo luce (o nullo) futuro
($T = \pi - R, 0 \leq R \leq \pi$);
- ◇ \mathcal{J}^- : inf. di tipo luce (o nullo) passato
($T = -\pi + R, 0 \leq R \leq \pi$).

Diagramma CP dello spaziotempo di Minkowsky III

OSSERVAZIONE III: Diagramma CP ottenuto “srotolando” regione ombrata.
 Nota: struttura causale è conservata (pendenza con luce ± 1 risp. assi T, R).



Classificazione degli infiniti conformi.

- ◇ i_+ : inf. di tipo tempo futuro;
- ◇ i_- : inf. di tipo tempo passato;
- ◇ i_0 : inf. di tipo spazio;
- ◇ \mathcal{J}^+ : inf. di tipo luce (o nullo) futuro
 ($T = \pi - R, 0 \leq R \leq \pi$);
- ◇ \mathcal{J}^- : inf. di tipo luce (o nullo) passato
 ($T = -\pi + R, 0 \leq R \leq \pi$).

OSSERVAZIONE: gli infiniti \mathcal{J}^\pm sono ipersuperfici (nulle) con topologia $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$.

Schwarzschild-KS, diagramma CP

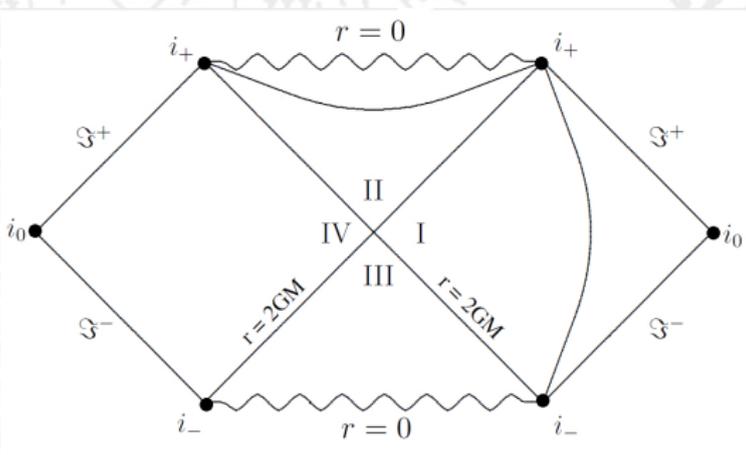
$$ds_{KS}^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad UV = e^{-\frac{r^*}{r_S}},$$

$$\begin{cases} \tilde{U} = \arctan U, \\ \tilde{V} = \arctan V, \end{cases} \quad d\tilde{s}_{KS}^2 = \Lambda^2 ds_{KS}^2 = -4\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d\tilde{U} d\tilde{V} + \left(\frac{r}{r^*}\right)^2 \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U}) d\Omega^2.$$

Schwarzschild-KS, diagramma CP

$$ds_{KS}^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad UV = e^{-\frac{r}{r_S}},$$

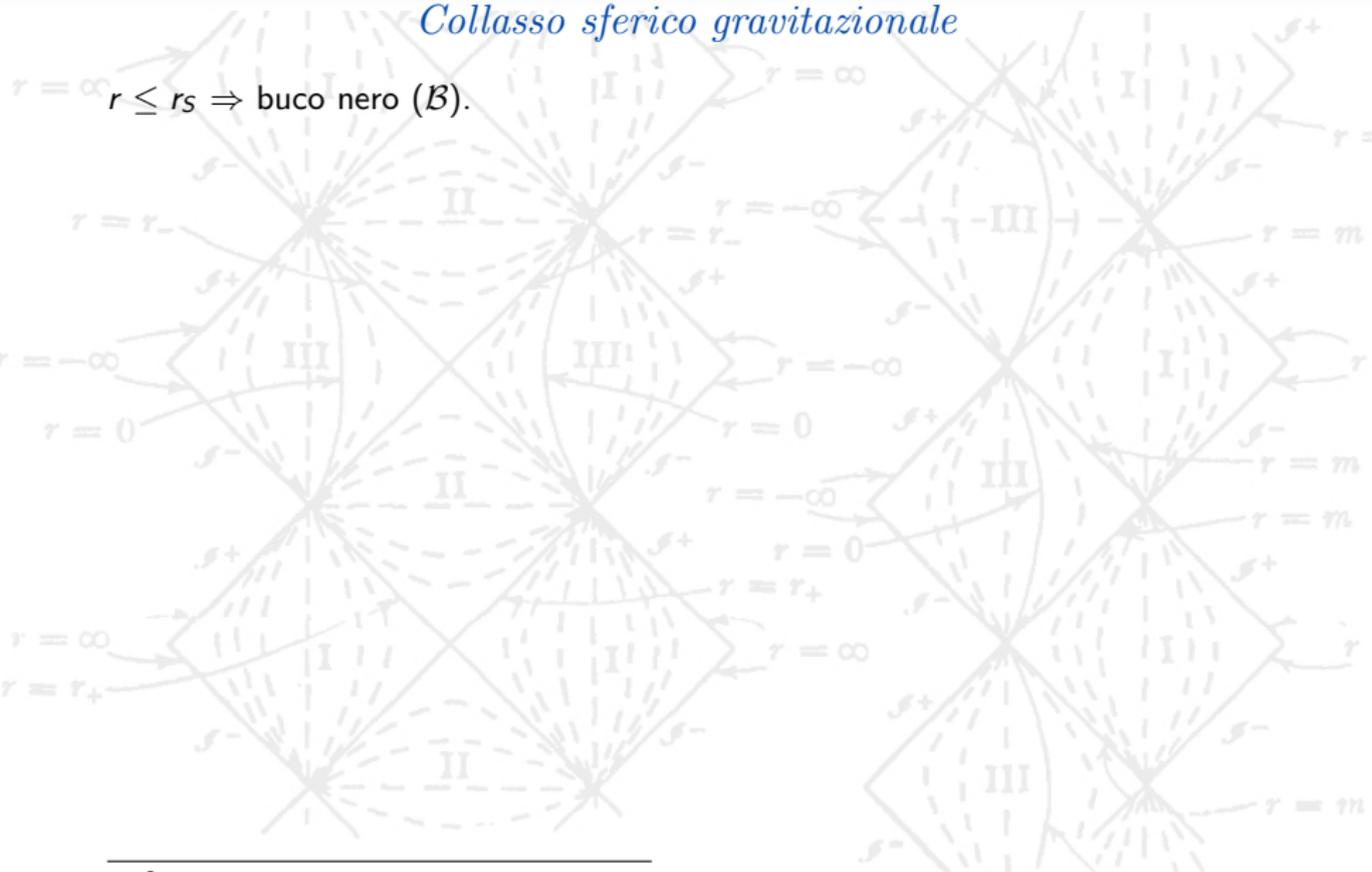
$$\begin{cases} \tilde{U} = \arctan U, \\ \tilde{V} = \arctan V, \end{cases} \quad d\tilde{s}_{KS}^2 = \Lambda^2 ds_{KS}^2 = -4\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d\tilde{U} d\tilde{V} + \left(\frac{r}{r_S}\right)^2 \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U}) d\Omega^2.$$



OSSERVAZIONE: **infiniti conformi** = Minkowsky $((\mathcal{M}, g^{Sch})$ asint. piatto).

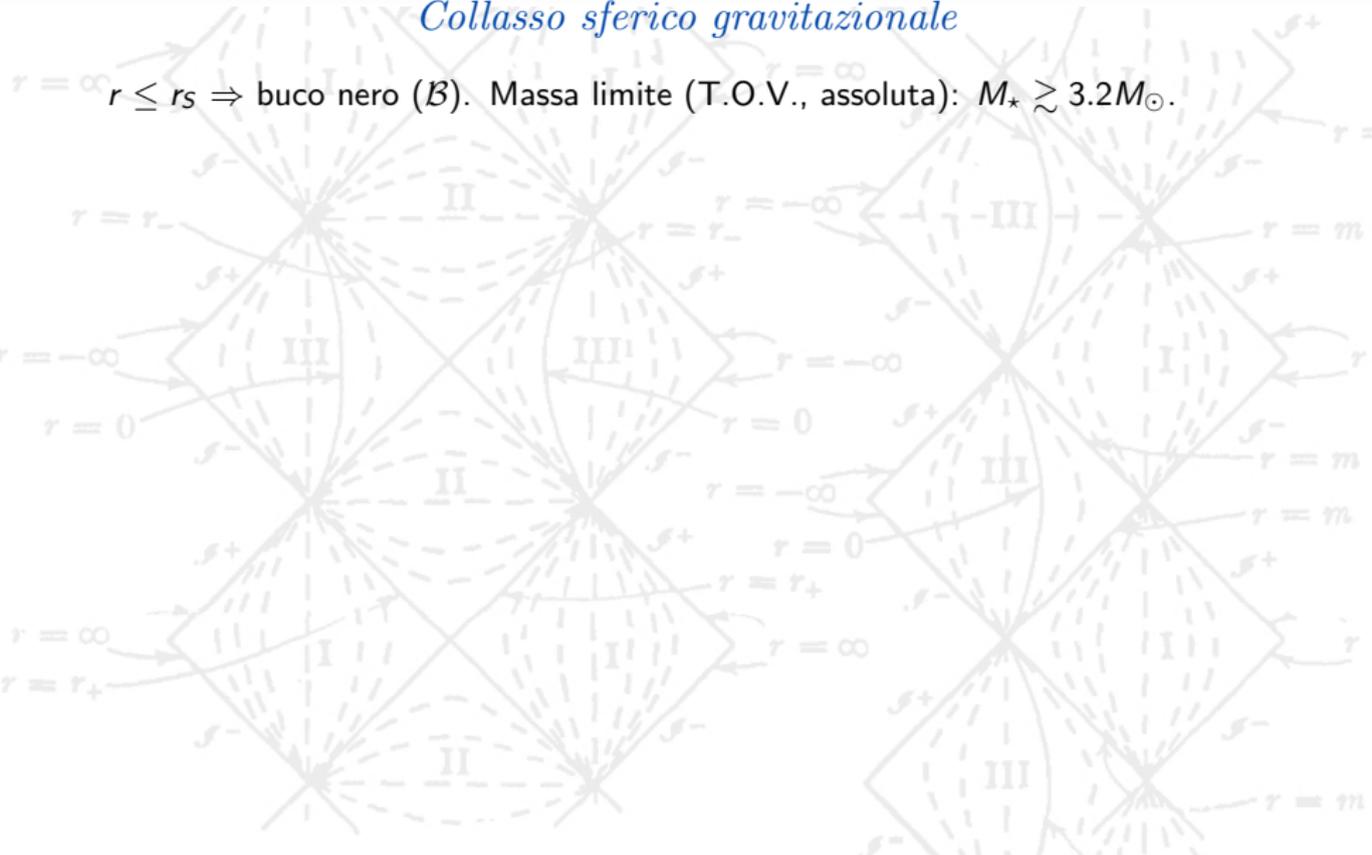
Collasso sferico gravitazionale

$r \leq r_s \Rightarrow$ buco nero (\mathcal{B}).



Collasso sferico gravitazionale

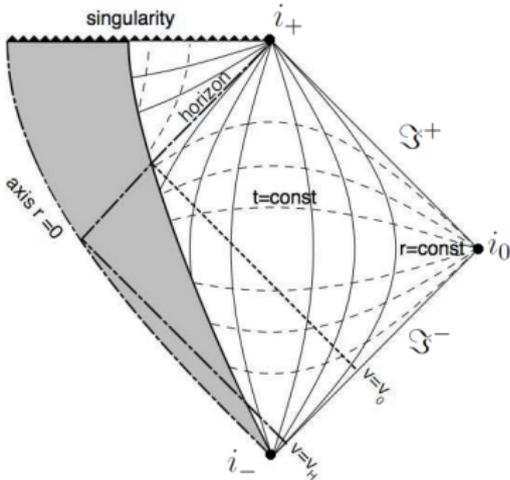
$r \leq r_s \Rightarrow$ buco nero (\mathcal{B}). Massa limite (T.O.V., assoluta): $M_* \gtrsim 3.2M_\odot$.



³P.K. TOWNSEND – *Black holes*, DAMTP, Uni. Cambridge (1997).

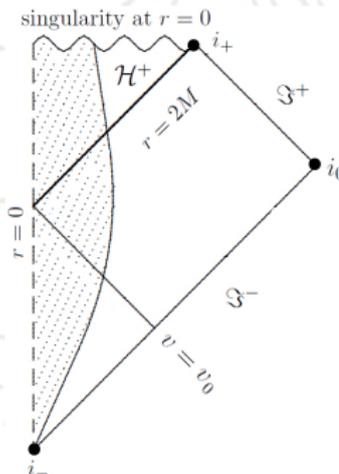
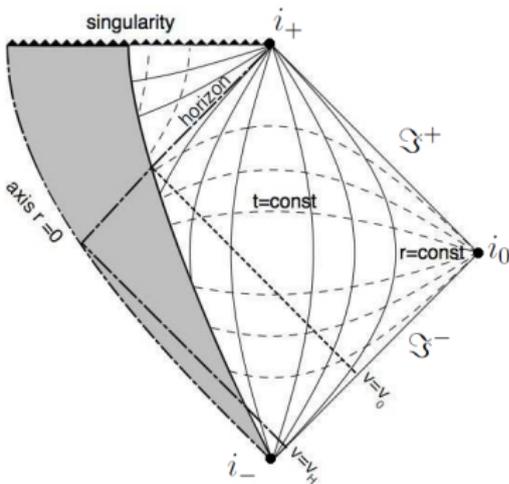
Collasso sferico gravitazionale

$r \leq r_s \Rightarrow$ buco nero (\mathcal{B}). Massa limite (T.O.V., assoluta): $M_* \gtrsim 3.2M_\odot$.
Regioni III, IV interno stella. Par. Λ t.c. centro sim. = retta verticale.



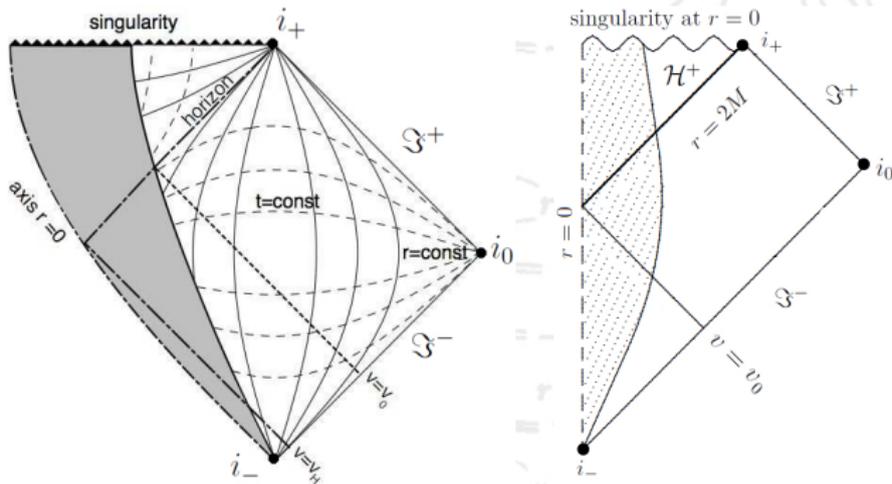
Collasso sferico gravitazionale

$r \leq r_s \Rightarrow$ buco nero (\mathcal{B}). Massa limite (T.O.V., assoluta): $M_\star \gtrsim 3.2M_\odot$.
 Regioni III, IV interno stella. Par. Λ t.c. centro sim. = retta verticale.



Collasso sferico gravitazionale

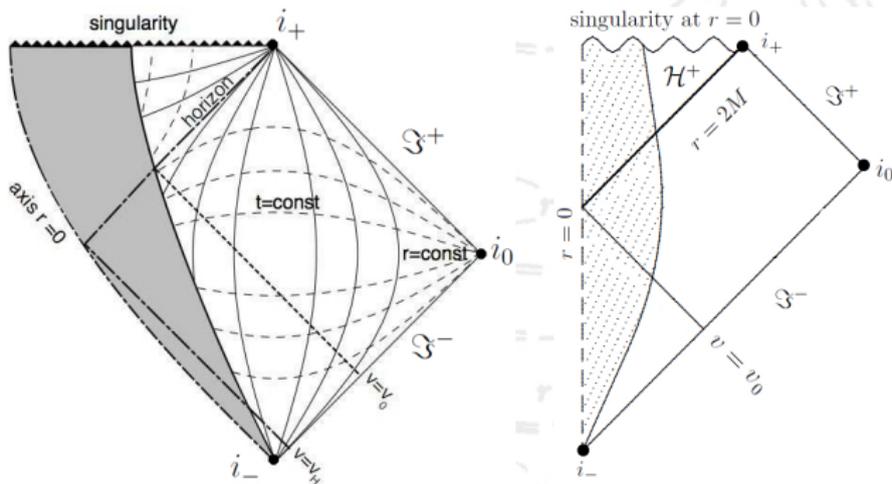
$r \leq r_s \Rightarrow$ buco nero (\mathcal{B}). Massa limite (T.O.V., assoluta): $M_* \gtrsim 3.2M_\odot$.
Regioni III, IV interno stella. Par. Λ t.c. centro sim. = retta verticale.



OSSERVAZIONE: non tutta l'informazione di $\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{I}^+$ ($v = v_0$ "tempo" limite oltre il quale curve nulle incontrano singolarità).

Collasso sferico gravitazionale

$r \leq r_S \Rightarrow$ buco nero (\mathcal{B}). Massa limite (T.O.V., assoluta): $M_* \gtrsim 3.2M_\odot$.
Regioni III, IV interno stella. Par. Λ t.c. centro sim. = retta verticale.

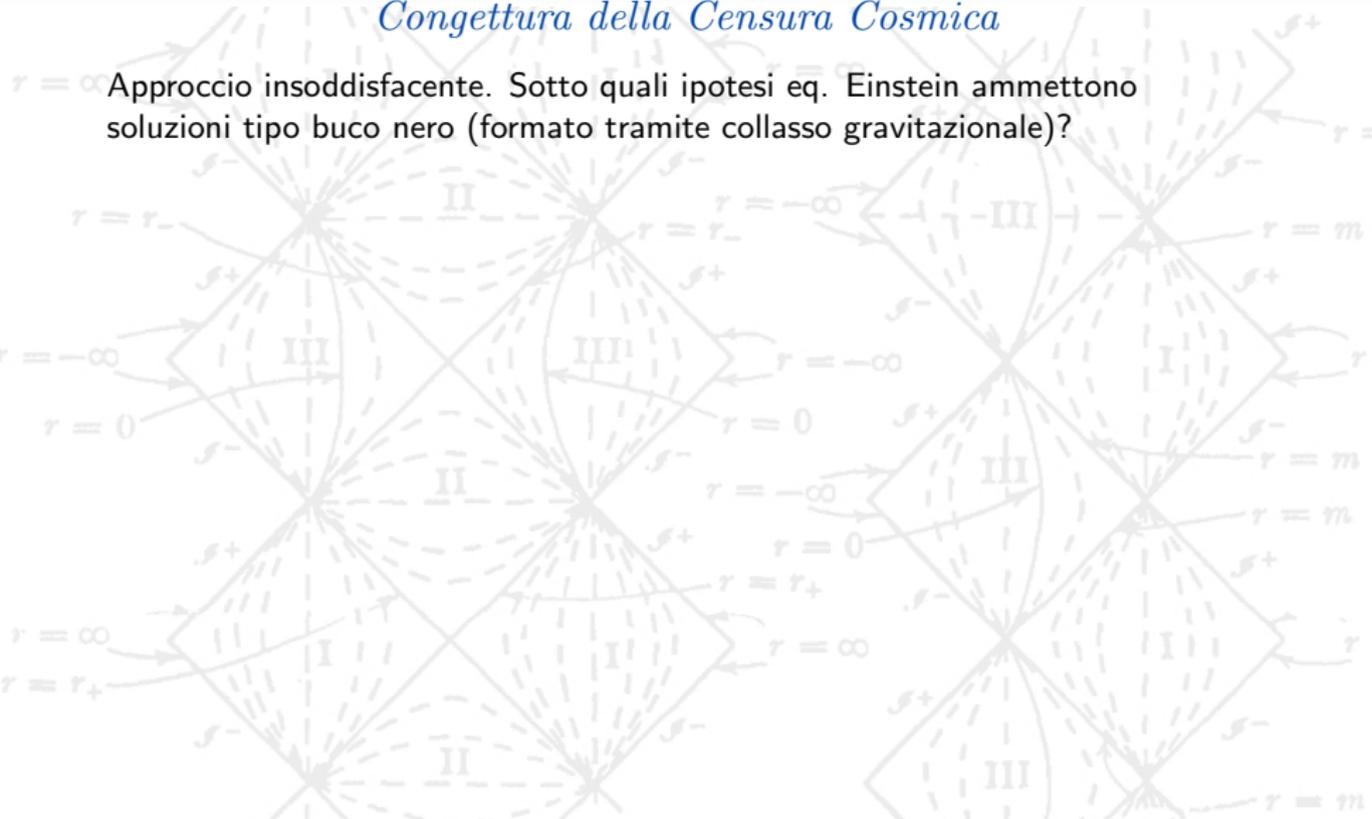


OSSERVAZIONE: non tutta l'informazione di $\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{I}^+$ ($v = v_0$ "tempo" limite oltre il quale curve nulle incontrano singolarità). Rigorosamente: il *passato cronologico*³ dell'infinito futuro nullo ($\mathcal{J}^-(\mathcal{I}^+)$ non ricopre tutta la varietà \mathcal{M}). Pertanto: $\mathcal{B} := \mathcal{M} \setminus \mathcal{J}^-(\mathcal{I}^+)$ ed $\mathcal{H}^+ := \partial\mathcal{B}$.

³P.K. TOWNSEND – *Black holes*, DAMTP, Uni. Cambridge (1997).

Conggettura della Censura Cosmica

Approccio insoddisfacente. Sotto quali ipotesi eq. Einstein ammettono soluzioni tipo buco nero (formato tramite collasso gravitazionale)?



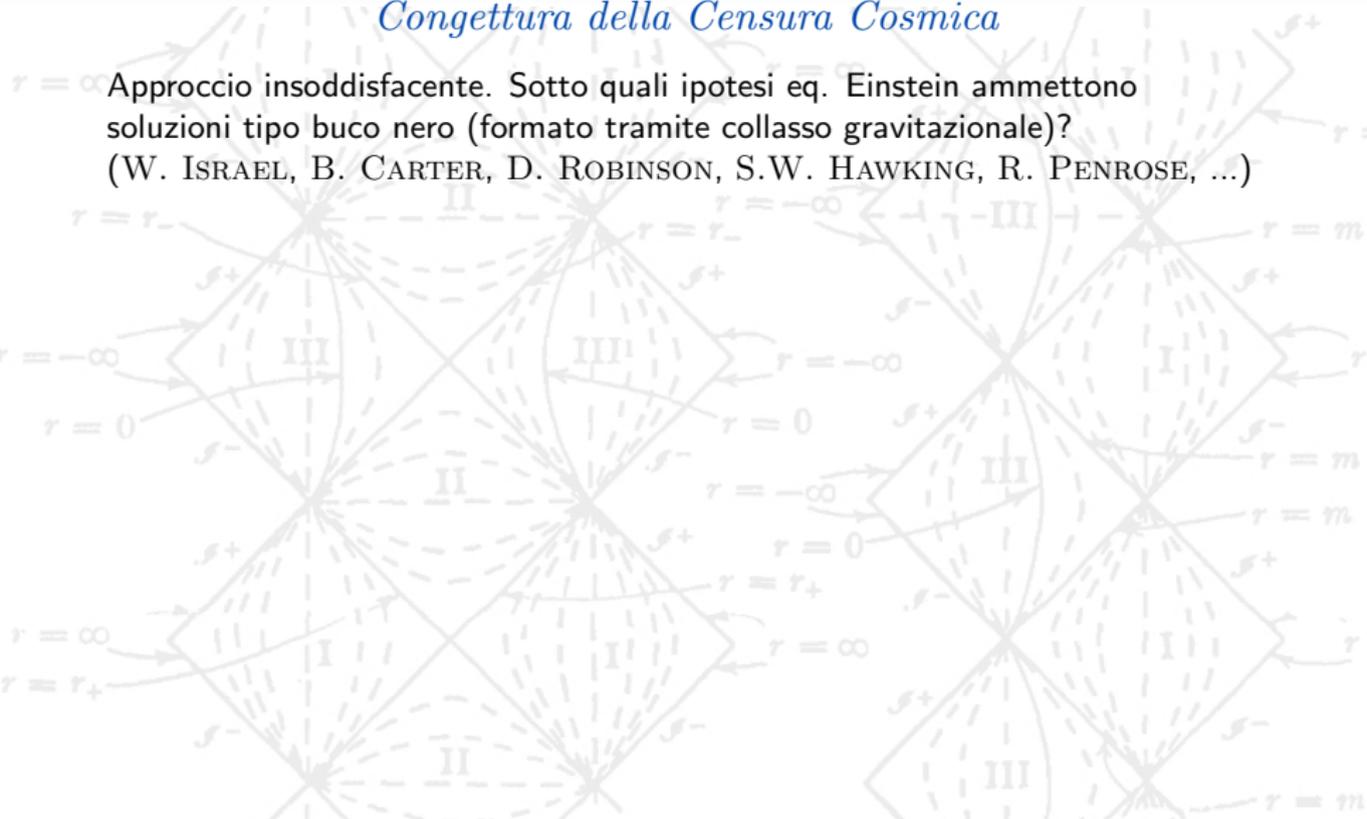
⁴S. W. HAWKING, R. PENROSE – *The nature of space and time*, Princeton Uni. Press (1996).

⁵R. W. WALD – *General Relativity*, Uni. Chicago Press, Ch.XII (1984).

Conggettura della Censura Cosmica

Approccio insoddisfacente. Sotto quali ipotesi eq. Einstein ammettono soluzioni tipo buco nero (formato tramite collasso gravitazionale)?

(W. ISRAEL, B. CARTER, D. ROBINSON, S.W. HAWKING, R. PENROSE, ...)



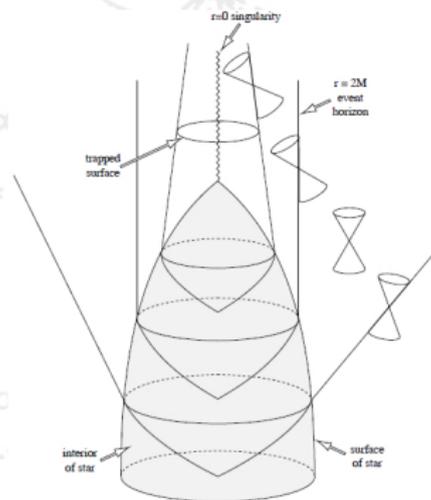
⁴S. W. HAWKING, R. PENROSE – *The nature of space and time*, Princeton Uni. Press (1996).

⁵R. W. WALD – *General Relativity*, Uni. Chicago Press, Ch.XII (1984).

Congiuntura della Censura Cosmica

Approccio insoddisfacente. Sotto quali ipotesi eq. Einstein ammettono soluzioni tipo buco nero (formato tramite collasso gravitazionale)?

(W. ISRAEL, B. CARTER, D. ROBINSON, S.W. HAWKING, R. PENROSE, ...)



- **Presenza di singolarità⁴** (*Singularity theorems*, HAWKING, PENROSE, 1965–1970);
- Spaziotempo **stazionario** (collasso gravitazionale → “stato” d’equilibrio);
- Asint. piatto (infiniti conformi);
- Cond. al contorno (materia, rotazione, ...).

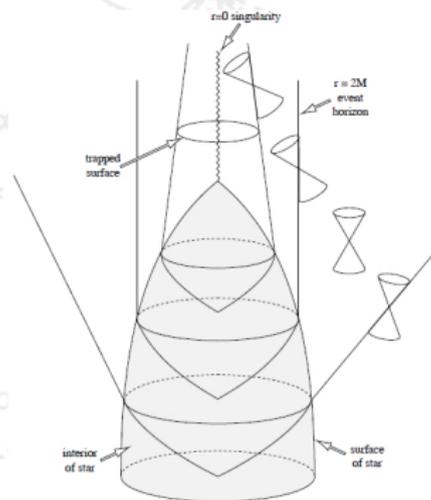
⁴S. W. HAWKING, R. PENROSE – *The nature of space and time*, Princeton Uni. Press (1996).

⁵R. W. WALD – *General Relativity*, Uni. Chicago Press, Ch.XII (1984).

Congiuntura della Censura Cosmica

Approccio insoddisfacente. Sotto quali ipotesi eq. Einstein ammettono soluzioni tipo buco nero (formato tramite collasso gravitazionale)?

(W. ISRAEL, B. CARTER, D. ROBINSON, S.W. HAWKING, R. PENROSE, ...)



- **Presenza di singolarità⁴** (*Singularity theorems*, HAWKING, PENROSE, 1965–1970);
- Spaziotempo **stazionario** (collasso gravitazionale → “stato” d’equilibrio);
- Asint. piatto (infiniti conformi);
- Cond. al contorno (materia, rotazione, ...).
- **Congiuntura della Censura Cosmica⁵ (CCC)**, spaziotempo non singolare su \mathcal{H} e fuori \mathcal{H} (la singolarità, se esiste, dev’essere “vestita”).

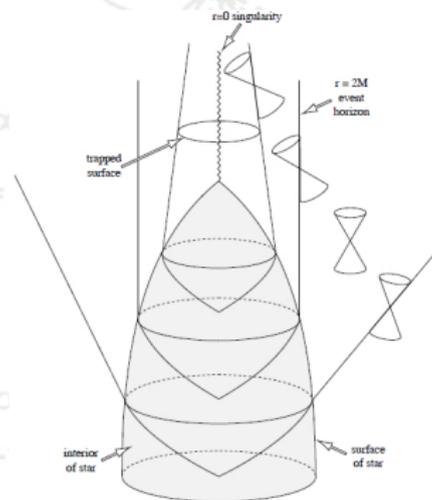
⁴S. W. HAWKING, R. PENROSE – *The nature of space and time*, Princeton Uni. Press (1996).

⁵R. W. WALD – *General Relativity*, Uni. Chicago Press, Ch.XII (1984).

Congiuntura della Censura Cosmica

Approccio insoddisfacente. Sotto quali ipotesi eq. Einstein ammettono soluzioni tipo buco nero (formato tramite collasso gravitazionale)?

(W. ISRAEL, B. CARTER, D. ROBINSON, S.W. HAWKING, R. PENROSE, ...)



- **Presenza di singolarità⁴** (*Singularity theorems*, HAWKING, PENROSE, 1965–1970);
- Spaziotempo **stazionario** (collasso gravitazionale → “stato” d’equilibrio);
- Asint. piatto (infiniti conformi);
- Cond. al contorno (materia, rotazione, ...).
- **Congiuntura della Censura Cosmica⁵ (CCC)**, spaziotempo non singolare su \mathcal{H} e fuori \mathcal{H} (la singolarità, se esiste, dev’essere “vestita”).

Singolarità nuda \Rightarrow **violazione causalità**;

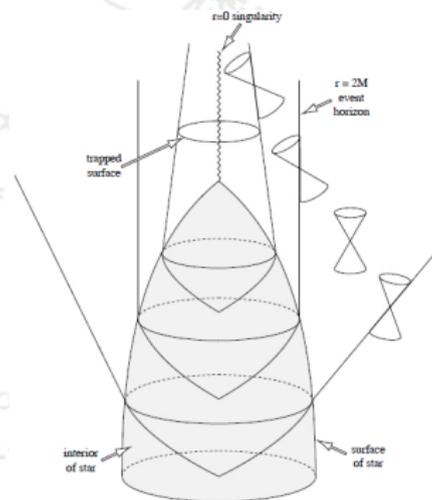
⁴S. W. HAWKING, R. PENROSE – *The nature of space and time*, Princeton Uni. Press (1996).

⁵R. W. WALD – *General Relativity*, Uni. Chicago Press, Ch.XII (1984).

Congiuntura della Censura Cosmica

Approccio insoddisfacente. Sotto quali ipotesi eq. Einstein ammettono soluzioni tipo buco nero (formato tramite collasso gravitazionale)?

(W. ISRAEL, B. CARTER, D. ROBINSON, S.W. HAWKING, R. PENROSE, ...)



- **Presenza di singolarità⁴** (*Singularity theorems*, HAWKING, PENROSE, 1965–1970);
- Spaziotempo **stazionario** (collasso gravitazionale → “stato” d’equilibrio);
- Asint. piatto (infiniti conformi);
- Cond. al contorno (materia, rotazione, ...).
- **Congiuntura della Censura Cosmica⁵ (CCC)**, spaziotempo non singolare su \mathcal{H} e fuori \mathcal{H} (la singolarità, se esiste, dev’essere “vestita”).

Singolarità nuda \Rightarrow **violazione causalità**;

Violazione classica CCC \Rightarrow GR **non deterministica** (CCC, forma forte²).

⁴S. W. HAWKING, R. PENROSE – *The nature of space and time*, Princeton Uni. Press (1996).

⁵R. W. WALD – *General Relativity*, Uni. Chicago Press, Ch.XII (1984).

Teorema di unicità di Israel

Teorema di unicità (W. Israel, 1967–1968)

(\mathcal{M}, g) asint. piatto, statico e vuoto. Se CCC vera \Rightarrow Unica sol. stazionaria di tipo b.n. è Schwarzschild ed è ammette come unico par. carat.⁶ M .

⁶P. W. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2008).

⁷S. M. CARROLL – *Lecture notes on General relativity*, gr-qc/9712019v1 (1997).

Teorema di unicità di Israel

Teorema di unicità (W. Israel, 1967–1968)

(\mathcal{M}, g) asint. piatto, statico e vuoto. Se CCC vera \Rightarrow Unica sol. stazionaria di tipo b.n. è Schwarzschild ed è ammette come unico par. carat.⁶ M .

- Fase di collasso può essere ignorata;



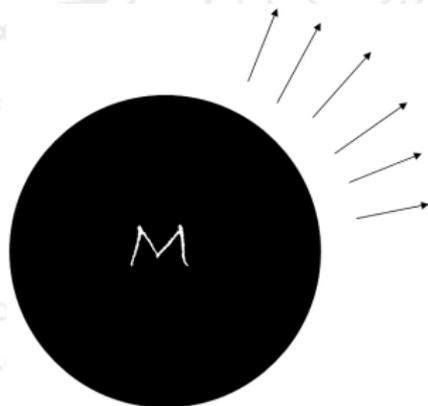
⁶P. W. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2008).

⁷S. M. CARROLL – *Lecture notes on General relativity*, gr-qc/9712019v1 (1997).

Teorema di unicità di Israel

Teorema di unicità (W. Israel, 1967–1968)

(\mathcal{M}, g) asint. piatto, statico e vuoto. Se CCC vera \Rightarrow Unica sol. stazionaria di tipo b.n. è Schwarzschild ed è ammette come unico par. carat.⁶ M .



- Fase di collasso può essere ignorata;
- dopo collasso, buco nero si assesta (“abbastanza rapidamente⁷”) verso stato equilibrio univocamente caratterizzato da M ;

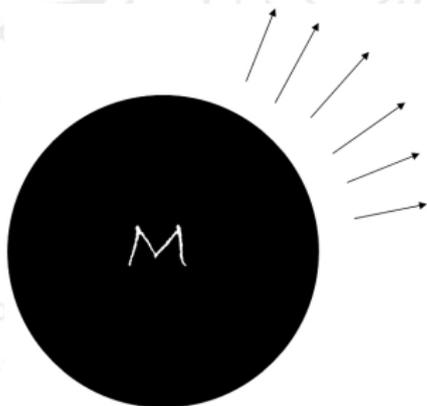
⁶P. W. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2008).

⁷S. M. CARROLL – *Lecture notes on General relativity*, gr-qc/9712019v1 (1997).

Teorema di unicità di Israel

Teorema di unicità (W. Israel, 1967–1968)

(\mathcal{M}, g) asint. piatto, statico e vuoto. Se CCC vera \Rightarrow Unica sol. stazionaria di tipo b.n. è Schwarzschild ed è ammette come unico par. carat.⁶ M .



- Fase di collasso può essere ignorata;
- dopo collasso, buco nero si assesta (“abbastanza rapidamente⁷”) verso stato equilibrio univocamente caratterizzato da M ;
- $M =$ **unico grado di libertà macroscopico** (unica informazione) del sistema;

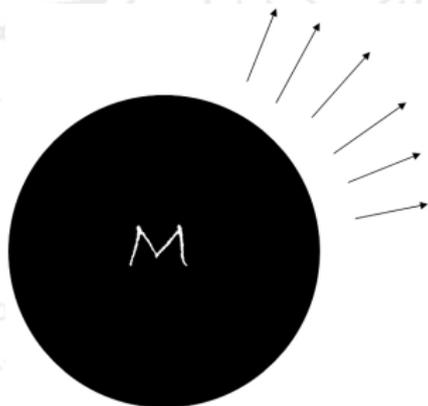
⁶P. W. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2008).

⁷S. M. CARROLL – *Lecture notes on General relativity*, gr-qc/9712019v1 (1997).

Teorema di unicità di Israel

Teorema di unicità (W. Israel, 1967–1968)

(\mathcal{M}, g) asint. piatto, statico e vuoto. Se CCC vera \Rightarrow Unica sol. stazionaria di tipo b.n. è Schwarzschild ed è ammette come unico par. carat.⁶ M .



- Fase di collasso può essere ignorata;
- dopo collasso, buco nero si assesta (“abbastanza rapidamente⁷”) verso stato equilibrio univocamente caratterizzato da M ;
- $M =$ **unico grado di libertà macroscopico** (unica informazione) del sistema;
- **informazione perduta** (corpo collassante ha gdl per momenti di multipolo di distribuzione massa, per diversi tipi di massa, ...);

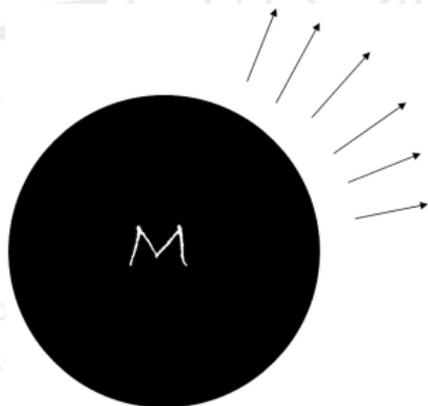
⁶P. W. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2008).

⁷S. M. CARROLL – *Lecture notes on General relativity*, gr-qc/9712019v1 (1997).

Teorema di unicità di Israel

Teorema di unicità (W. Israel, 1967–1968)

(\mathcal{M}, g) asint. piatto, statico e vuoto. Se CCC vera \Rightarrow Unica sol. stazionaria di tipo b.n. è Schwarzschild ed è ammette come unico par. carat.⁶ M .



- Fase di collasso può essere ignorata;
- dopo collasso, buco nero si assesta (“abbastanza rapidamente⁷”) verso stato equilibrio univocamente caratterizzato da M ;
- $M =$ **unico grado di libertà macroscopico** (unica informazione) del sistema;
- **informazione perduta** (corpo collassante ha gdl per momenti di multipolo di distribuzione massa, per diversi tipi di massa, ...);
- classicamente nessun problema (info. conservata oltre \mathcal{H} e \mathcal{B} è eterno).

⁶P. W. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2008).

⁷S. M. CARROLL – *Lecture notes on General relativity*, gr-qc/9712019v1 (1997).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.



⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.

Lasciamo cadere particella con energia $\delta(Mc^2) > 0$: variazione massa

$M \mapsto M + \delta M$ con $\delta M \ll M$; segue variazione area $A_{\mathcal{H}} \mapsto A_{\mathcal{H}} + \delta A_{\mathcal{H}}$.

Pertanto:

$$A_{\mathcal{H}} \mapsto \frac{16\pi G^2}{c^4} (M + \delta M)^2 \simeq A_{\mathcal{H}} + \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M \Leftrightarrow \delta A_{\mathcal{H}} \simeq \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M.$$

⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.

Lasciamo cadere particella con energia $\delta(Mc^2) > 0$: variazione massa

$M \mapsto M + \delta M$ con $\delta M \ll M$; segue variazione area $A_{\mathcal{H}} \mapsto A_{\mathcal{H}} + \delta A_{\mathcal{H}}$.

Pertanto:

$$A_{\mathcal{H}} \mapsto \frac{16\pi G^2}{c^4} (M + \delta M)^2 \simeq A_{\mathcal{H}} + \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M \Leftrightarrow \delta A_{\mathcal{H}} \simeq \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M.$$

OSSERVAZIONE I: essendo $\delta(Mc^2) > 0$ dev'essere $\delta A_{\mathcal{H}} \geq 0$.

⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.

Lasciamo cadere particella con energia $\delta(Mc^2) > 0$: variazione massa

$M \mapsto M + \delta M$ con $\delta M \ll M$; segue variazione area $A_{\mathcal{H}} \mapsto A_{\mathcal{H}} + \delta A_{\mathcal{H}}$.

Pertanto:

$$A_{\mathcal{H}} \mapsto \frac{16\pi G^2}{c^4} (M + \delta M)^2 \simeq A_{\mathcal{H}} + \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M \Leftrightarrow \delta A_{\mathcal{H}} \simeq \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M.$$

OSSERVAZIONE I: essendo $\delta(Mc^2) > 0$ dev'essere $\delta A_{\mathcal{H}} \geq 0$.

Definizione (Gravità superficiale)

Si definisce gravità superficiale κ l'accelerazione gravitazionale avvertita da una particella di prova in prossimità di \mathcal{H} e misurata all'infinito spaziale.

⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.

Lasciamo cadere particella con energia $\delta(Mc^2) > 0$: variazione massa

$M \mapsto M + \delta M$ con $\delta M \ll M$; segue variazione area $A_{\mathcal{H}} \mapsto A_{\mathcal{H}} + \delta A_{\mathcal{H}}$.

Pertanto:

$$A_{\mathcal{H}} \mapsto \frac{16\pi G^2}{c^4} (M + \delta M)^2 \simeq A_{\mathcal{H}} + \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M \Leftrightarrow \delta A_{\mathcal{H}} \simeq \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M.$$

OSSERVAZIONE I: essendo $\delta(Mc^2) > 0$ dev'essere $\delta A_{\mathcal{H}} \geq 0$.

Definizione (Gravità superficiale)

Si definisce gravità superficiale κ l'accelerazione gravitazionale avvertita da una particella di prova in prossimità di \mathcal{H} e misurata all'infinito spaziale.

$$ds_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \Rightarrow \kappa_{Sch} = \frac{c^3}{4GM}.$$

⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.

Lasciamo cadere particella con energia $\delta(Mc^2) > 0$: variazione massa

$M \mapsto M + \delta M$ con $\delta M \ll M$; segue variazione area $A_{\mathcal{H}} \mapsto A_{\mathcal{H}} + \delta A_{\mathcal{H}}$.

Pertanto:

$$A_{\mathcal{H}} \mapsto \frac{16\pi G^2}{c^4} (M + \delta M)^2 \simeq A_{\mathcal{H}} + \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M \quad \Leftrightarrow \quad \delta A_{\mathcal{H}} \simeq \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M.$$

OSSERVAZIONE I: essendo $\delta(Mc^2) > 0$ dev'essere $\delta A_{\mathcal{H}} \geq 0$.

Definizione (Gravità superficiale)

Si definisce gravità superficiale κ l'accelerazione gravitazionale avvertita da una particella di prova in prossimità di \mathcal{H} e misurata all'infinito spaziale.

$$ds_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa_{Sch} = \frac{c^3}{4GM}.$$

OSSERVAZIONE II: κ_{Sch} è costante sull'orizzonte di un b.n. di Schwarzschild.

⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild I

Area orizzonte degli eventi⁸ : $A_{\mathcal{H}} = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2$.

Lasciamo cadere particella con energia $\delta(Mc^2) > 0$: variazione massa $M \mapsto M + \delta M$ con $\delta M \ll M$; segue variazione area $A_{\mathcal{H}} \mapsto A_{\mathcal{H}} + \delta A_{\mathcal{H}}$.

Pertanto:

$$A_{\mathcal{H}} \mapsto \frac{16\pi G^2}{c^4} (M + \delta M)^2 \simeq A_{\mathcal{H}} + \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M \Leftrightarrow \delta A_{\mathcal{H}} \simeq \frac{32\pi G^2}{c^4} M \delta M.$$

OSSERVAZIONE I: essendo $\delta(Mc^2) > 0$ dev'essere $\delta A_{\mathcal{H}} \geq 0$.

Definizione (Gravità superficiale)

Si definisce gravità superficiale κ l'accelerazione gravitazionale avvertita da una particella di prova in prossimità di \mathcal{H} e misurata all'infinito spaziale.

$$ds_{Sch}^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \Rightarrow \kappa_{Sch} = \frac{c^3}{4GM}.$$

OSSERVAZIONE II: κ_{Sch} è costante sull'orizzonte di un b.n. di Schwarzschild.

$$\delta(Mc^2) \simeq \frac{\kappa_{Sch} c^3}{8\pi G} \delta A_{\mathcal{H}}.$$

⁸G. W. GIBBONS – *An introduction to black hole thermodynamics*, Cambridge Lectures (1980).

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild II

Riepilogando.

● Teorema unicità Israel

- ◇ fase collasso è ignorabile,
- ◇ stato equilibrio $\leftrightarrow M$ (g.d.l. macroscopico),
- ◇ perdita di informazione;

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild II

Riepilogando.

- Teorema unicità Israel
 - ◇ fase collasso è ignorabile,
 - ◇ stato equilibrio $\leftrightarrow M$ (g.d.l. macroscopico),
 - ◇ perdita di informazione;

(0) gravità superficiale κ_{Sch} costante sull'orizzonte degli eventi;

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild II

Riepilogando.

- Teorema unicità Israel
 - ◇ fase collasso è ignorabile,
 - ◇ stato equilibrio $\leftrightarrow M$ (g.d.l. macroscopico),
 - ◇ perdita di informazione;

(0) gravità superficiale κ_{Sch} costante sull'orizzonte degli eventi;

(1) se buco nero stazionario di massa M è perturbato di modo che esso si assesti verso un nuovo buco nero di massa $M + \delta M$, allora

$$\delta(Mc^2) \simeq \frac{\kappa_{Sch} c^3}{8\pi G} \delta A_{\mathcal{H}};$$

Meccanica di un Buco nero di Schwarzschild II

Riepilogando.

- Teorema unicità Israel $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ fase collasso è ignorabile,} \\ \diamond \text{ stato equilibrio} \leftrightarrow M \text{ (g.d.l. macroscopico),} \\ \diamond \text{ perdita di informazione;} \end{array} \right.$

(0) gravità superficiale κ_{Sch} costante sull'orizzonte degli eventi;

(1) se buco nero stazionario di massa M è perturbato di modo che esso si assesti verso un nuovo buco nero di massa $M + \delta M$, allora

$$\delta(Mc^2) \simeq \frac{\kappa_{Sch} c^3}{8\pi G} \delta A_{\mathcal{H}};$$

(2) se la perturbazione è causata da una particella con energia $E > 0$, allora

$$\delta A_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Equazioni di Einstein-Maxwell e soluzione di Kerr-Newman

Campo gravitazionale accoppiato al campo elettromagnetico:



Equazioni di Einstein–Maxwell e soluzione di Kerr–Newman

Campo gravitazionale accoppiato al campo elettromagnetico:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} (F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}), \\ F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0. \end{cases} \quad (\text{Einstein–Maxwell}).$$

Equazioni di Einstein–Maxwell e soluzione di Kerr–Newman

Campo gravitazionale accoppiato al campo elettromagnetico:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} (F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}), \\ F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0. \end{cases} \quad (\text{Einstein–Maxwell}).$$

Soluzione di Kerr–Newman (R. KERR, 1963; E. NEWMAN, 1965): campo gravitazionale generato da un oggetto di *massa* M (puntiforme), *momento angolare totale* J e *carica elettrica totale* Q .

Equazioni di Einstein–Maxwell e soluzione di Kerr–Newman

Campo gravitazionale accoppiato al campo elettromagnetico:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} (F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}), \\ F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0. \end{cases} \quad (\text{Einstein–Maxwell}).$$

Soluzione di Kerr–Newman (R. KERR, 1963; E. NEWMAN, 1965): campo gravitazionale generato da un oggetto di *massa* M (puntiforme), *momento angolare totale* J e *carica elettrica totale* Q . In crd. *Boyer–Lindquist* (tipo ellittiche) elem. linea ($G_N = c = 1$):

$$\begin{aligned} ds_{KN}^2 &= -\frac{\Delta}{\Sigma} \omega_t^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma} \omega_\phi^2, \\ \omega_t &= dt - a \sin^2\theta d\phi, \quad \omega_\phi = (r^2 + a^2) d\phi - a dt, \\ \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad a \equiv \frac{J}{M}. \end{aligned}$$

Equazioni di Einstein–Maxwell e soluzione di Kerr–Newman

Campo gravitazionale accoppiato al campo elettromagnetico:

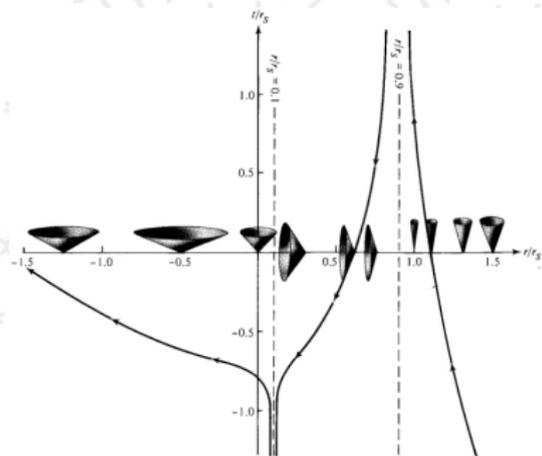
$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} (F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}), \\ F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0. \end{cases} \quad (\text{Einstein–Maxwell}).$$

Soluzione di Kerr–Newman (R. KERR, 1963; E. NEWMAN, 1965): campo gravitazionale generato da un oggetto di *massa* M (puntiforme), *momento angolare totale* J e *carica elettrica totale* Q . In crd. *Boyer–Lindquist* (tipo ellittiche) elem. linea ($G_N = c = 1$):

$$\begin{aligned} ds_{KN}^2 &= -\frac{\Delta}{\Sigma} \omega_t^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma} \omega_\phi^2, \\ \omega_t &= dt - a \sin^2\theta d\phi, \quad \omega_\phi = (r^2 + a^2) d\phi - a dt, \\ \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad a \equiv \frac{J}{M}. \end{aligned}$$

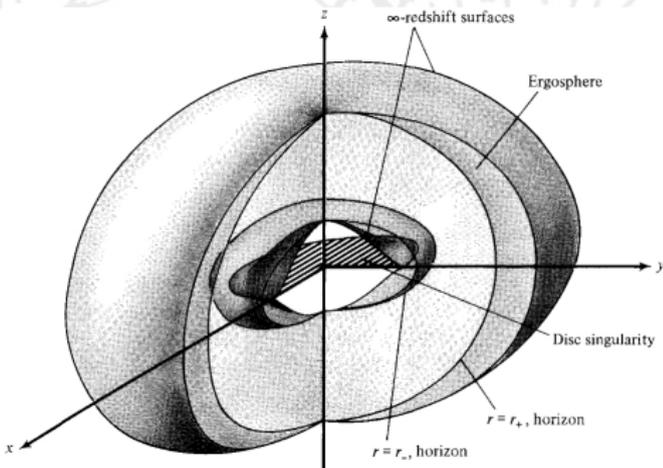
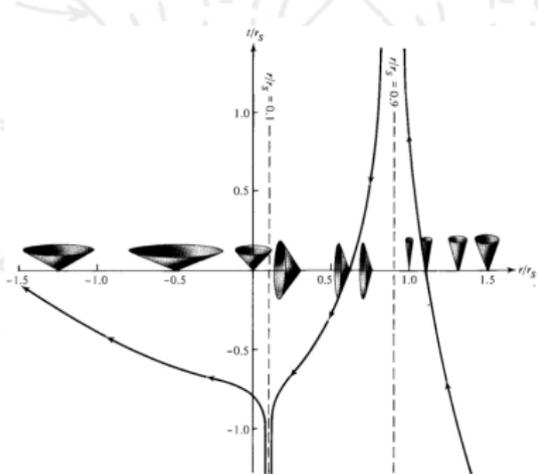
OSSERVAZIONE: $J = Q = 0$ Schwarzschild (1916); $J = 0$ Reissner–Nordstrøm (H. REISSNER, 1916; G. NORDSTRØM, 1918); $Q = 0$ Kerr (1965).

Struttura causale, singolarità ed orizzonti⁹



⁹H. C. OHANIAN, R. RUFFINI – *Gravitation and Spacetime*, Norton & Company (1997).

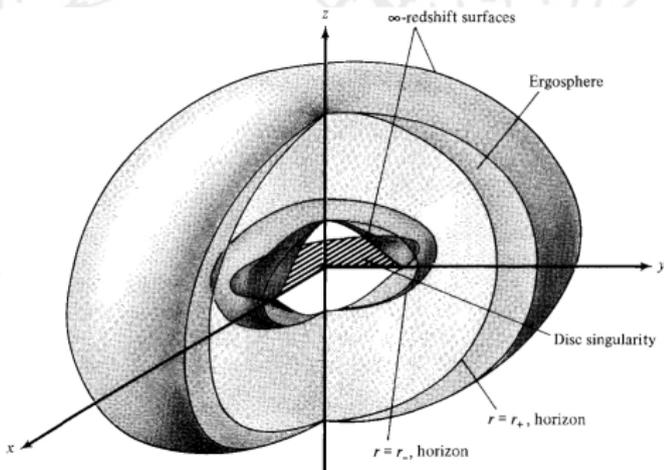
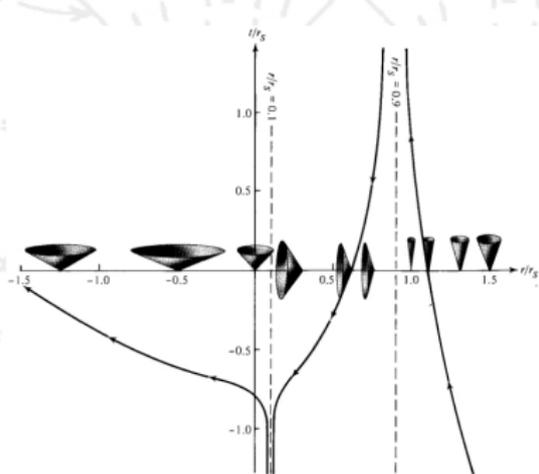
Struttura causale, singolarità ed orizzonti⁹



OSSERVAZIONE I. Orizzonti degli eventi ($\Delta = 0$): $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$.

⁹H. C. OHANIAN, R. RUFFINI – *Gravitation and Spacetime*, Norton & Company (1997).

Struttura causale, singolarità ed orizzonti⁹

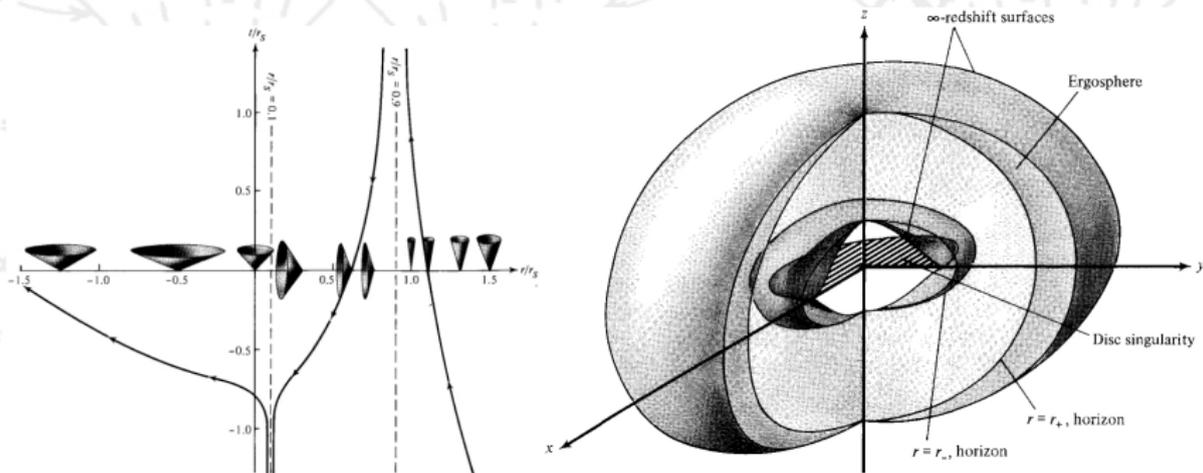


OSSERVAZIONE I. Orizzonti degli eventi ($\Delta = 0$): $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$.

OSSERVAZIONE II. Singolarità di curvatura $r = 0 \leftrightarrow$ disco $x^2 + y^2 \leq a^2$.

⁹H. C. OHANIAN, R. RUFFINI – *Gravitation and Spacetime*, Norton & Company (1997).

Struttura causale, singolarità ed orizzonti⁹



OSSERVAZIONE I. Orizzonti degli eventi ($\Delta = 0$): $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$.

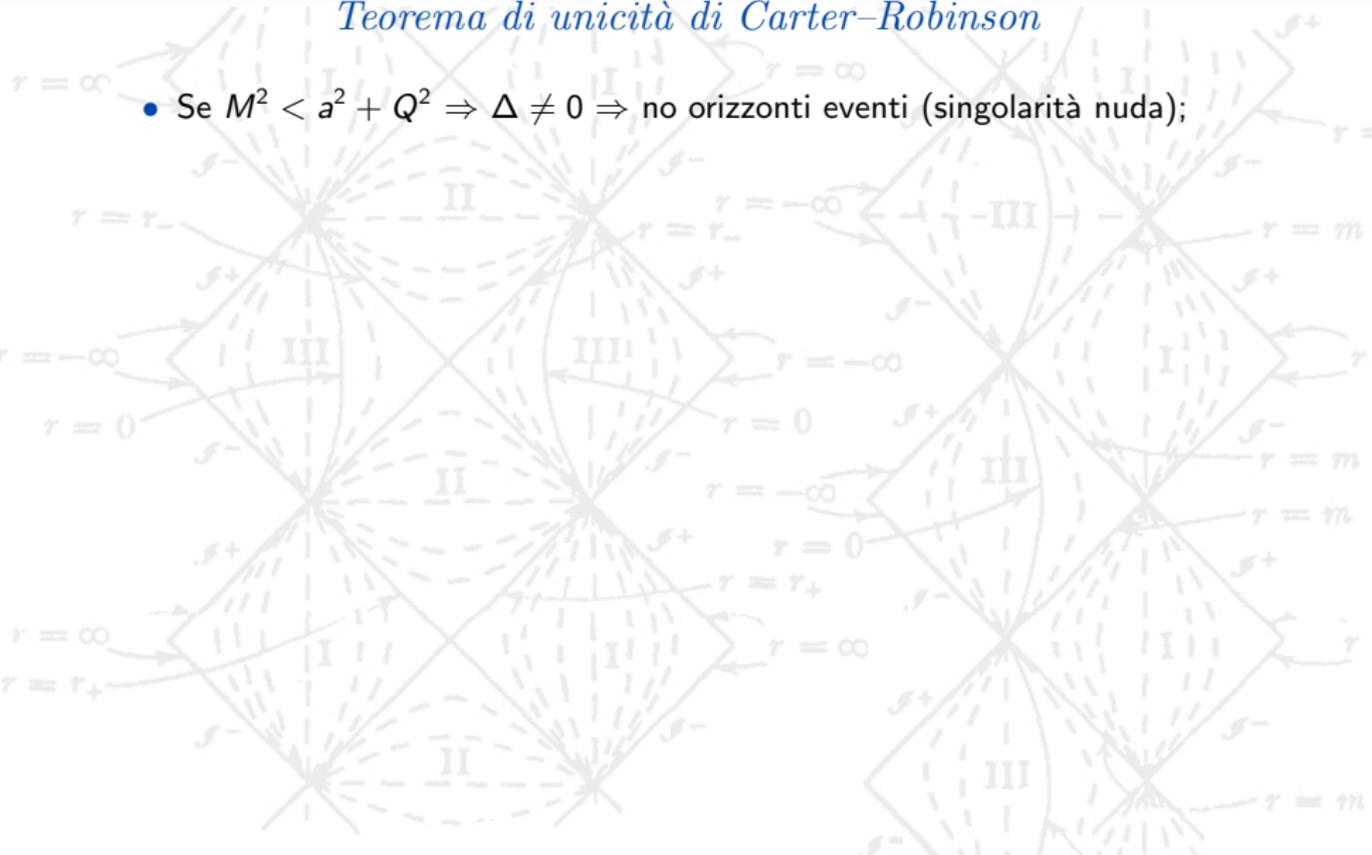
OSSERVAZIONE II. Singolarità di curvatura $r = 0 \leftrightarrow$ disco $x^2 + y^2 \leq a^2$.

OSSERVAZIONE III. **Ergoregione**: contiene orbite ad energia totale **negativa!**

⁹H. C. OHANIAN, R. RUFFINI – *Gravitation and Spacetime*, Norton & Company (1997).

Teorema di unicità di Carter–Robinson

- Se $M^2 < a^2 + Q^2 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ no orizzonti eventi (singolarità nuda);



Teorema di unicità di Carter–Robinson

- Se $M^2 < a^2 + Q^2 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ no orizzonti eventi (singolarità nuda);
- se $M^2 > a^2 + Q^2 \Rightarrow$ due oriz. eventi in $r = r_{\pm}$ con $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}$;

Teorema di unicità di Carter–Robinson

- Se $M^2 < a^2 + Q^2 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ no orizzonti eventi (singolarità nuda);
- se $M^2 > a^2 + Q^2 \Rightarrow$ due oriz. eventi in $r = r_{\pm}$ con $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}$;
- se $M^2 = a^2 + Q^2 \Rightarrow$ buco nero *estremale* e $\kappa = 0$.

Teorema di unicità di Carter–Robinson

- Se $M^2 < a^2 + Q^2 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ no orizzonti eventi (singolarità nuda);
- se $M^2 > a^2 + Q^2 \Rightarrow$ due oriz. eventi in $r = r_{\pm}$ con $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}$;
- se $M^2 = a^2 + Q^2 \Rightarrow$ buco nero *estremale* e $\kappa = 0$.

Teorema "no hair" (B. Carter (1971–1973), D. C. Robinson (1974–1975))

Se $M^2 \geq a^2 + Q^2$ (ovvero se vale la **CCC**), allora (M, g_{KN}) è l'unica soluzione di buco nero stazionaria ed asintoticamente piatta delle equazioni di Einstein–Maxwell¹⁰.



¹⁰P. O. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2000).

Teorema di unicità di Carter–Robinson

- Se $M^2 < a^2 + Q^2 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ no orizzonti eventi (singolarità nuda);
- se $M^2 > a^2 + Q^2 \Rightarrow$ due oriz. eventi in $r = r_{\pm}$ con $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}$;
- se $M^2 = a^2 + Q^2 \Rightarrow$ buco nero *estremale* e $\kappa = 0$.

Teorema "no hair" (B. Carter (1971–1973), D. C. Robinson (1974–1975))

Se $M^2 \geq a^2 + Q^2$ (ovvero se vale la **CCC**), allora (M, g_{KN}) è l'unica soluzione di buco nero stazionaria ed asintoticamente piatta delle equazioni di Einstein–Maxwell¹⁰.

OSSERVAZIONE I. No teoremi unicità per soluzioni tipo buco nero stazionarie per $d > 4$ (R. EMPARAN ed H. S. REALL, 2002).



¹⁰P. O. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2000).

Teorema di unicità di Carter–Robinson

- Se $M^2 < a^2 + Q^2 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ no orizzonti eventi (singolarità nuda);
- se $M^2 > a^2 + Q^2 \Rightarrow$ due oriz. eventi in $r = r_{\pm}$ con $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}$;
- se $M^2 = a^2 + Q^2 \Rightarrow$ buco nero *estremale* e $\kappa = 0$.

Teorema "no hair" (B. Carter (1971–1973), D. C. Robinson (1974–1975))

Se $M^2 \geq a^2 + Q^2$ (ovvero se vale la CCC), allora (M, g_{KN}) è l'unica soluzione di buco nero stazionaria ed asintoticamente piatta delle equazioni di Einstein–Maxwell¹⁰.

OSSERVAZIONE I. No teoremi unicità per soluzioni tipo buco nero stazionarie per $d > 4$ (R. EMPARAN ed H. S. REALL, 2002).

OSSERVAZIONE

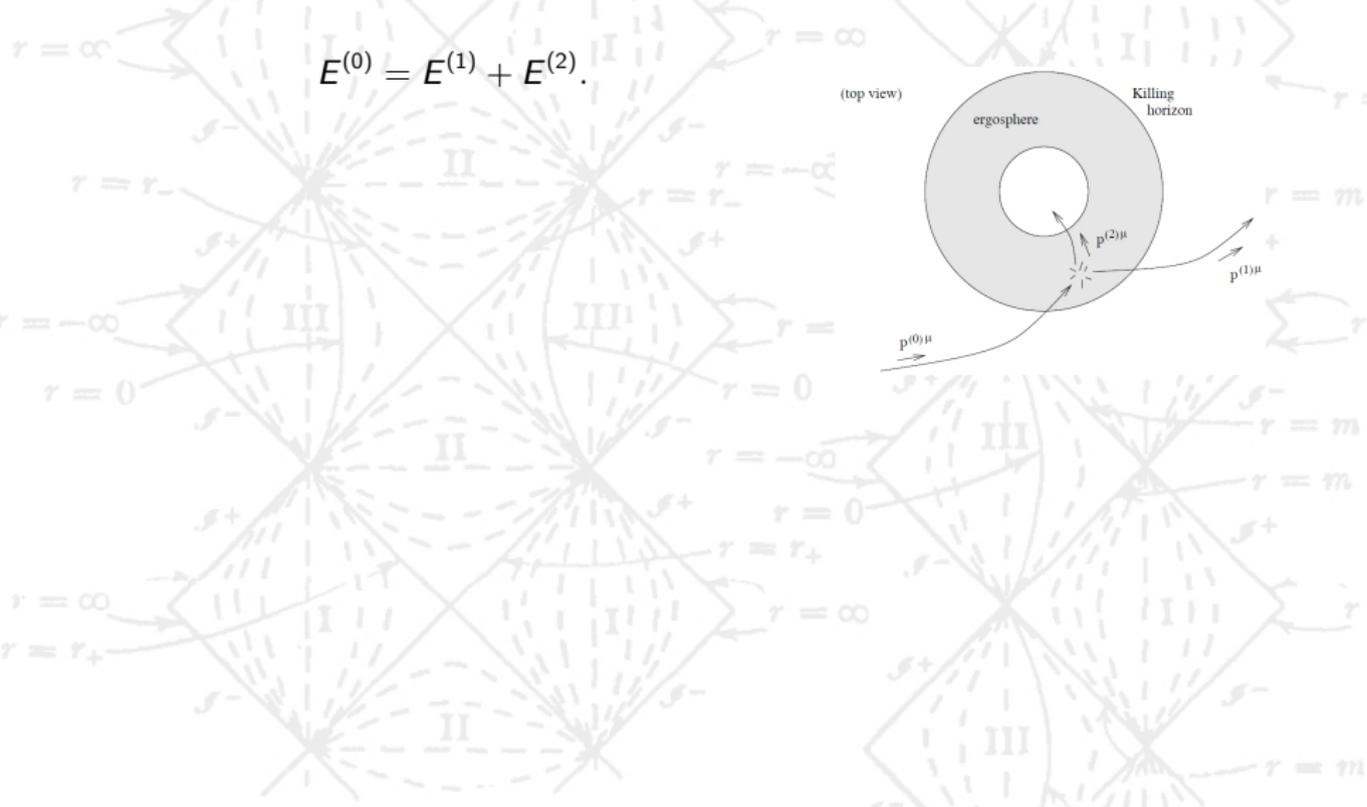
II. (M, Q, J) unici g.d.l. macroscopici per buco nero stazionario formato per collasso gravitazionale.



¹⁰P. O. MAZUR – *Black hole uniqueness theorems*, hep-th/0101012v1 (2000).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

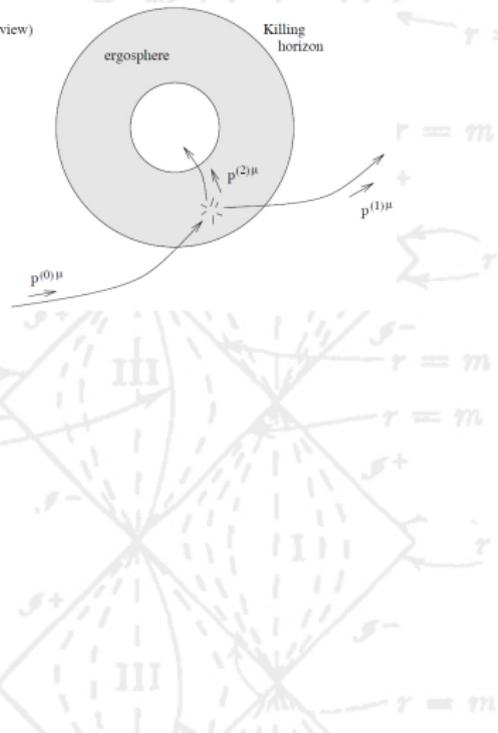


Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

(top view)



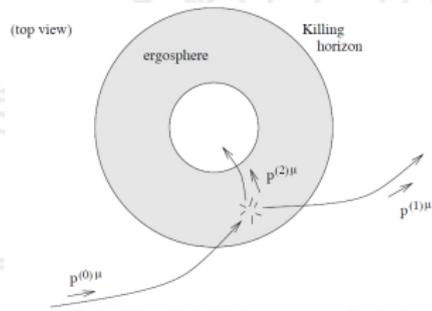
Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
limite energia estraibile¹¹:

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

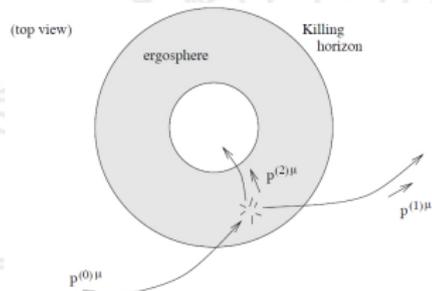
Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
limite energia estraibile¹¹:

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$

Nel processo l'area dell'orizzonte degli eventi esterno non decresce!

$$A_{\mathcal{H}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) =: 16\pi M_{irr}^2$$



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

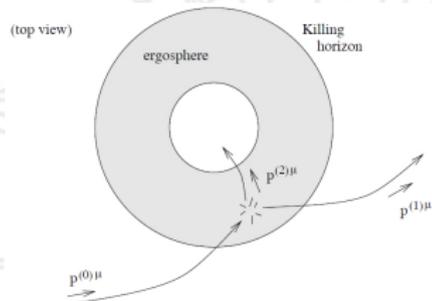
Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
 limite energia estraibile¹¹:

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$

Nel processo l'area dell'orizzonte degli eventi esterno non decresce!

$$A_{\mathcal{H}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) =: 16\pi M_{irr}^2 \Rightarrow \delta M_{irr} = \frac{(r_+^2 + a^2)}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left[\delta M - \frac{a\delta J - Qr_+\delta Q}{r_+^2 + a^2} \right] \geq 0,$$



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

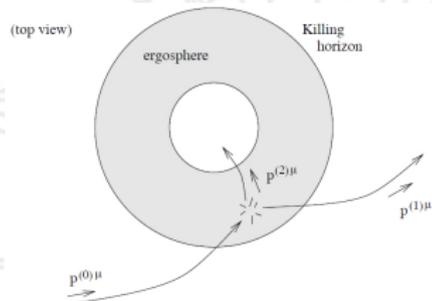
D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
 limite energia estraibile¹¹:

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$

Nel processo l'area dell'orizzonte degli eventi esterno non decresce!

$$A_{\mathcal{H}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) =: 16\pi M_{irr}^2 \Rightarrow \delta M_{irr} = \frac{(r_+^2 + a^2)}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left[\delta M - \frac{a\delta J - Qr_+\delta Q}{r_+^2 + a^2} \right] \geq 0,$$

$$0 \leq \delta A_{\mathcal{H}} =$$



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

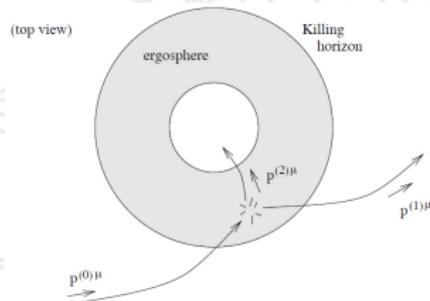
D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
limite energia estraibile¹¹:

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$

Nel processo l'area dell'orizzonte degli eventi esterno non decresce!

$$A_{\mathcal{H}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) =: 16\pi M_{irr}^2 \Rightarrow \delta M_{irr} = \frac{(r_+^2 + a^2)}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left[\delta M - \frac{a\delta J - Qr_+\delta Q}{r_+^2 + a^2} \right] \geq 0,$$

$$0 \leq \delta A_{\mathcal{H}} = \frac{8\pi(r_+^2 + a^2)}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left(\delta M - \frac{a}{r_+^2 + a^2} \delta J - \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \delta Q \right).$$



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
limite energia estraibile¹¹:

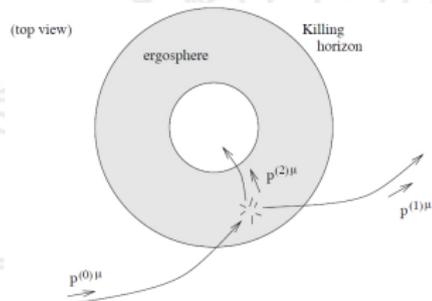
$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$

Nel processo l'area dell'orizzonte degli eventi esterno non decresce!

$$A_{\mathcal{H}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) =: 16\pi M_{irr}^2 \Rightarrow \delta M_{irr} = \frac{(r_+^2 + a^2)}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left[\delta M - \frac{a\delta J - Qr_+\delta Q}{r_+^2 + a^2} \right] \geq 0,$$

$$0 \leq \delta A_{\mathcal{H}} = \frac{8\pi(r_+^2 + a^2)}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left(\delta M - \frac{a}{r_+^2 + a^2} \delta J - \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \delta Q \right).$$

Ricordando che $\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$ ed individuando $\Omega_{\mathcal{H}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$ (velocità angolare orizzonte) e $\Phi_{\mathcal{H}} = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}$ (potenziale elettrostatico orizzonte):



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

Processo di estrazione di Penrose e massa irriducibile

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}.$$

Traiettoria tale che $E^{(2)} < 0$ allora $E^{(1)} > E^{(0)}$.

D. CHRISTODOULOU, R. RUFFINI (1971)
limite energia estraibile¹¹:

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+ Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}.$$

Nel processo l'area dell'orizzonte degli eventi esterno non decresce!

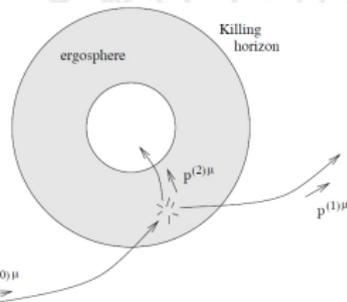
$$A_{\mathcal{H}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) =: 16\pi M_{irr}^2 \Rightarrow \delta M_{irr} = \frac{(r_+^2 + a^2)}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left[\delta M - \frac{a\delta J - Qr_+\delta Q}{r_+^2 + a^2} \right] \geq 0,$$

$$0 \leq \delta A_{\mathcal{H}} = \frac{8\pi(r_+^2 + a^2)}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \left(\delta M - \frac{a}{r_+^2 + a^2} \delta J - \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \delta Q \right).$$

Ricordando che $\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$ ed individuando $\Omega_{\mathcal{H}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$ (velocità angolare orizzonte) e $\Phi_{\mathcal{H}} = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}$ (potenziale elettrostatico orizzonte):

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_{\mathcal{H}} + \Omega_{\mathcal{H}} \delta J + \Phi_{\mathcal{H}} \delta Q.$$

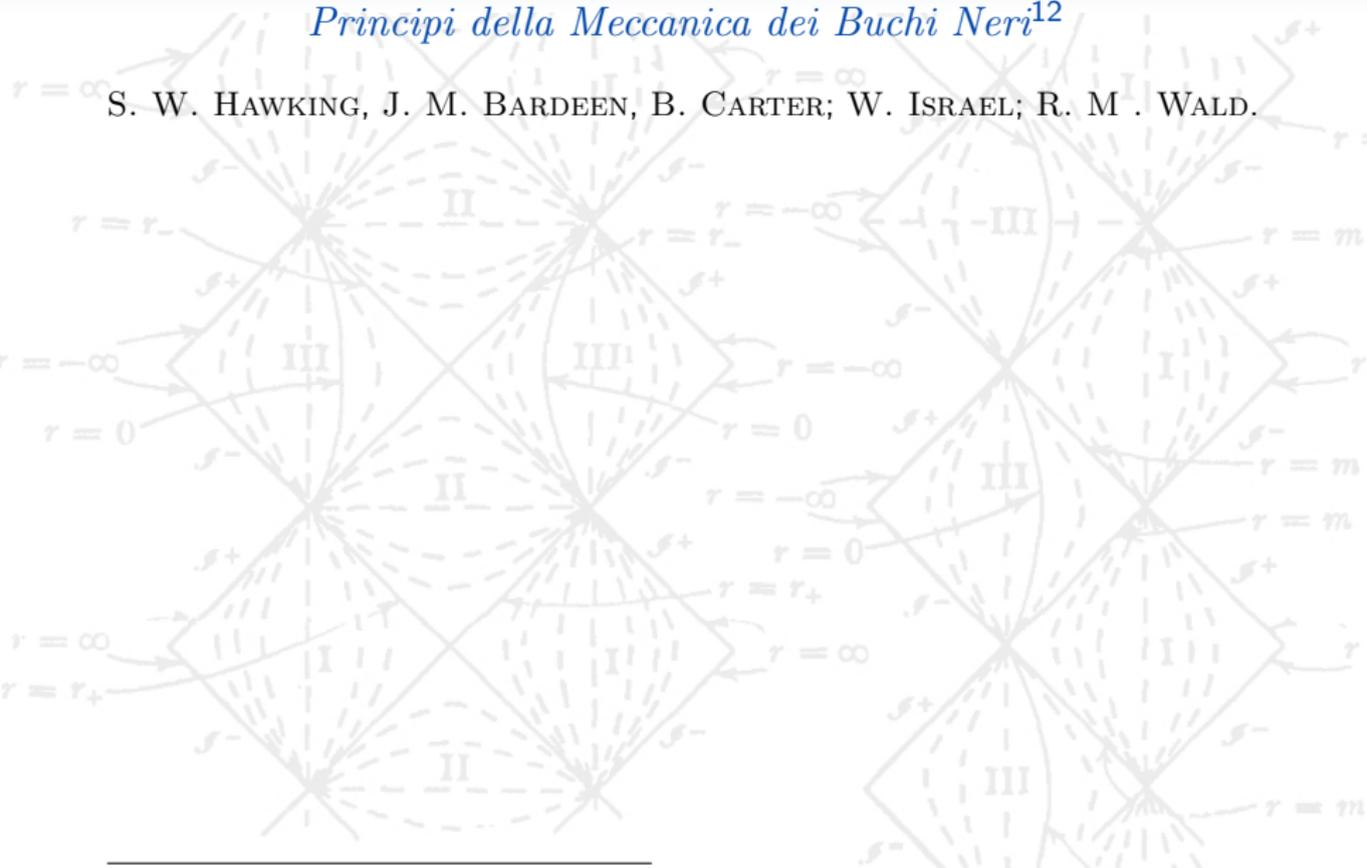
(top view)



¹¹C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER - *Gravitation*, Freeman & Co. (1970).

*Principi della Meccanica dei Buchi Neri*¹²

S. W. HAWKING, J. M. BARDEEN, B. CARTER; W. ISRAEL; R. M. WALD.



¹²P. K. TOWNSEND – *Black holes*, DAMTP, Uni. Cambridge, Ch.6,7 (1997).

*Principi della Meccanica dei Buchi Neri*¹²

S. W. HAWKING, J. M. BARDEEN, B. CARTER; W. ISRAEL; R. M. WALD.

- **Principio zero.** Per ogni b.n. stazionario $\kappa = \kappa(M, J, Q)$ è costante su \mathcal{H} .
- **Principio uno.** Se b.n. stazionario $(M, J, Q) \rightarrow (M + \delta M, J + \delta J, Q + \delta Q)$

$$dM = \frac{\kappa c^3}{8\pi G} dA_{\mathcal{H}} + \Omega_{\mathcal{H}} dJ + \Phi_{\mathcal{H}} dQ.$$

J. M. BARDEEN, B. CARTER, S. W. HAWKING – *The four laws of black hole mechanics*, *Com. Math. Phys.* **31**, 161–170 (1973).

¹²P. K. TOWNSEND – *Black holes*, DAMTP, Uni. Cambridge, Ch.6,7 (1997).

*Principi della Meccanica dei Buchi Neri*¹²

S. W. HAWKING, J. M. BARDEEN, B. CARTER; W. ISRAEL; R. M. WALD.

- **Principio zero.** Per ogni b.n. stazionario $\kappa = \kappa(M, J, Q)$ è costante su \mathcal{H} .
- **Principio uno.** Se b.n. stazionario $(M, J, Q) \rightarrow (M + \delta M, J + \delta J, Q + \delta Q)$

$$dM = \frac{\kappa c^3}{8\pi G} dA_{\mathcal{H}} + \Omega_{\mathcal{H}} dJ + \Phi_{\mathcal{H}} dQ.$$

J. M. BARDEEN, B. CARTER, S. W. HAWKING – *The four laws of black hole mechanics*, *Com. Math. Phys.* **31**, 161–170 (1973).

- **Principio due.** Se $T_{\mu\nu}$ soddisfa la *cond. energetica debole* ($v^\mu v^\nu T_{\mu\nu} \geq 0, \forall v$ non space-like) e se vale CCC, allora $A_{\mathcal{H}}$ funzione non decrescente del tempo.
- S. W. HAWKING – *Gravitational radiation from colliding black holes*, *P.R.L.* **26**, 1344 (1971).

¹²P. K. TOWNSEND – *Black holes*, DAMTP, Uni. Cambridge, Ch.6,7 (1997).

*Principi della Meccanica dei Buchi Neri*¹²

S. W. HAWKING, J. M. BARDEEN, B. CARTER; W. ISRAEL; R. M. WALD.

- **Principio zero.** Per ogni b.n. stazionario $\kappa = \kappa(M, J, Q)$ è costante su \mathcal{H} .
- **Principio uno.** Se b.n. stazionario $(M, J, Q) \rightarrow (M + \delta M, J + \delta J, Q + \delta Q)$

$$dM = \frac{\kappa c^3}{8\pi G} dA_{\mathcal{H}} + \Omega_{\mathcal{H}} dJ + \Phi_{\mathcal{H}} dQ.$$

J. M. BARDEEN, B. CARTER, S. W. HAWKING – *The four laws of black hole mechanics*, *Com. Math. Phys.* **31**, 161–170 (1973).

- **Principio due.** Se $T_{\mu\nu}$ soddisfa la *cond. energetica debole* ($v^\mu v^\nu T_{\mu\nu} \geq 0, \forall v$ non space-like) e se vale CCC, allora $A_{\mathcal{H}}$ funzione non decrescente del tempo.

S. W. HAWKING – *Gravitational radiation from colliding black holes*, *P.R.L.* **26**, 1344 (1971).

- **Principio tre.** Se vale la CCC, allora non è possibile ridurre κ a zero (equiv. trasf. b.n. non–estremale in estremale) in un numero finito di processi.

W. ISRAEL – *Third law of Black-Hole Dynamics: A formulation and a proof*, *P.R.L.* **57** (1986).

¹²P. K. TOWNSEND – *Black holes*, DAMTP, Uni. Cambridge, Ch.6,7 (1997).

Bekenstein ed il diavoletto di Wheeler

[...] *"The consequence of my crime, Jacob, echo down to the end of time," I noted. "But if a black hole swims by, and I drop the teacups into it, I conceal from all the world the evidence of my crime. How remarkable!" Several months later, he came back with a remarkable idea. "You don't destroy entropy when you drop those teacups into the black hole. The black hole already has entropy, and you only increase it! [...] A black hole is not totally cold!*



THE MAD TEA-PARTY

J. A. WHEELER – *A journey into gravity and space*, W.H. Freeman & Co. (1990).

¹³G. GOUR, A. E. MAYO – *Why is the black hole entropy (almost) linear in the horizon area?*, gr-qc/0011024v2 (2000).

Bekenstein ed il diavoletto di Wheeler

[...] “The consequence of my crime, Jacob, echo down to the end of time,” I noted. “But if a black hole swims by, and I drop the teacups into it, I conceal from all the world the evidence of my crime. How remarkable!” Several months later, he came back with a remarkable idea. “You don't destroy entropy when you drop those teacups into the black hole. The black hole already has entropy, and you only increase it! [...] A black hole is not totally cold!



J. A. WHEELER – *A journey into gravity and space*, W.H. Freeman & Co. (1990).

J. BEKENSTEIN – *Black holes and entropy*, *Phy. Rev. D*, **7** (1973).

$$\frac{\kappa}{8\pi} dA_{\mathcal{H}} = T dS \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_{bh} = f(A_{\mathcal{H}}), \\ T_{bh} = \left(\frac{\partial M}{\partial S_{bh}} \right) = \frac{\kappa}{8\pi f'(A_{\mathcal{H}})}. \end{cases}$$

¹³G. GOUR, A. E. MAYO – *Why is the black hole entropy (almost) linear in the horizon area?*, gr-qc/0011024v2 (2000).

Bekenstein ed il diavoletto di Wheeler

[...] “The consequence of my crime, Jacob, echo down to the end of time,” I noted. “But if a black hole swims by, and I drop the teacups into it, I conceal from all the world the evidence of my crime. How remarkable!” Several months later, he came back with a remarkable idea. “You don't destroy entropy when you drop those teacups into the black hole. The black hole already has entropy, and you only increase it! [...] A black hole is not totally cold!



J. A. WHEELER – *A journey into gravity and space*, W.H. Freeman & Co. (1990).

J. BEKENSTEIN – *Black holes and entropy*, *Phy. Rev. D*, **7** (1973).

$$\frac{\kappa}{8\pi} dA_{\mathcal{H}} = T dS \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_{bh} = f(A_{\mathcal{H}}), \\ T_{bh} = \left(\frac{\partial M}{\partial S_{bh}} \right) = \frac{\kappa}{8\pi f'(A_{\mathcal{H}})}. \end{cases}$$

$T \geq 0 \Leftrightarrow f'(A) \geq 0$ (teorema dell'area);

¹³G. GOUR, A. E. MAYO – *Why is the black hole entropy (almost) linear in the horizon area?*, gr-qc/0011024v2 (2000).

Bekenstein ed il diavoletto di Wheeler

[...] "The consequence of my crime, Jacob, echo down to the end of time," I noted. "But if a black hole swims by, and I drop the teacups into it, I conceal from all the world the evidence of my crime. How remarkable!" Several months later, he came back with a remarkable idea. "You don't destroy entropy when you drop those teacups into the black hole. The black hole already has entropy, and you only increase it! [...] A black hole is not totally cold!



J. A. WHEELER – *A journey into gravity and space*, W.H. Freeman & Co. (1990).

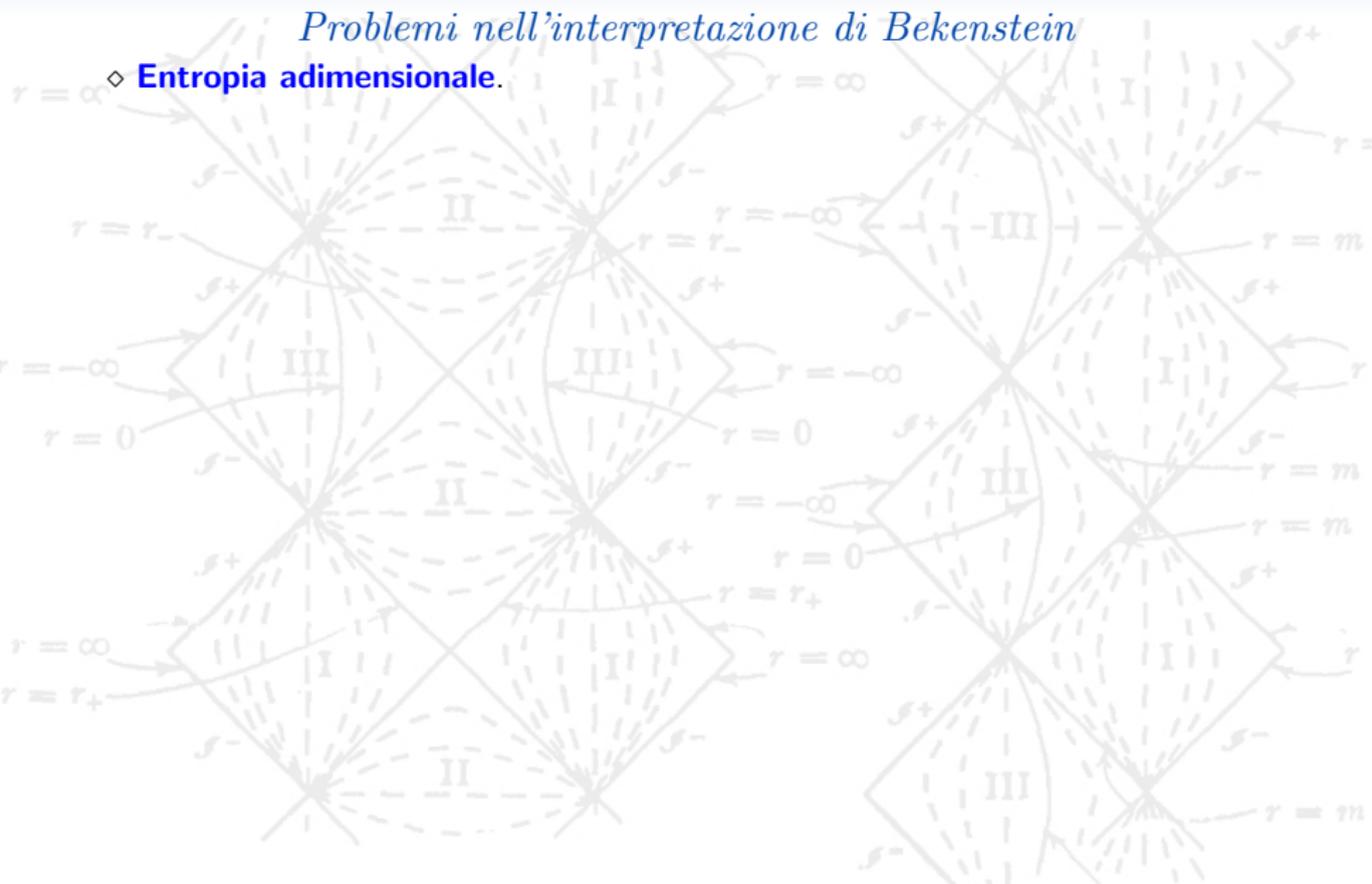
J. BEKENSTEIN – *Black holes and entropy*, *Phy. Rev. D*, **7** (1973).

$$\frac{\kappa}{8\pi} dA_{\mathcal{H}} = T dS \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_{bh} = f(A_{\mathcal{H}}), \\ T_{bh} = \left(\frac{\partial M}{\partial S_{bh}} \right) = \frac{\kappa}{8\pi f'(A_{\mathcal{H}})}. \end{cases}$$

$T \geq 0 \Leftrightarrow f'(A) \geq 0$ (teorema dell'area); principio zero meccanica buchi neri + principio zero termodinamica $\Rightarrow f'(A_{\mathcal{H}}) = \text{costante per cui}^{13}$

$$S_{bh} = \eta A_{\mathcal{H}} + S_0.$$

¹³G. GOUR, A. E. MAYO – *Why is the black hole entropy (almost) linear in the horizon area?*, gr-qc/0011024v2 (2000).

Problemi nell'interpretazione di Bekenstein◇ **Entropia adimensionale.**

Problemi nell'interpretazione di Bekenstein

- ◇ **Entropia dimensionale.** Wheeler $\rightarrow \eta \propto \ell_P^2 \equiv \frac{\hbar G}{c^3}$, sicché (ripristinando k_b)

$$S_{bh} = \eta' k_b A_{\mathcal{H}} / \ell_P^2 \quad (\eta' \text{ numero puro}).$$

- ◇ **Diavoletto di Wheeler.**

Bekenstein \rightarrow *seconda legge generalizzata*:

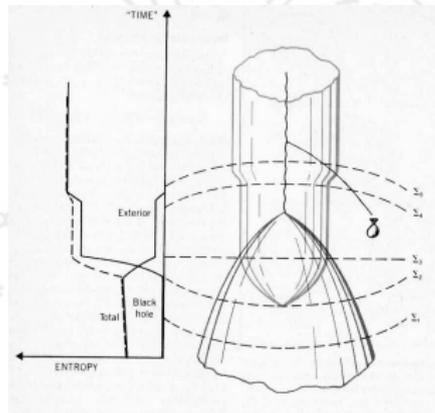
$$\delta(S_{ext} + S_{bh}) \geq 0.$$

Problema maggiore: interpretazione T_{bh} .

- ◇ **Definizione buco nero.**

$T_{BH} \neq 0$ in conflitto con proprietà classiche, niente può emergere da un buco nero.

- ◇ **Violazione secondo principio.** B.n. in bagno termico $T < T_{bh} \Rightarrow$ violazione secondo principio termodinamica!



Problemi nell'interpretazione di Bekenstein

- ◇ **Entropia dimensionale.** Wheeler $\rightarrow \eta \propto \ell_P^2 \equiv \frac{\hbar G}{c^3}$, sicché (ripristinando k_b)

$$S_{bh} = \eta' k_b A_{\mathcal{H}} / \ell_P^2 \quad (\eta' \text{ numero puro}).$$

- ◇ **Diavoletto di Wheeler.**

Bekenstein \rightarrow *seconda legge generalizzata*:

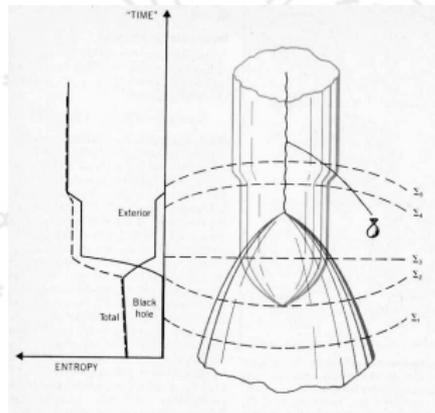
$$\delta(S_{ext} + S_{bh}) \geq 0.$$

Problema maggiore: interpretazione T_{bh} .

- ◇ **Definizione buco nero.**

$T_{BH} \neq 0$ in conflitto con proprietà classiche, niente può emergere da un buco nero.

- ◇ **Violazione secondo principio.** B.n. in bagno termico $T < T_{bh} \Rightarrow$ violazione secondo principio termodinamica! Violazione GSL (assorbe più radiazione di quanto aumento entropia possa riuscire a compensare).



Problemi nell'interpretazione di Bekenstein

- ◇ **Entropia adimensionale.** Wheeler $\rightarrow \eta \propto \ell_P^2 \equiv \frac{\hbar G}{c^3}$, sicché (ripristinando k_b)

$$S_{bh} = \eta' k_b A_{\mathcal{H}} / \ell_P^2 \quad (\eta' \text{ numero puro}).$$

- ◇ **Diavoletto di Wheeler.**

Bekenstein \rightarrow *seconda legge generalizzata*:

$$\delta(S_{ext} + S_{bh}) \geq 0.$$

Problema maggiore: interpretazione T_{bh} .

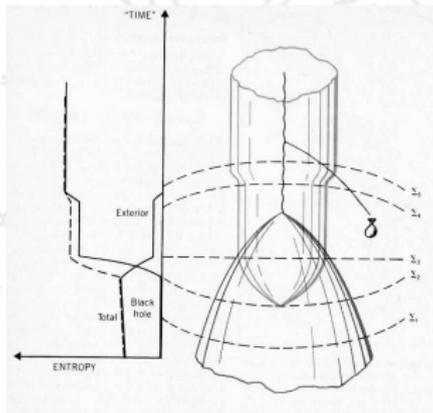
- ◇ **Definizione buco nero.**

$T_{BH} \neq 0$ in conflitto con proprietà classiche, niente può emergere da un buco nero.

- ◇ **Violazione secondo principio.** B.n. in bagno termico $T < T_{bh} \Rightarrow$ violazione secondo principio termodinamica! Violazione GSL (assorbe più radiazione di quanto aumento entropia possa riuscire a compensare).

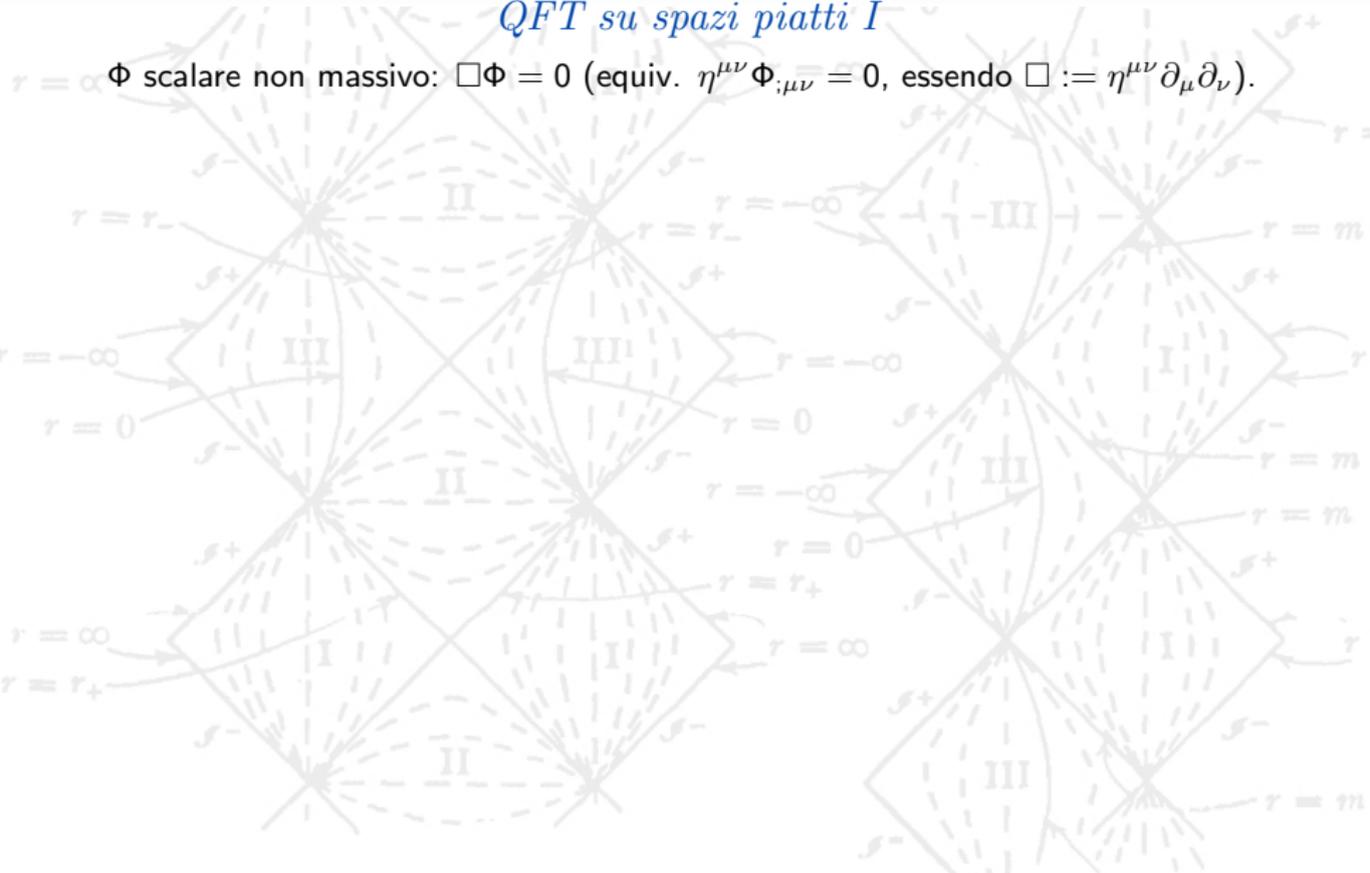
In those days in 1973 when I was often told that I was headed the wrong way, I drew some comfort from Wheeler's opinion that "black-hole thermodynamics is crazy, perhaps crazy enough to work".

J. BEKENSTEIN – *Black holes thermodynamics, Physics Today, January (1980).*



QFT su spazi piatti I

Φ scalare non massivo: $\square\Phi = 0$ (equiv. $\eta^{\mu\nu}\Phi_{;\mu\nu} = 0$, essendo $\square := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$).



QFT su spazi piatti I

Φ scalare non massivo: $\square\Phi = 0$ (equiv. $\eta^{\mu\nu}\Phi_{;\mu\nu} = 0$, essendo $\square := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$).

\mathcal{S} spazio soluzioni dell'equazione KG: $\mathcal{S} = \text{Span}(\{f_\omega, f_\omega^*\}_{\omega \in I})$ con

$\{f_\omega\}_{\omega \in I}$ famiglia ortonormale completa a norma positiva ($\eta^{\mu\nu}f_{\omega;\mu\nu} = 0$),

$\{f_\omega^*\}_{\omega \in I}$ famiglia ortonormale completa a norma negativa ($\eta^{\mu\nu}f_{\omega^*;\mu\nu} = 0$).

QFT su spazi piatti I

Φ scalare non massivo: $\square\Phi = 0$ (equiv. $\eta^{\mu\nu}\Phi_{;\mu\nu} = 0$, essendo $\square := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$).

\mathcal{S} spazio soluzioni dell'equazione KG: $\mathcal{S} = \text{Span}(\{f_\omega, f_\omega^*\}_{\omega \in I})$ con

$\{f_\omega\}_{\omega \in I}$ famiglia ortonormale completa a norma positiva ($\eta^{\mu\nu}f_{\omega;\mu\nu} = 0$),

$\{f_\omega^*\}_{\omega \in I}$ famiglia ortonormale completa a norma negativa ($\eta^{\mu\nu}f_{\omega;\mu\nu}^* = 0$).

Ortonormalità e norma rispetto a prodotto scalare "naturale" (detto "di KG")

$$(f, h) := \int_\Lambda d\Sigma_\mu j^\mu(f, h), \quad j^\mu(f, h) \equiv -i\sqrt{-\eta}\eta^{\mu\nu}(f \overleftrightarrow{\partial}_\nu h^*),$$

$$\overleftrightarrow{\partial}_\nu h^* \equiv f(\partial_\nu h^*) - (\partial_\nu f)h^*; \quad \begin{cases} (f_\omega, f_{\omega'}) = \delta_{\omega, \omega'}, \\ (f_\omega^*, f_{\omega'}^*) = -\delta_{\omega, \omega'}. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Prod. scalare "naturale": indep. da Λ ($\partial_\mu j^\mu = 0$ + Gauss).

In Minkowsky scelta standard (invariante risp. trasf. Lorentz)

$$f_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad \omega \equiv +\sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}},$$

modo (Fourier) a frequenza positiva rispetto crd. temporale usuale (t).

QFT su spazi piatti II

Sviluppo del campo in modi (di Fourier) a frequenza positiva e negativa:

$$\Phi = \sum_{\omega \in I} (a_{\omega} f_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{*}); \quad \begin{cases} [a_{\omega}, a_{\omega'}^{\dagger}] = \delta_{\omega, \omega'}, \\ [a_{\omega}, a_{\omega'}] = 0 = [a_{\omega}^{\dagger}, a_{\omega'}^{\dagger}]; \end{cases} \quad a_{\omega} |0\rangle_M := 0.$$

QFT su spazi piatti II

Sviluppo del campo in modi (di Fourier) a frequenza positiva e negativa:

$$\Phi = \sum_{\omega \in I} (a_{\omega} f_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{*}); \quad \begin{cases} [a_{\omega}, a_{\omega'}^{\dagger}] = \delta_{\omega, \omega'}, \\ [a_{\omega}, a_{\omega'}] = 0 = [a_{\omega}^{\dagger}, a_{\omega'}^{\dagger}]; \end{cases} \quad a_{\omega} |0\rangle_M := 0.$$

Stati ad n particelle, operatore numero N_{ω} e spazio Fock:

$$|n_{\omega}\rangle \equiv \underbrace{a_{\omega}^{\dagger} \cdots a_{\omega}^{\dagger}}_{n\text{-volte}} |0\rangle_M, \quad N_{\omega} := a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} \quad t.c. \quad \langle n_{\omega} | N_{\omega}^{\dagger} | n_{\omega} \rangle = n.$$

QFT su spazi piatti II

Sviluppo del campo in modi (di Fourier) a frequenza positiva e negativa:

$$\Phi = \sum_{\omega \in I} (a_{\omega} f_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{*}); \quad \begin{cases} [a_{\omega}, a_{\omega'}^{\dagger}] = \delta_{\omega, \omega'}, \\ [a_{\omega}, a_{\omega'}] = 0 = [a_{\omega}^{\dagger}, a_{\omega'}^{\dagger}]; \end{cases} \quad a_{\omega} |0\rangle_M := 0.$$

Stati ad n particelle, operatore numero N_{ω} e spazio Fock:

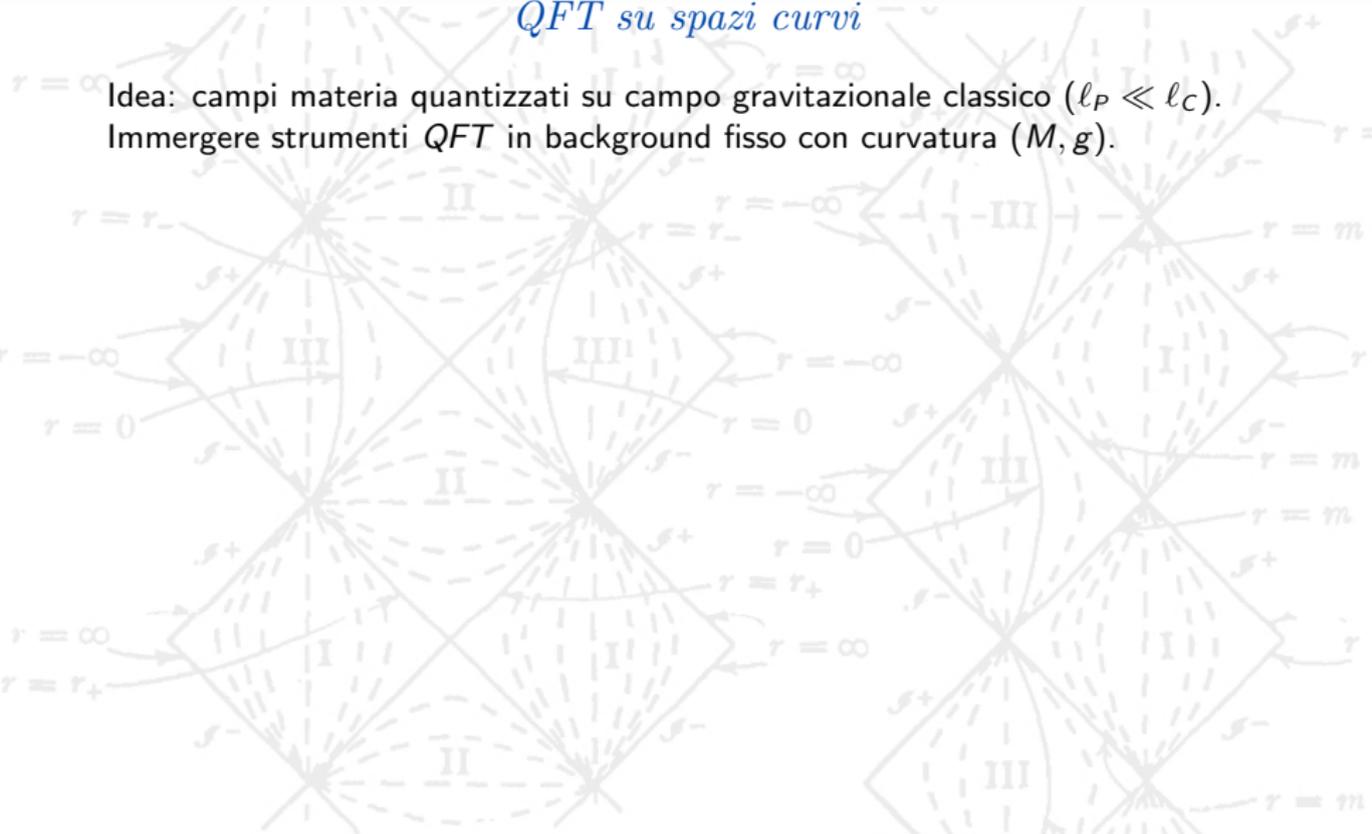
$$|n_{\omega}\rangle \equiv \underbrace{a_{\omega}^{\dagger} \cdots a_{\omega}^{\dagger}}_{n\text{-volte}} |0\rangle_M, \quad N_{\omega} := a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} \quad t.c. \quad \langle n_{\omega} | N_{\omega}^{\dagger} | n_{\omega} \rangle = n.$$

Proprietà fondamentali della teoria su spazi piatti.

- *Lorentz invarianza* (per costruzione, gruppo di simmetria “privilegiato”).
 - ◇ contenuto fisico due osservatori è lo stesso;
 - ◇ esiste definizione invariante di modo a frequenza positiva;
 - ◇ $|0\rangle_M$ è unico.

QFT su spazi curvi

Idea: campi materia quantizzati su campo gravitazionale classico ($l_P \ll l_C$).
 Immergere strumenti QFT in background fisso con curvatura (M, g) .



QFT su spazi curvi

Idea: campi materia quantizzati su campo gravitazionale classico ($l_P \ll l_C$).
 Immergere strumenti QFT in background fisso con curvatura (M, g) .

- *No Lorentz invarianza* \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ vuoto non unico;} \\ \diamond \text{ concetto di particella ambiguo.} \end{array} \right.$

QFT su spazi curvi

Idea: campi materia quantizzati su campo gravitazionale classico ($l_P \ll l_C$).
Immergere strumenti QFT in background fisso con curvatura (M, g) .

- *No Lorentz invarianza* \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ vuoto non unico;} \\ \diamond \text{ concetto di particella ambiguo.} \end{array} \right.$

GR no def. invariante energia positiva (H
genera traslazioni temporali, dipende scelta crd temporale)
 \Rightarrow decomposizione in modi Φ non unica \Rightarrow no def. unica
di operatori creazione/distruzione \Rightarrow vuoto non unico!



QFT su spazi curvi

Idea: campi materia quantizzati su campo gravitazionale classico ($l_P \ll l_C$).
Immergere strumenti QFT in background fisso con curvatura (M, g) .

- *No Lorentz invarianza* \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ vuoto non unico;} \\ \diamond \text{ concetto di particella ambiguo.} \end{array} \right.$

GR no def. invariante energia positiva (H genera traslazioni temporali, dipende scelta crd temporale)
 \Rightarrow decomposizione in modi Φ non unica \Rightarrow no def. unica di operatori creazione/distruzione \Rightarrow vuoto non unico!



$$\begin{cases} a_t |0\rangle_{Al} = 0, \\ a_T |0\rangle_{Em} = 0, \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} a_t |0\rangle_{Em} \neq 0, \\ a_T |0\rangle_{Al} \neq 0. \end{cases}$$

QFT su spazi curvi

Idea: campi materia quantizzati su campo gravitazionale classico ($l_P \ll l_C$).
Immergere strumenti QFT in background fisso con curvatura (M, g) .

- *No Lorentz invarianza* \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ vuoto non unico;} \\ \diamond \text{ concetto di particella ambiguo.} \end{array} \right.$

GR no def. invariante energia positiva (H genera traslazioni temporali, dipende scelta crd temporale)
 \Rightarrow decomposizione in modi Φ non unica \Rightarrow no def. unica di operatori creazione/distruzione \Rightarrow vuoto non unico!

$$\begin{cases} a_t |0\rangle_{Al} = 0, \\ a_T |0\rangle_{Em} = 0, \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} a_t |0\rangle_{Em} \neq 0, \\ a_T |0\rangle_{Al} \neq 0. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

I. Al può vedere $|0\rangle_{Em}$ occupato da particelle con frequenza definita rispetto alla sua crd. temporale (t).



QFT su spazi curvi

Idea: campi materia quantizzati su campo gravitazionale classico ($l_P \ll l_C$).
Immergere strumenti QFT in background fisso con curvatura (M, g) .

- *No Lorentz invarianza* \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ vuoto non unico;} \\ \diamond \text{ concetto di particella ambiguo.} \end{array} \right.$

GR no def. invariante energia positiva (H genera traslazioni temporali, dipende scelta crd temporale)
 \Rightarrow decomposizione in modi Φ non unica \Rightarrow no def. unica di operatori creazione/distruzione \Rightarrow vuoto non unico!

$$\begin{cases} a_t |0\rangle_{Al} = 0, \\ a_T |0\rangle_{Em} = 0, \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} a_t |0\rangle_{Em} \neq 0, \\ a_T |0\rangle_{Al} \neq 0. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

I. Al può vedere $|0\rangle_{Em}$ occupato da particelle con frequenza definita rispetto alla sua crd. temporale (t).

OSSERVAZIONE II. Anche su spazi piatti in presenza di coordinate non inerziali.

Decomposizione in modi

(M, g) soluzione Einstein; osservatori: passato \mathcal{I}^- ("in"), futuro \mathcal{I}^+ ("out").

Per semplicità sia Φ campo scalare non massivo: $g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu\nu} = 0$, sicché

$$\mathcal{I}^- : \{f_\omega, f_\omega^*\}_{\omega \in I}, \quad \{(f_\omega, f_{\omega'}) = \delta_{\omega, \omega'}, \quad (f_\omega^*, f_{\omega'}^*) = -\delta_{\omega, \omega'}\},$$

$$\mathcal{I}^+ : \{p_\omega, p_\omega^*\}_{\omega \in I}, \quad \{(p_\omega, p_{\omega'}) = \delta_{\omega, \omega'}, \quad (p_\omega^*, p_{\omega'}^*) = -\delta_{\omega, \omega'}\},$$

$$(f, h) := \int_{\Lambda} d\Sigma_\mu j^\mu(f, h), \quad j^\mu(f, h) \equiv -i\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(f\overleftrightarrow{\nabla}_\nu h^*) \quad (M = \Sigma \times \mathbb{R}).$$

Decomposizione in modi del campo Φ non unica:

$$\mathcal{I}^- : \Phi = \sum_{\omega} (a_{\omega} f_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^*), \quad a_{\omega}|0\rangle_{in} = 0, \quad N_{\omega}^{in} := a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega},$$

$$\mathcal{I}^+ : \Phi = \sum_{\omega} (b_{\omega} p_{\omega} + b_{\omega}^{\dagger} p_{\omega}^*), \quad b_{\omega}|0\rangle_{out} = 0, \quad N_{\omega}^{out} := b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega}.$$

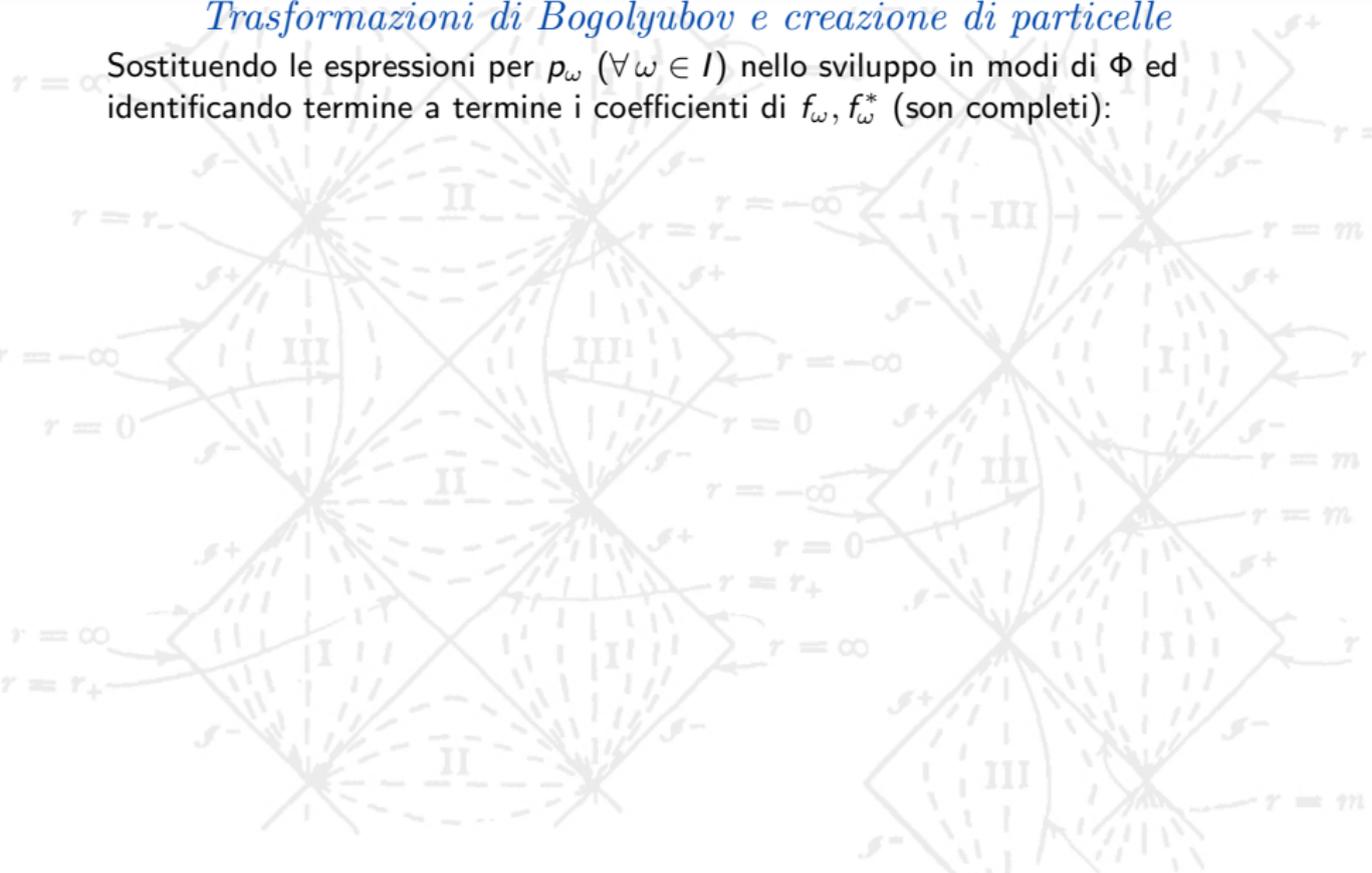
OSSERVAZIONE. Come per Al ed Em: $a_{\omega}|0\rangle_{out} \neq 0$, $b_{\omega}|0\rangle_{in} \neq 0$.

Ma $\{f_{\omega}, f_{\omega}^*\}_{\omega \in I}$ ed $\{p_{\omega}, p_{\omega}^*\}_{\omega \in I}$ sono entrambe complete (spannano \mathcal{S}):

$$\exists \alpha_{\omega\omega'}, \beta_{\omega\omega'} \in \mathbb{C} : \begin{cases} p_{\omega} = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*), \\ f_{\omega} = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'}^* p_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'} p_{\omega'}^*). \end{cases}$$

Trasformazioni di Bogolyubov e creazione di particelle

Sostituendo le espressioni per p_ω ($\forall \omega \in I$) nello sviluppo in modi di Φ ed identificando termine a termine i coefficienti di f_ω, f_ω^* (son completi):



Trasformazioni di Bogolyubov e creazione di particelle

Sostituendo le espressioni per p_ω ($\forall \omega \in I$) nello sviluppo in modi di Φ ed identificando termine a termine i coefficienti di f_ω, f_ω^* (son completi):

$$\begin{cases} a_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'}^* b_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* b_{\omega'}^\dagger), \\ b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^\dagger) \end{cases}$$

Trasformazioni di Bogolyubov ($\alpha_{\omega\omega'}, \beta_{\omega\omega'}$ coeff. Bogolyubov).

Trasformazioni di Bogolyubov e creazione di particelle

Sostituendo le espressioni per p_ω ($\forall \omega \in I$) nello sviluppo in modi di Φ ed identificando termine a termine i coefficienti di f_ω, f_ω^* (son completi):

$$\begin{cases} a_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'}^* b_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* b_{\omega'}^\dagger), \\ b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^\dagger) \end{cases}$$

Trasformazioni di Bogolyubov ($\alpha_{\omega\omega'}, \beta_{\omega\omega'}$ coeff. Bogolyubov).

OSSERVAZIONE. Per i coefficienti di Bogolyubov si ha che

$$\alpha_{\omega\omega'} = (p_\omega, f_{\omega'}), \quad \beta_{\omega\omega'} = -(p_\omega, f_{\omega'}^*), \quad \sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1;$$

Trasformazioni di Bogolyubov e creazione di particelle

Sostituendo le espressioni per p_ω ($\forall \omega \in I$) nello sviluppo in modi di Φ ed identificando termine a termine i coefficienti di f_ω, f_ω^* (son completi):

$$\begin{cases} a_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'}^* b_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* b_{\omega'}^\dagger), \\ b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^\dagger) \end{cases}$$

Trasformazioni di Bogolyubov ($\alpha_{\omega\omega'}, \beta_{\omega\omega'}$ coeff. Bogolyubov).

OSSERVAZIONE. Per i coefficienti di Bogolyubov si ha che

$$\alpha_{\omega\omega'} = (p_\omega, f_{\omega'}), \quad \beta_{\omega\omega'} = -(p_\omega, f_{\omega'}^*), \quad \sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1;$$

$\beta_{\omega\omega'}$ = "ampiezza transizione" tra modi a frequenza negativa su \mathcal{I}^- e modi a frequenza positiva su \mathcal{I}^+ (probabilità che simili stati vengano mischiati).

Trasformazioni di Bogolyubov e creazione di particelle

Sostituendo le espressioni per p_ω ($\forall \omega \in I$) nello sviluppo in modi di Φ ed identificando termine a termine i coefficienti di f_ω, f_ω^* (son completi):

$$\begin{cases} a_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'}^* b_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* b_{\omega'}^\dagger), \\ b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^\dagger) \end{cases}$$

Trasformazioni di Bogolyubov ($\alpha_{\omega\omega'}, \beta_{\omega\omega'}$ coeff. Bogolyubov).

OSSERVAZIONE. Per i coefficienti di Bogolyubov si ha che

$$\alpha_{\omega\omega'} = (p_\omega, f_{\omega'}), \quad \beta_{\omega\omega'} = -(p_\omega, f_{\omega'}^*), \quad \sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1;$$

$\beta_{\omega\omega'}$ = "ampiezza transizione" tra modi a frequenza negativa su \mathcal{I}^- e modi a frequenza positiva su \mathcal{I}^+ (probabilità che simili stati vengano mischiati).

PRODUZIONE PARTICELLE. No particelle nel passato + pittura di Heisenberg (stato $|0\rangle_{in}$ è fissato). Accensione campo gravitazionale descritto da $g_{\mu\nu}$ (a.e. per collasso gravitazionale) \rightarrow stato percepito da osservatore futuro \mathcal{I}^+ :

Trasformazioni di Bogolyubov e creazione di particelle

Sostituendo le espressioni per p_ω ($\forall \omega \in I$) nello sviluppo in modi di Φ ed identificando termine a termine i coefficienti di f_ω, f_ω^* (son completi):

$$\begin{cases} a_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'}^* b_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* b_{\omega'}^\dagger), \\ b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^\dagger) \end{cases}$$

Trasformazioni di Bogolyubov ($\alpha_{\omega\omega'}, \beta_{\omega\omega'}$ coeff. Bogolyubov).

OSSERVAZIONE. Per i coefficienti di Bogolyubov si ha che

$$\alpha_{\omega\omega'} = (p_\omega, f_{\omega'}), \quad \beta_{\omega\omega'} = -(p_\omega, f_{\omega'}^*), \quad \sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1;$$

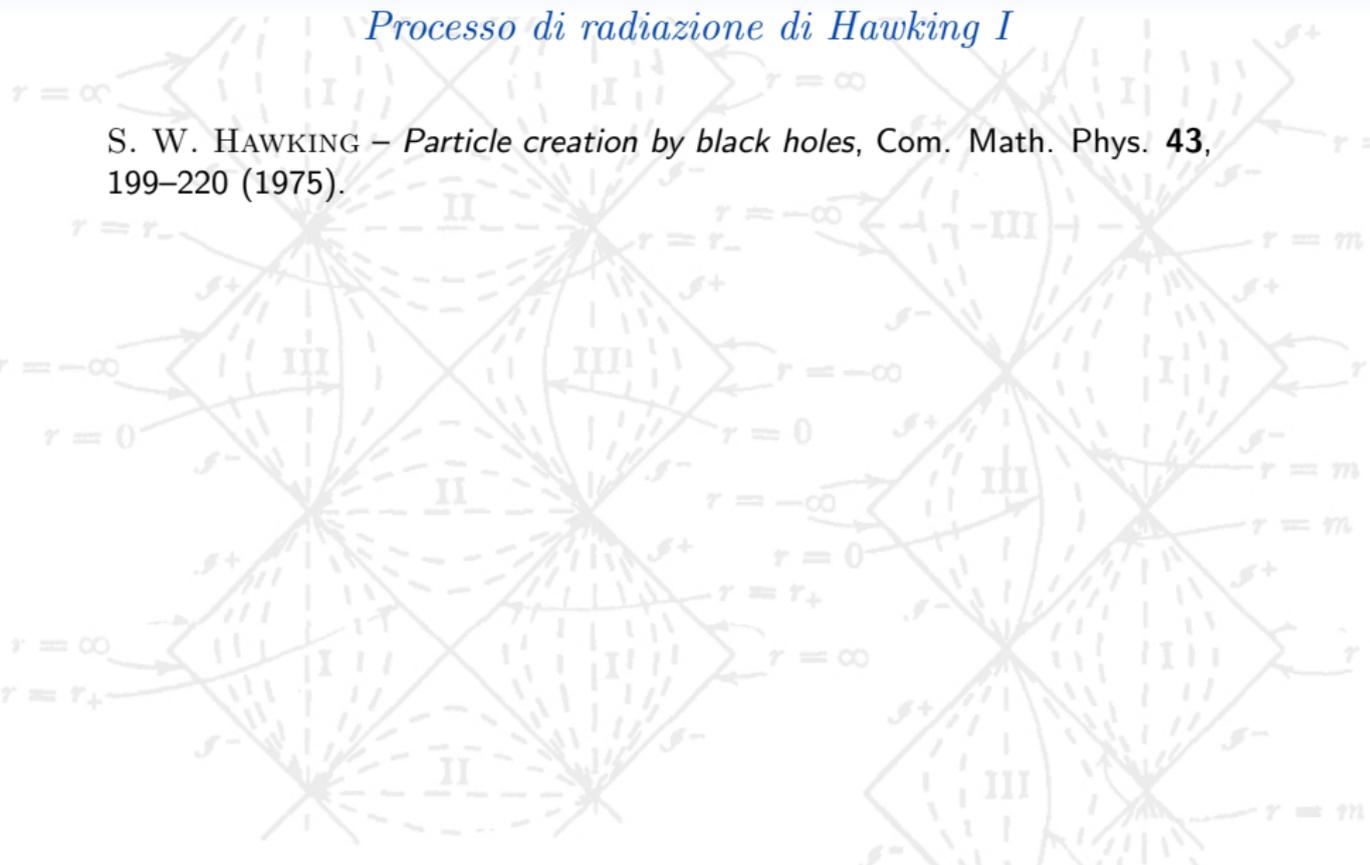
$\beta_{\omega\omega'}$ = "ampiezza transizione" tra modi a frequenza negativa su \mathcal{I}^- e modi a frequenza positiva su \mathcal{I}^+ (probabilità che simili stati vengano mischiati).

PRODUZIONE PARTICELLE. No particelle nel passato + pittura di Heisenberg (stato $|0\rangle_{in}$ è fissato). Accensione campo gravitazionale descritto da $g_{\mu\nu}$ (a.e. per collasso gravitazionale) \rightarrow stato percepito da osservatore futuro \mathcal{I}^+ :

$${}_{in}\langle 0 | N_\omega^{out} | 0 \rangle_{in} = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'}|^2.$$

Processo di radiazione di Hawking I

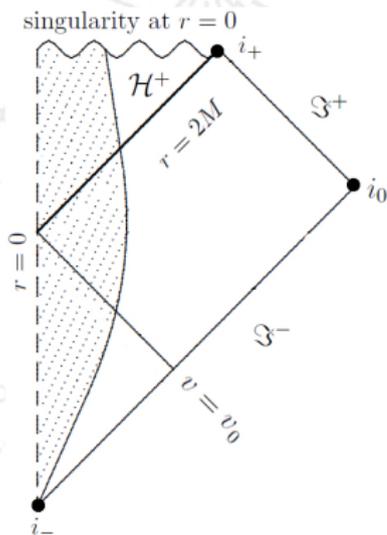
S. W. HAWKING – *Particle creation by black holes*, Com. Math. Phys. **43**, 199–220 (1975).



Processo di radiazione di Hawking I

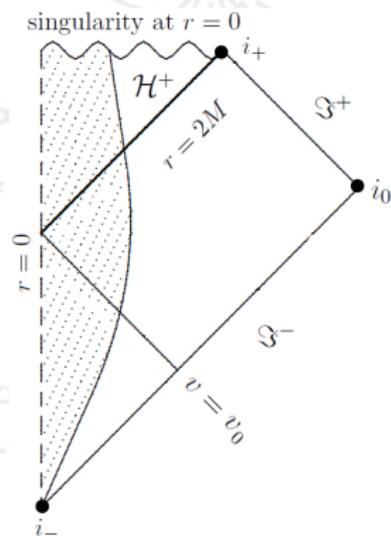
S. W. HAWKING – *Particle creation by black holes*, Com. Math. Phys. **43**, 199–220 (1975). Per semplicità sia (M, g_{Sch}) : *asint. piatto* e *simmetria sferica*.

Osservatori: passato \mathcal{I}^- ("in"), futuro \mathcal{I}^+ ("out").



Processo di radiazione di Hawking I

S. W. HAWKING – *Particle creation by black holes*, Com. Math. Phys. **43**, 199–220 (1975). Per semplicità sia (M, g_{Sch}) : *asint. piatto* e *simmetria sferica*.

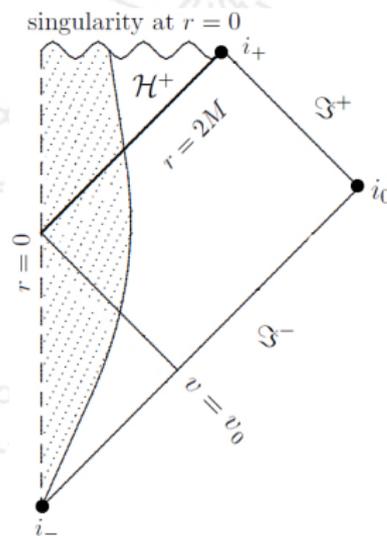


Osservatori: passato \mathcal{I}^- ("in"), futuro \mathcal{I}^+ ("out").

Obiettivo: calcolare modi p_ω (\mathcal{I}^+) ed f_ω (\mathcal{I}^+).

Processo di radiazione di Hawking I

S. W. HAWKING – *Particle creation by black holes*, Com. Math. Phys. **43**, 199–220 (1975). Per semplicità sia (M, g_{Sch}) : *asint. piatto* e *simmetria sferica*.



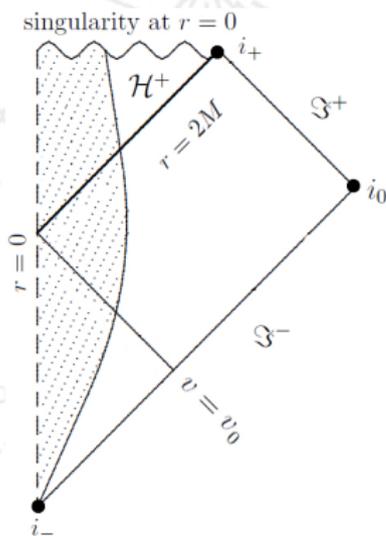
Osservatori: passato \mathcal{I}^- ("in"), futuro \mathcal{I}^+ ("out").

Obiettivo: calcolare modi p_ω (\mathcal{I}^+) ed f_ω (\mathcal{I}^-).

$$g_{Sch}^{\mu\nu} \Phi_{;\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu (g_{Sch}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0.$$

Processo di radiazione di Hawking I

S. W. HAWKING – *Particle creation by black holes*, Com. Math. Phys. **43**, 199–220 (1975). Per semplicità sia (M, g_{Sch}) : *asint. piatto* e *simmetria sferica*.



Osservatori: passato \mathcal{I}^- ("in"), futuro \mathcal{I}^+ ("out").

Obiettivo: calcolare modi p_ω (\mathcal{I}^+) ed f_ω (\mathcal{I}^+).

$$g_{Sch}^{\mu\nu} \Phi_{;\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu (g_{Sch}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0.$$

Simmetria sferica: sviluppare modi Φ_ω (nei quali Φ si decompone) in armoniche sferiche¹⁴

$$\Phi_\omega(r, \theta, \phi; t) = \sum_{\ell, m} \Phi_{\omega \ell m}(r, \theta, \phi; t),$$

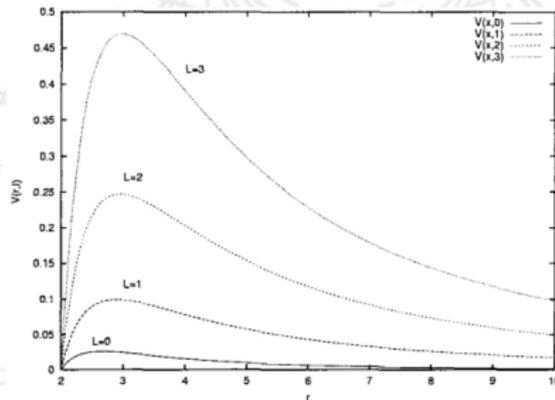
$$\Phi_{\omega \ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi\omega}} \frac{u_{\omega \ell m}(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

¹⁴C. HIRATA – *General relativity and cosmology*, Caltech, Lecture XXIV (2012)

Processo di radiazione di Hawking II

La funzione $u_{\omega\ell m}(r)$ soddisfa l'equazione radiale¹⁵:

$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2 - \mathcal{V}_\ell(r))u_{\omega\ell m} = 0, \quad \mathcal{V}_\ell(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right),$$

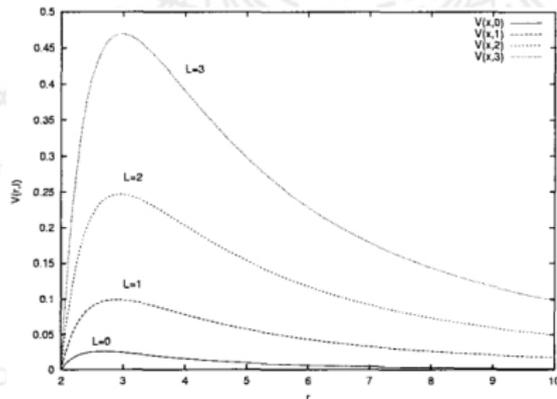


\mathcal{V}_ℓ potenziale effettivo dovuto al campo gravitazionale, r^* coordinata "tortoise".

Processo di radiazione di Hawking II

La funzione $u_{\omega\ell m}(r)$ soddisfa l'equazione radiale¹⁵:

$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2 - \mathcal{V}_\ell(r))u_{\omega\ell m} = 0, \quad \mathcal{V}_\ell(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right),$$



\mathcal{V}_ℓ potenziale effettivo dovuto al campo gravitazionale, r^* coordinata "tortoise". Mediamente potenziale produce barriera $r \sim 3M$; inoltre

$$\mathcal{V}_\ell(r) \xrightarrow{r \rightarrow 2M, r \rightarrow \infty} 0.$$

Vicino \mathcal{H} , i_0 modi soddisfano eq.

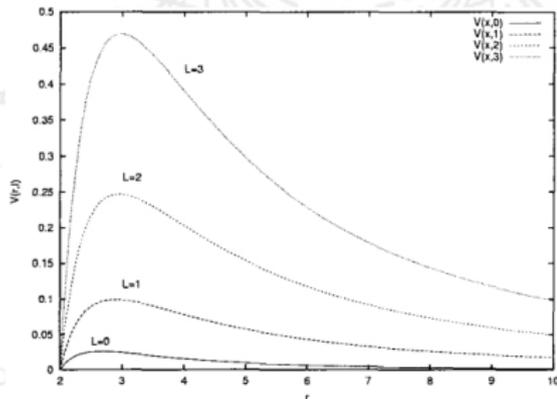
$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2)u_{\omega\ell m}(r) = 0 \text{ per cui}$$

$$\Phi_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) \sim \frac{e^{-i\omega(t \pm r^*)}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Processo di radiazione di Hawking II

La funzione $u_{\omega\ell m}(r)$ soddisfa l'equazione radiale¹⁵:

$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2 - \mathcal{V}_\ell(r))u_{\omega\ell m} = 0, \quad \mathcal{V}_\ell(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right),$$



\mathcal{V}_ℓ potenziale effettivo dovuto al campo gravitazionale, r^* coordinata "tortoise". Mediamente potenziale produce barriera $r \sim 3M$; inoltre

$$\mathcal{V}_\ell(r) \xrightarrow{r \rightarrow 2M, r \rightarrow \infty} 0.$$

Vicino \mathcal{H} , i_0 modi soddisfano eq.

$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2)u_{\omega\ell m}(r) = 0 \text{ per cui}$$

$$\Phi_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) \sim \frac{e^{-i\omega(t \pm r^*)}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

In tali regioni i modi di Φ si comportano come *onde piane* (modulate) entranti ed uscenti nelle *crd. di Eddington–Finkelstein* $u, v \equiv t \mp r^*$.

¹⁵A. FABBRI, J. NAVARRO-SALAS – *Modeling Black Hole Evaporation*, ICP (2012).

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Risultato atteso: (M, g_{Sch}) asint. piatto, regioni \mathcal{I}^\pm sono tipo-Minkowsky;
inoltre u è il parametro affine di \mathcal{I}^- e v è il parametro affine di \mathcal{I}^+ .

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Risultato atteso: (M, g_{Sch}) asint. piatto, regioni \mathcal{I}^\pm sono tipo-Minkowsky;
inoltre u è il parametro affine di \mathcal{I}^- e v è il parametro affine di \mathcal{I}^+ .

OSSERVAZIONE. Solo info. geometria; manca contenuto fisico fase collasso.

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Risultato atteso: (M, g_{Sch}) asint. piatto, regioni \mathcal{I}^\pm sono tipo-Minkowsky; inoltre u è il parametro affine di \mathcal{I}^- e v è il parametro affine di \mathcal{I}^+ .

OSSERVAZIONE. Solo info. geometria; manca contenuto fisico fase collasso.

◇ STRATEGIA: fisso su \mathcal{I}^+ soluzione a frequenza positiva $p_{\omega\ell m}$ e la traccio indietro nel tempo verso \mathcal{I}^- .

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Risultato atteso: (M, g_{Sch}) asint. piatto, regioni \mathcal{I}^\pm sono tipo-Minkowsky; inoltre u è il parametro affine di \mathcal{I}^- e v è il parametro affine di \mathcal{I}^+ .

OSSERVAZIONE. Solo info. geometria; manca contenuto fisico fase collasso.

◇ STRATEGIA: fisso su \mathcal{I}^+ soluzione a frequenza positiva $p_{\omega\ell m}$ e la traccio indietro nel tempo verso \mathcal{I}^- . Difficile risolvere problema in generale; tuttavia è sufficiente lavorare in *prossimità dell'orizzonte degli eventi* \mathcal{H} !

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega\ell m}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Risultato atteso: (M, g_{Sch}) asint. piatto, regioni \mathcal{I}^\pm sono tipo-Minkowsky; inoltre u è il parametro affine di \mathcal{I}^- e v è il parametro affine di \mathcal{I}^+ .

OSSERVAZIONE. Solo info. geometria; manca contenuto fisico fase collasso.

◇ STRATEGIA: fisso su \mathcal{I}^+ soluzione a frequenza positiva $p_{\omega\ell m}$ e la traccio indietro nel tempo verso \mathcal{I}^- . Difficile risolvere problema in generale; tuttavia è sufficiente lavorare in *prossimità dell'orizzonte degli eventi* \mathcal{H} ! Sia

$p_{\omega\ell m} \propto e^{-i\omega u}$ modo uscente a frequenza positiva in prossimità di \mathcal{H} , allora

$$u = v - 2r - 4M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \implies p_{\omega\ell m} \propto e^{-i\omega v} e^{2\omega r} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{i4M\omega}.$$

Processo di radiazione di Hawking III

Ricostruire l'espressione per i modi su \mathcal{I}^+ ed \mathcal{I}^- . Naive (freccia tempo).

$$\mathcal{I}^- : p_{\omega lm}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi),$$

$$\mathcal{I}^+ : f_{\omega lm}(r, \theta, \phi; t) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi).$$

Risultato atteso: (M, g_{Sch}) asint. piatto, regioni \mathcal{I}^\pm sono tipo-Minkowsky; inoltre u è il parametro affine di \mathcal{I}^- e v è il parametro affine di \mathcal{I}^+ .

OSSERVAZIONE. Solo info. geometria; manca contenuto fisico fase collasso.

◇ STRATEGIA: fisso su \mathcal{I}^+ soluzione a frequenza positiva $p_{\omega lm}$ e la traccio indietro nel tempo verso \mathcal{I}^- . Difficile risolvere problema in generale; tuttavia è sufficiente lavorare in *prossimità dell'orizzonte degli eventi* \mathcal{H} ! Sia

$p_{\omega lm} \propto e^{-i\omega u}$ modo uscente a frequenza positiva in prossimità di \mathcal{H} , allora

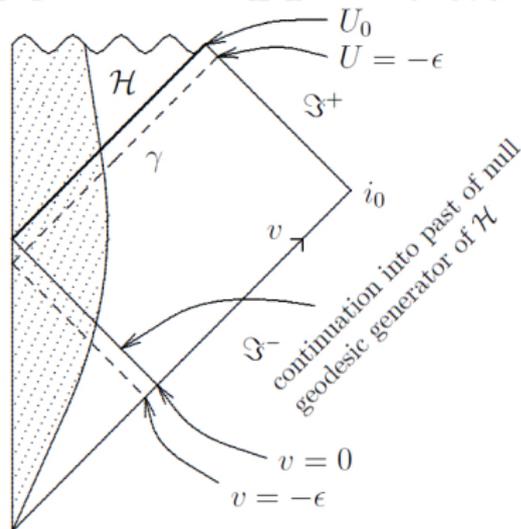
$$u = v - 2r - 4M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \implies p_{\omega lm} \propto e^{-i\omega v} e^{2\omega r} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{i4M\omega}.$$

Per $r \rightarrow 2m^+$, frequenze $p_{\omega lm}$ arbitrariamente alte (è nella natura di \mathcal{H}).

Processo di radiazione di Hawking IV

In prossimità \mathcal{H} è lecito adoperare *approssimazione ottica geometrica*.

- ◇ *Scattering da barriera*. $p_\omega \rightarrow \mathcal{I}^-$ incontra $\mathcal{V}_\ell(r)$: parte riflessa $p_{\omega\ell m}^{(1)} \rightarrow \mathcal{I}^-$ con *stessa* frequenza, parte trasmessa $p_{\omega,\ell m}^{(2)}$ attraversa $2M < r \lesssim 3M$;
- ◇ *campo g.* vicino \mathcal{H} più intenso;
- ◇ *grandi tempi* (c.g. staz. dopo collasso).



Processo di radiazione di Hawking IV

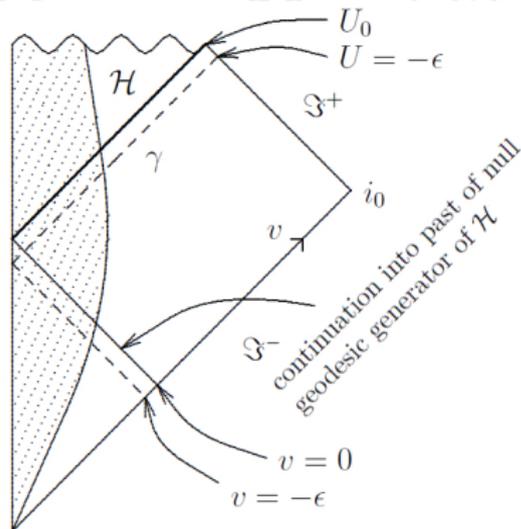
In prossimità \mathcal{H} è lecito adoperare *approssimazione ottica geometrica*.

- ◇ *Scattering da barriera*. $p_\omega \rightarrow \mathcal{I}^-$ incontra $\mathcal{V}_\ell(r)$: parte riflessa $p_{\omega\ell m}^{(1)} \rightarrow \mathcal{I}^-$ con *stessa* frequenza, parte trasmessa $p_{\omega,\ell m}^{(2)}$ attraversa $2M < r \lesssim 3M$;
- ◇ *campo g.* vicino \mathcal{H} più intenso;

- ◇ *grandi tempi* (c.g. staz. dopo collasso).

Carat. geodetica luce γ di $\Phi_{\omega\ell m}$.

Riferimento "ultima" curva luce $\gamma_{\mathcal{H}}$:
parametro affine $U = 0$.



Processo di radiazione di Hawking IV

In prossimità \mathcal{H} è lecito adoperare *approssimazione ottica geometrica*.

- ◇ *Scattering da barriera*. $p_\omega \rightarrow \mathcal{I}^-$ incontra $\mathcal{V}_\ell(r)$: parte riflessa $p_{\omega\ell m}^{(1)} \rightarrow \mathcal{I}^-$ con *stessa* frequenza, parte trasmessa $p_{\omega,\ell m}^{(2)}$ attraversa $2M < r \lesssim 3M$;
- ◇ *campo g.* vicino \mathcal{H} più intenso;

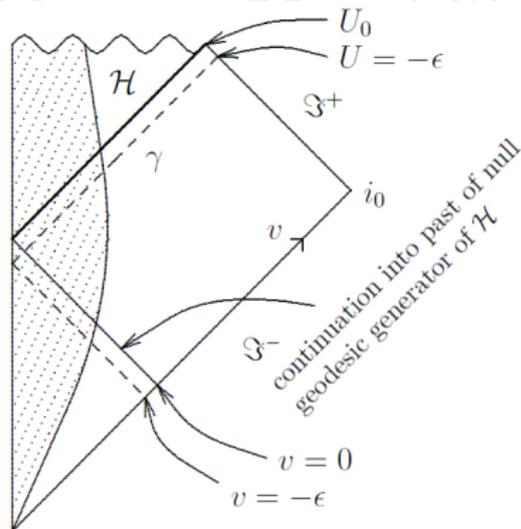
- ◇ *grandi tempi* (c.g. staz. dopo collasso).

Carat. geodetica luce γ di $\Phi_{\omega\ell m}$.

Riferimento "ultima" curva luce $\gamma_{\mathcal{H}}$:
parametro affine $U = 0$. *Deviazione geodetica* di γ da $\gamma_{\mathcal{H}}$ (in regione $U < 0$): sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \ll 1$, allora

$$U = -\varepsilon \xrightarrow{U = -e^{-\kappa u}} u = -\frac{1}{\kappa} \ln \varepsilon.$$

$$p_{\omega\ell m}^{(2)} \propto e^{2\frac{\omega}{\kappa} \ln \varepsilon}, \quad \text{vicino } \mathcal{H}.$$



Processo di radiazione di Hawking V

Tracciare indietro nel tempo γ con riferimento $\gamma_{\mathcal{H}}$. *Trasporto parallelo*¹⁶.



La geodetica $\gamma_{\mathcal{H}}$ incontra \mathcal{I}^- in $v=0$, mentre γ in $v=-\epsilon$.

¹⁶J. TRASHEN – *An introduction to black hole evaporation*, gr-qc/0010055v1 (2000).

Processo di radiazione di Hawking V

Tracciare indietro nel tempo γ con riferimento $\gamma_{\mathcal{H}}$. *Trasporto parallelo*¹⁶.



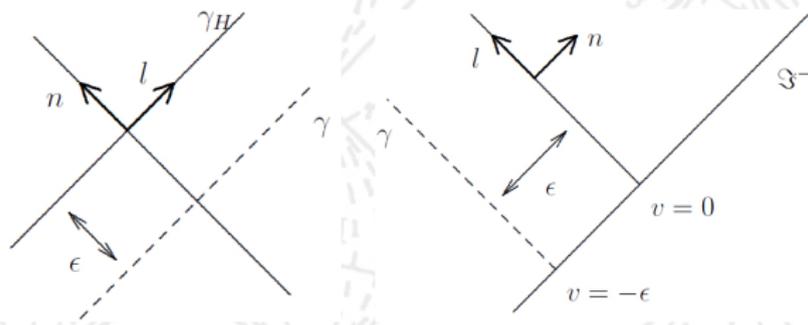
La geodetica $\gamma_{\mathcal{H}}$ incontra \mathcal{I}^- in $v=0$, mentre γ in $v=-\epsilon$. In definitiva:

$$p_{\omega lm}^{(2)} \propto e^{\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)}, \quad v < 0.$$

¹⁶J. TRASHEN – *An introduction to black hole evaporation*, gr-qc/0010055v1 (2000).

Processo di radiazione di Hawking V

Tracciare indietro nel tempo γ con riferimento $\gamma_{\mathcal{H}}$. *Trasporto parallelo*¹⁶.



La geodetica $\gamma_{\mathcal{H}}$ incontra \mathcal{I}^- in $v = 0$, mentre γ in $v = -\epsilon$. In definitiva:

$$p_{\omega\ell m}^{(2)} \propto e^{2\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)}, \quad v < 0.$$

Da diagramma CP: $v < 0$ curve luce $\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{I}^+$, mentre per $v > 0$ curve luce incontrano singolarità. In definitiva, una soluzione a frequenza positiva su \mathcal{I}^+ tracciata indietro nel tempo verso \mathcal{I}^- , ha la forma

$$p_{\omega\ell m}^{(2)} \propto \begin{cases} e^{2\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)} & \text{per } v < 0, \\ 0 & \text{per } v > 0. \end{cases}$$

¹⁶J. TRASHEN – *An introduction to black hole evaporation*, gr-qc/0010055v1 (2000).

Processo di radiazione di Hawking VI

Calcolo coeff. Bogolyubov: $\alpha_{\omega\omega'lm} \equiv \alpha_{\omega l m, \omega' l m}$ (comp. armoniche immutate):

$$\text{su } \mathcal{I}^- : f_{\omega l m}(u, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi),$$

$$\text{su } \mathcal{I}^+ : p_{\omega l m}^{(2)}(v, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega r}} e^{i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)} \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi) & \text{se } v < 0, \\ 0 & \text{se } v > 0. \end{cases}$$

Processo di radiazione di Hawking VI

Calcolo coeff. Bogolyubov: $\alpha_{\omega\omega'lm} \equiv \alpha_{\omega lm, \omega' lm}$ (comp. armoniche immutate):

$$\text{su } \mathcal{I}^- : f_{\omega lm}(u, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\pi\omega r}} \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi),$$

$$\text{su } \mathcal{I}^+ : p_{\omega lm}^{(2)}(v, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega r}} e^{i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)} \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi) & \text{se } v < 0, \\ 0 & \text{se } v > 0. \end{cases}$$

Tenendo presente che \mathcal{I}^- ha topologia $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ ($v \in \mathbb{R}$ parametro affine):

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'lm} &= \left(p_{\omega lm}^{(2)}, f_{\omega' lm} \right)_{\mathcal{I}^-} = -i \iint_{\mathcal{I}^-} \left(p_{\omega lm}^{(2)} \overleftrightarrow{\partial}_v f_{\omega' lm}^* \right) r^2 d\Omega dv \\ &= -\frac{i}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)} \overleftrightarrow{\partial}_v e^{i\omega'v} \right) dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^0 \left(\omega' - \frac{\omega}{\kappa v} \right) e^{i\left[\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v) + \omega'v\right]} dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} (\omega')^{1-\frac{2\omega}{\kappa}} \Gamma\left(1 + \frac{2\omega}{\kappa}\right). \end{aligned}$$

Processo di radiazione di Hawking VII

La particolare forma dei modi $p_{\omega\ell m}^{(2)}$ e $f_{\omega'\ell m}$ fa sì che¹⁷

$$\beta_{\omega\omega'\ell m} = -i\alpha_{\omega,-\omega'\ell m} \longrightarrow i e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'\ell m}, \quad \forall \omega' > 0.$$

¹⁷L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, gr-qc/9707062v1 (1997). 

Processo di radiazione di Hawking VII

La particolare forma dei modi $p_{\omega\ell m}^{(2)}$ e $f_{\omega'\ell m}$ fa sì che¹⁷

$$\beta_{\omega\omega'\ell m} = -i\alpha_{\omega,-\omega'\ell m} \longrightarrow i e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'\ell m}, \quad \forall \omega' > 0.$$

D'altra parte avevamo visto che coef. Bogolyubov soddisfano equazione

$$1 = \sum_{\omega'} \left(|\alpha_{\omega\omega'\ell m}|^2 - |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 \right) = \sum_{\omega'} \left(e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1 \right) |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2,$$

¹⁷L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, gr-qc/9707062v1 (1997). 

Processo di radiazione di Hawking VII

La particolare forma dei modi $p_{\omega\ell m}^{(2)}$ e $f_{\omega'\ell m}$ fa sì che¹⁷

$$\beta_{\omega\omega'\ell m} = -i\alpha_{\omega,-\omega'\ell m} \longrightarrow i e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'\ell m}, \quad \forall \omega' > 0.$$

D'altra parte avevamo visto che coef. Bogolyubov soddisfano equazione

$$1 = \sum_{\omega'} \left(|\alpha_{\omega\omega'\ell m}|^2 - |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 \right) = \sum_{\omega'} \left(e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1 \right) |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2,$$

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \implies \text{in} \langle 0 | N_{\omega\ell m}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}.$$

¹⁷L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, gr-qc/9707062v1 (1997). 

Processo di radiazione di Hawking VII

La particolare forma dei modi $p_{\omega\ell m}^{(2)}$ e $f_{\omega'\ell m}$ fa sì che¹⁷

$$\beta_{\omega\omega'\ell m} = -i\alpha_{\omega,-\omega'\ell m} \longrightarrow i e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'\ell m}, \quad \forall \omega' > 0.$$

D'altra parte avevamo visto che coef. Bogolyubov soddisfano equazione

$$1 = \sum_{\omega'} \left(|\alpha_{\omega\omega'\ell m}|^2 - |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 \right) = \sum_{\omega'} \left(e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1 \right) |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2,$$

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \implies in \langle 0 | N_{\omega\ell m}^{out} | 0 \rangle_{in} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}.$$

OSSERVAZIONE I. Stesso risultato invertendo trasformazione Bogolyubov.

¹⁷L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, gr-qc/9707062v1 (1997). 

Processo di radiazione di Hawking VII

La particolare forma dei modi $p_{\omega\ell m}^{(2)}$ e $f_{\omega'\ell m}$ fa sì che¹⁷

$$\beta_{\omega\omega'\ell m} = -i\alpha_{\omega,-\omega'\ell m} \longrightarrow i e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'\ell m}, \quad \forall \omega' > 0.$$

D'altra parte avevamo visto che coef. Bogolyubov soddisfano equazione

$$1 = \sum_{\omega'} \left(|\alpha_{\omega\omega'\ell m}|^2 - |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 \right) = \sum_{\omega'} \left(e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1 \right) |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2,$$

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \implies \text{in} \langle 0 | N_{\omega\ell m}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}.$$

OSSERVAZIONE I. Stesso risultato invertendo trasformazione Bogolyubov.

OSSERVAZIONE II. $|\beta_{\omega\omega'\ell m}| \sim (\omega')^{-1/2}$, sicché

$$\int_0^{\infty} |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 d\omega' \xrightarrow{\omega' \gg 1} \infty.$$

Numero infinito particelle create \equiv *flusso stazionario* di radiazione all'infinito.

¹⁷L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, gr-qc/9707062v1 (1997). 

Processo di radiazione di Hawking VII

La particolare forma dei modi $p_{\omega\ell m}^{(2)}$ e $f_{\omega'\ell m}$ fa sì che¹⁷

$$\beta_{\omega\omega'\ell m} = -i\alpha_{\omega,-\omega'\ell m} \longrightarrow i e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'\ell m}, \quad \forall \omega' > 0.$$

D'altra parte avevamo visto che coef. Bogolyubov soddisfano equazione

$$1 = \sum_{\omega'} \left(|\alpha_{\omega\omega'\ell m}|^2 - |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 \right) = \sum_{\omega'} \left(e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1 \right) |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2,$$

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \implies \text{in} \langle 0 | N_{\omega\ell m}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}.$$

OSSERVAZIONE I. Stesso risultato invertendo trasformazione Bogolyubov.

OSSERVAZIONE II. $|\beta_{\omega\omega'\ell m}| \sim (\omega')^{-1/2}$, sicché

$$\int_0^{\infty} |\beta_{\omega\omega'\ell m}|^2 d\omega' \xrightarrow{\omega' \gg 1} \infty.$$

Numero infinito particelle create \equiv *flusso stazionario* di radiazione all'infinito.

Pertanto buco nero irradia termicamente: *spettro di Planck* a temperatura

$$T_H = \frac{\hbar \kappa}{k_b 2\pi} \xrightarrow{\kappa = \frac{c^3}{4GM}} T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_b GM}.$$

¹⁷L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, gr-qc/9707062v1 (1997). 

Termodinamica dei buchi neri

Risultato di Hawking rende “fisica” analogia meccanica dei buchi neri e termodinamica. Pertanto, nota l'espressione per T_{bh} , troviamo

$$T_{bh} dS_{bh} = \frac{c^3 \kappa}{8\pi G} dA_{\mathcal{H}} \xrightarrow{T_H = \frac{\hbar \kappa}{k_b 2\pi}} dS_{bh} = \frac{k_b c^3}{4G\hbar} dA_{\mathcal{H}} = \frac{k_b}{4\ell_P^2} dA_{\mathcal{H}},$$

Termodinamica dei buchi neri

Risultato di Hawking rende “fisica” analogia meccanica dei buchi neri e termodinamica. Pertanto, nota l'espressione per T_{bh} , troviamo

$$T_{bh} dS_{bh} = \frac{c^3 \kappa}{8\pi G} dA_{\mathcal{H}} \xrightarrow{T_H = \frac{\hbar \kappa}{k_b 2\pi}} dS_{bh} = \frac{k_b c^3}{4G\hbar} dA_{\mathcal{H}} = \frac{k_b}{4\ell_P^2} dA_{\mathcal{H}},$$

dalla quale segue l'espressione per l'entropia di Bekenstein–Hawking

$$S_{BH} = \frac{k_b A_{\mathcal{H}}}{4 \ell_P^2}.$$

Termodinamica dei buchi neri

Risultato di Hawking rende “fisica” analogia meccanica dei buchi neri e termodinamica. Pertanto, nota l'espressione per T_{bh} , troviamo

$$T_{bh} dS_{bh} = \frac{c^3 \kappa}{8\pi G} dA_{\mathcal{H}} \xrightarrow{T_H = \frac{\hbar \kappa}{k_b 2\pi}} dS_{bh} = \frac{k_b c^3}{4G\hbar} dA_{\mathcal{H}} = \frac{k_b}{4\ell_P^2} dA_{\mathcal{H}},$$

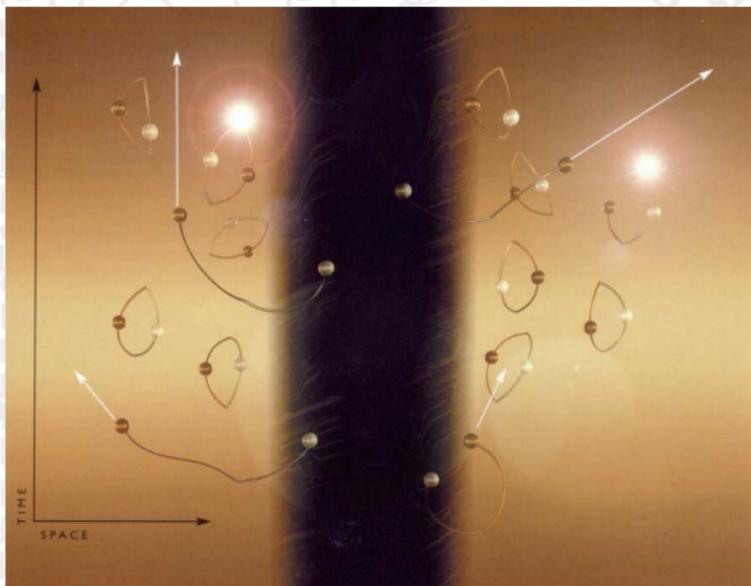
dalla quale segue l'espressione per l'entropia di Bekenstein–Hawking

$$S_{BH} = \frac{k_b A_{\mathcal{H}}}{4 \ell_P^2}.$$

- old $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ temperatura classica bh: risolve problema } T_{BH} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0; \\ \diamond \text{ GSL: ripristina coerenza } \delta(S_{\text{ext}} + S_{BH}) \geq 0 \text{ (ora semi-classica);} \\ \diamond \text{ teorema area: viola secondo principio meccanica bh.} \end{array} \right.$

- new $\left\{ \begin{array}{l} (?) \text{ fenomeno fisico alla base della radiazione Hawking;} \\ (?) \text{ origine microscopica dell'entropia } S_{BH}; \\ (!) \text{ destino singolarità (evaporazione } \Rightarrow r_S \sim \ell_P); \\ (!) \text{ perdita informazione: stati puri evolvono in stati puri;} \\ \text{ qui } |vuoto\rangle \rightarrow |termico\rangle, \text{ flagrante violazione unitarietà MQ!} \end{array} \right.$

Origine fisica della radiazione di Hawking I



Violazione teorema area \Rightarrow cond. energetica debole $v^\mu v^\nu T_{\mu\nu} \geq 0$ violata.
 Probabile flusso di materia ad energia negativa. **Fluttuazione vuoto** \Rightarrow
 particella ad energia negativa cade in singolarità e partner viene emesso.

Origine fisica della radiazione di Hawking II

Plausibilità scenario (particella con $E < 0$ può vivere oltre orizzonte?):

- QFT: regioni $E < 0$ proibite ($E = 0$ stato minima energia);
 coppie virtuali con energia $\pm E$ hanno vita media $\tau \sim \hbar/E$;

Origine fisica della radiazione di Hawking II

Plausibilità scenario (particella con $E < 0$ può vivere oltre orizzonte?):

- QFT: regioni $E < 0$ proibite ($E = 0$ stato minima energia); coppie virtuali con energia $\pm E$ hanno vita media $\tau \sim \hbar/E$;
- GR: energia (e suo segno) dipendono dall'osservatore.

Origine fisica della radiazione di Hawking II

Plausibilità scenario (particella con $E < 0$ può vivere oltre orizzonte?):

- *QFT*: regioni $E < 0$ proibite ($E = 0$ stato minima energia); coppie virtuali con energia $\pm E$ hanno vita media $\tau \sim \hbar/E$;
- *GR*: energia (e suo segno) dipendono dall'osservatore.

Per $r > r_S$ crd temporale t usuale (tempo proprio misurato da osservatore all'infinito), per $r < r_S$ crd spaziale \leftrightarrow crd. temporale;

Origine fisica della radiazione di Hawking II

Plausibilità scenario (particella con $E < 0$ può vivere oltre orizzonte?):

- *QFT*: regioni $E < 0$ proibite ($E = 0$ stato minima energia); coppie virtuali con energia $\pm E$ hanno vita media $\tau \sim \hbar/E$;
- *GR*: energia (e suo segno) dipendono dall'osservatore.

Per $r > r_S$ crd temporale t usuale (tempo proprio misurato da osservatore all'infinito), per $r < r_S$ crd spaziale \leftrightarrow crd. temporale; particella virtuale entrante in \mathcal{H} con $E < 0$ rispetto ad un osservatore all'infinito può avere $E > 0$ relativamente ad un osservatore all'interno dell'orizzonte¹⁸.

¹⁸S. CARLIP – *Black hole thermodynamics and statistical mechanics*, gr-qc/0807.4520v1 (2008)

Origine fisica della radiazione di Hawking II

Plausibilità scenario (particella con $E < 0$ può vivere oltre orizzonte?):

- *QFT*: regioni $E < 0$ proibite ($E = 0$ stato minima energia); coppie virtuali con energia $\pm E$ hanno vita media $\tau \sim \hbar/E$;
- *GR*: energia (e suo segno) dipendono dall'osservatore.

Per $r > r_S$ crd temporale t usuale (tempo proprio misurato da osservatore all'infinito), per $r < r_S$ crd spaziale \leftrightarrow crd. temporale; particella virtuale entrante in \mathcal{H} con $E < 0$ rispetto ad un osservatore all'infinito può avere $E > 0$ relativamente ad un osservatore all'interno dell'orizzonte¹⁸.

"It should be emphasized that this picture of the mechanism responsible for thermal emission should not be taken too literally.

S. W. HAWKING – *Particle creation by black holes, Com. Math. Phys.*, **43** (1975)."

¹⁸S. CARLIP – *Black hole thermodynamics and statistical mechanics*, gr-qc/0807.4520v1 (2008)

Tunneling attraverso l'orizzonte

M.K.PARIKH, F.WILCZEK – *Hawking radiation as tunneling*, (2001).

M.K.PARIKH – *A secret tunnel Through the Horizon*, 0405160 (2004).

Dov'è la barriera? In *crd. Painlevé–Gullstrand*, elemento linea Schwarzschild:

$$ds_{Sch}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega, \quad \dot{r} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

Tunneling attraverso l'orizzonte

M.K.PARIKH, F.WILCZEK – *Hawking radiation as tunneling*, (2001).

M.K.PARIKH – *A secret tunnel Through the Horizon*, 0405160 (2004).

Dov'è la barriera? In *crd. Painlevé–Gullstrand*, elemento linea Schwarzschild:

$$ds_{Sch}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega, \quad \dot{r} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

Emissione shell di energia $\omega \ll M \rightarrow r_S = 2M \rightarrow 2(M - \omega)$; particella virtuale con $E < 0$ è in regione proibita tra $r_i = 2M$ ed $r_f = 2(M - \omega)$ (l'emissione crea la barriera!).

Tunneling attraverso l'orizzonte

M.K.PARIKH, F.WILCZEK – *Hawking radiation as tunneling*, (2001).

M.K.PARIKH – *A secret tunnel Through the Horizon*, 0405160 (2004).

Dov'è la barriera? In *crd. Painlevé–Gullstrand*, elemento linea Schwarzschild:

$$ds_{Sch}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega, \quad \dot{r} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

Emissione shell di energia $\omega \ll M \rightarrow r_S = 2M \rightarrow 2(M - \omega)$; particella virtuale con $E < 0$ è in regione proibita tra $r_i = 2M$ ed $r_f = 2(M - \omega)$ (l'emissione crea la barriera!). In appr. WKB (ottica geometrica), tasso di tunneling:

$$\Gamma \propto e^{-2\Im\{S\}} \sim e^{-\beta E}, \quad \Im\{S\} = \Im \int_{r_i}^{r_f} p_r dr = \int_{r_i}^{r_f} \int_0^{p_r} dp'_r dr.$$

Tunneling attraverso l'orizzonte

M.K.PARIKH, F.WILCZEK – *Hawking radiation as tunneling*, (2001).

M.K.PARIKH – *A secret tunnel Through the Horizon*, 0405160 (2004).

Dov'è la barriera? In *crd. Painlevé–Gullstrand*, elemento linea Schwarzschild:

$$ds_{Sch}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega, \quad \dot{r} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

Emissione shell di energia $\omega \ll M \rightarrow r_S = 2M \rightarrow 2(M - \omega)$; particella virtuale con $E < 0$ è in regione proibita tra $r_i = 2M$ ed $r_f = 2(M - \omega)$ (l'emissione crea la barriera!). In appr. WKB (ottica geometrica), tasso di tunneling:

$$\Gamma \propto e^{-2\Im\{S\}} \sim e^{-\beta E}, \quad \Im\{S\} = \Im \int_{r_i}^{r_f} p_r dr = \int_{r_i}^{r_f} \int_0^{p_r} dp'_r dr.$$

Ma $\partial_p H = \dot{r}$ (dove H gen. tempo Painlevé), sicché

$$\Im\{S\} = \Im \int_M^{M-\omega} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{\dot{r}} dH = 4\pi \int_0^\omega d\omega' (M - \omega').$$

$$\Gamma \propto e^{-8\pi M\omega(1 - \frac{\omega}{2M})} \sim e^{-\beta\omega} \Leftrightarrow \beta_H = 8\pi M.$$

Altre derivazioni dell'evaporazione di Hawking e di S_{BH}

- ◇ **Radiazione Unruh** in spazi piatti per crd. non inerziali $\rightarrow T_H$;
 - W. G. UNRUH – *Notes on black hole evaporation*, *Phy.Rev.* **D14** (1976).
- ◇ calcolo $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ in background di buco nero $\rightarrow T_H$;
 - L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, (1997).
- ◇ **entanglement entropy** (tracciando all'interno di \mathcal{H}) $\rightarrow S_{BH}$;
 - M. SREDNICKI – *Entropy and Area*, arXiv:9303048 (1993);
 - S. DAS et al. – *Black hole entropy from entanglement: A review* (2008).

Altre derivazioni dell'evaporazione di Hawking e di S_{BH}

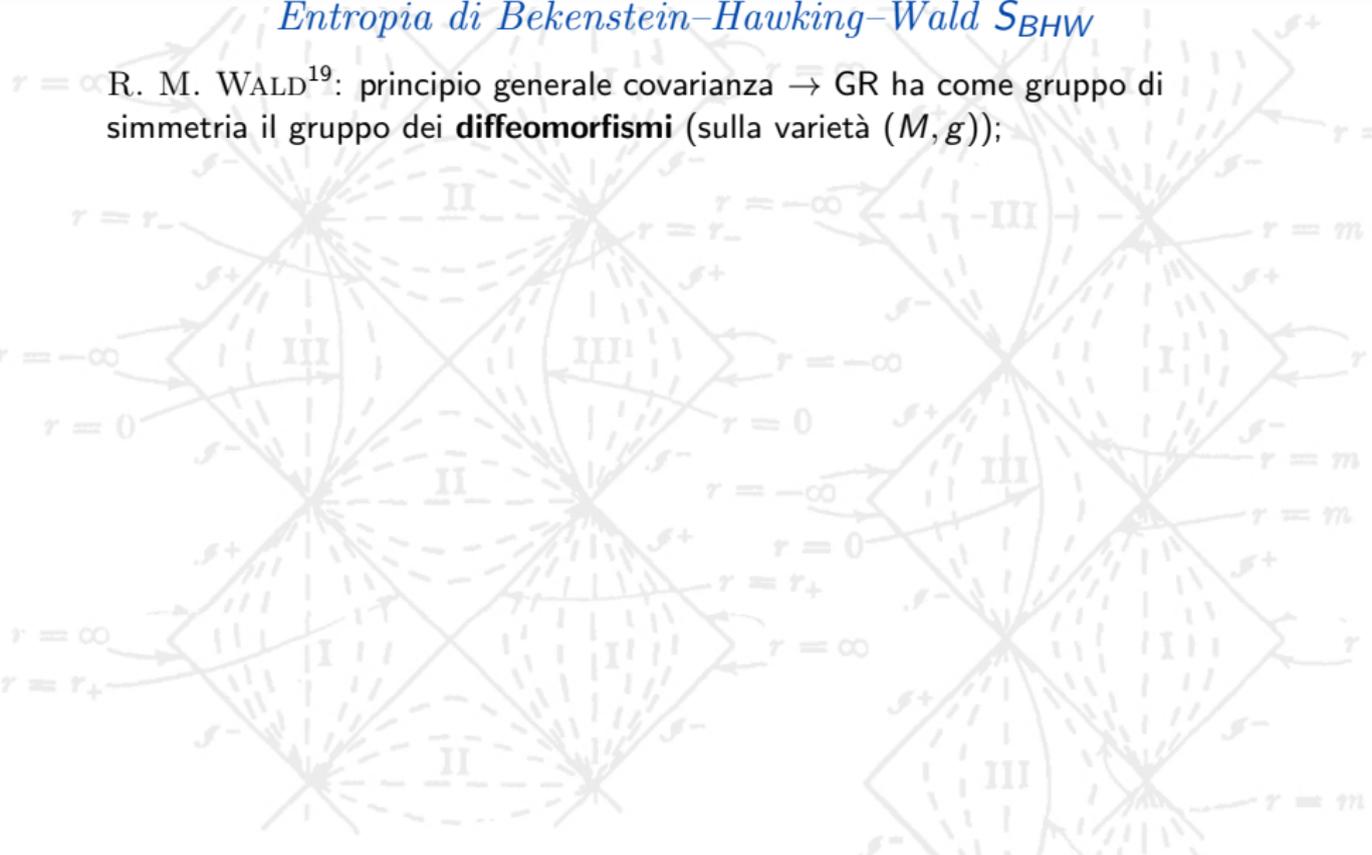
- ◇ *Radiazione Unruh* in spazi piatti per crd. non inerziali $\rightarrow T_H$;
 - W. G. UNRUH – *Notes on black hole evaporation*, *Phy.Rev.* **D14** (1976).
- ◇ calcolo $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ in background di buco nero $\rightarrow T_H$;
 - L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, (1997).
- ◇ *entanglement entropy* (tracciando all'interno di \mathcal{H}) $\rightarrow S_{BH}$;
 - M. SREDNICKI – *Entropy and Area*, arXiv:9303048 (1993);
 - S. DAS et al. – *Black hole entropy from entanglement: A review* (2008).
- ◇ stati (termici) *KMS* e funzioni Green-periodiche $\rightarrow T_{BH}$;

Altre derivazioni dell'evaporazione di Hawking e di S_{BH}

- ◇ **Radiazione Unruh** in spazi piatti per crd. non inerziali $\rightarrow T_H$;
 - W. G. UNRUH – *Notes on black hole evaporation*, *Phy.Rev.* **D14** (1976).
- ◇ calcolo $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ in background di buco nero $\rightarrow T_H$;
 - L. H. FORD – *Quantum field theory in curved spacetime*, (1997).
- ◇ **entanglement entropy** (tracciando all'interno di \mathcal{H}) $\rightarrow S_{BH}$;
 - M. SREDNICKI – *Entropy and Area*, arXiv:9303048 (1993);
 - S. DAS et al. – *Black hole entropy from entanglement: A review* (2008).
- ◇ stati (termici) **KMS** e funzioni Green-periodiche $\rightarrow T_{BH}$;
- rotazione di Wick su **path integral gravitazionale** (appr. istantoni): questo approccio ha condotto in seguito alla costruzione della *Gravità quantistica Euclidea* ed a comprendere che S_{BH} ha **origine topologica**, essendo legata alla costante di Eulero (invariante topologico) della varietà.
 - S. F. ROSS – *Black hole thermodynamics*, arXiv:0502195 (2005);
 - G. W. GIBBONS, S. W. HAWKING – *Euclidean quantum gravity* (1993);
 - S.W. Hawking, G. T. HOROWITZ – *The gravitational hamiltonian, action, entropy and surface terms*, arXiv:9501014 (1995);
 - S. Liberati, F. POLLIFRONE – *Entropy and topology for manifolds with boundaries*, Elsevier 197–200 (1997).

Entropia di Bekenstein–Hawking–Wald S_{BHW}

R. M. WALD¹⁹: principio generale covarianza → GR ha come gruppo di simmetria il gruppo dei **diffeomorfismi** (sulla varietà (M, g));



¹⁹R. M. WALD – *Black hole entropy is Noether Charge*, Phys. Rev. **D48** (1993);

Entropia di Bekenstein–Hawking–Wald S_{BHW}

R. M. WALD¹⁹: principio generale covarianza → GR ha come gruppo di simmetria il gruppo dei **diffeomorfismi** (sulla varietà (M, g)); \mathcal{L} diff-invariante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\alpha,\beta}, R_{\mu\nu\alpha,\beta;\gamma}, \dots; \Psi, \Psi_{;\mu}, \dots)$$

dove Ψ insieme campi materia della teoria (no indici). Sia ξ generatore (campo vettoriale) e \mathcal{J}_ξ la corrente di Noether ad esso associata. Se equazioni moto sono soddisfatte, \mathcal{J} definisce una carica $Q[\xi]$ t.c. $\mathcal{J}_\xi = dQ[\xi]$. Se la varietà contiene un buco nero stazionario con orizzonte (Killing biforcuto) \mathcal{H} , allora

¹⁹R. M. WALD – *Black hole entropy is Noether Charge*, Phys. Rev. **D48** (1993);

Entropia di Bekenstein–Hawking–Wald S_{BHW}

R. M. WALD¹⁹: principio generale covarianza → GR ha come gruppo di simmetria il gruppo dei **diffeomorfismi** (sulla varietà (M, g)); L diff-invariante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\alpha,\beta}, R_{\mu\nu\alpha,\beta;\gamma}, \dots; \Psi, \Psi_{;\mu}, \dots)$$

dove Ψ insieme campi materia della teoria (no indici). Sia ξ generatore (campo vettoriale) e \mathcal{J}_ξ la corrente di Noether ad esso associata. Se equazioni moto sono soddisfatte, \mathcal{J} definisce una carica $Q[\xi]$ t.c. $\mathcal{J}_\xi = dQ[\xi]$. Se la varietà contiene un buco nero stazionario con orizzonte (Killing biforcuto) \mathcal{H} , allora

$$\delta\mathcal{E}_{\mathcal{H}} = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S_{bh} + \text{lavoro}, \quad S_{bh} \equiv 2\pi \int_C Q[\xi] = -2\pi \int_C \frac{\delta L}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} n_{\mu\nu} n_{\alpha\beta},$$

¹⁹R. M. WALD – *Black hole entropy is Noether Charge*, Phys. Rev. **D48** (1993);

Entropia di Bekenstein–Hawking–Wald S_{BHW}

R. M. WALD¹⁹: principio generale covarianza → GR ha come gruppo di simmetria il gruppo dei **diffeomorfismi** (sulla varietà (M, g)); \mathcal{L} diff-invariante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\alpha\beta}, R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma}, \dots; \Psi, \Psi_{;\mu}, \dots)$$

dove Ψ insieme campi materia della teoria (no indici). Sia ξ generatore (campo vettoriale) e \mathcal{J}_ξ la corrente di Noether ad esso associata. Se equazioni moto sono soddisfatte, \mathcal{J} definisce una carica $Q[\xi]$ t.c. $\mathcal{J}_\xi = dQ[\xi]$. Se la varietà contiene un buco nero stazionario con orizzonte (Killing biforcuto) \mathcal{H} , allora

$$\delta\mathcal{E}_{\mathcal{H}} = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S_{bh} + \text{lavoro}, \quad S_{bh} \equiv 2\pi \int_{\mathcal{C}} Q[\xi] = -2\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} n_{\mu\nu} n_{\alpha\beta},$$

dove $n_{\mu\nu}$ è normale a \mathcal{C} (sup. biforcazione). Per GR nel vuoto $n^{\mu\nu} n_{\mu\nu} = -2$:

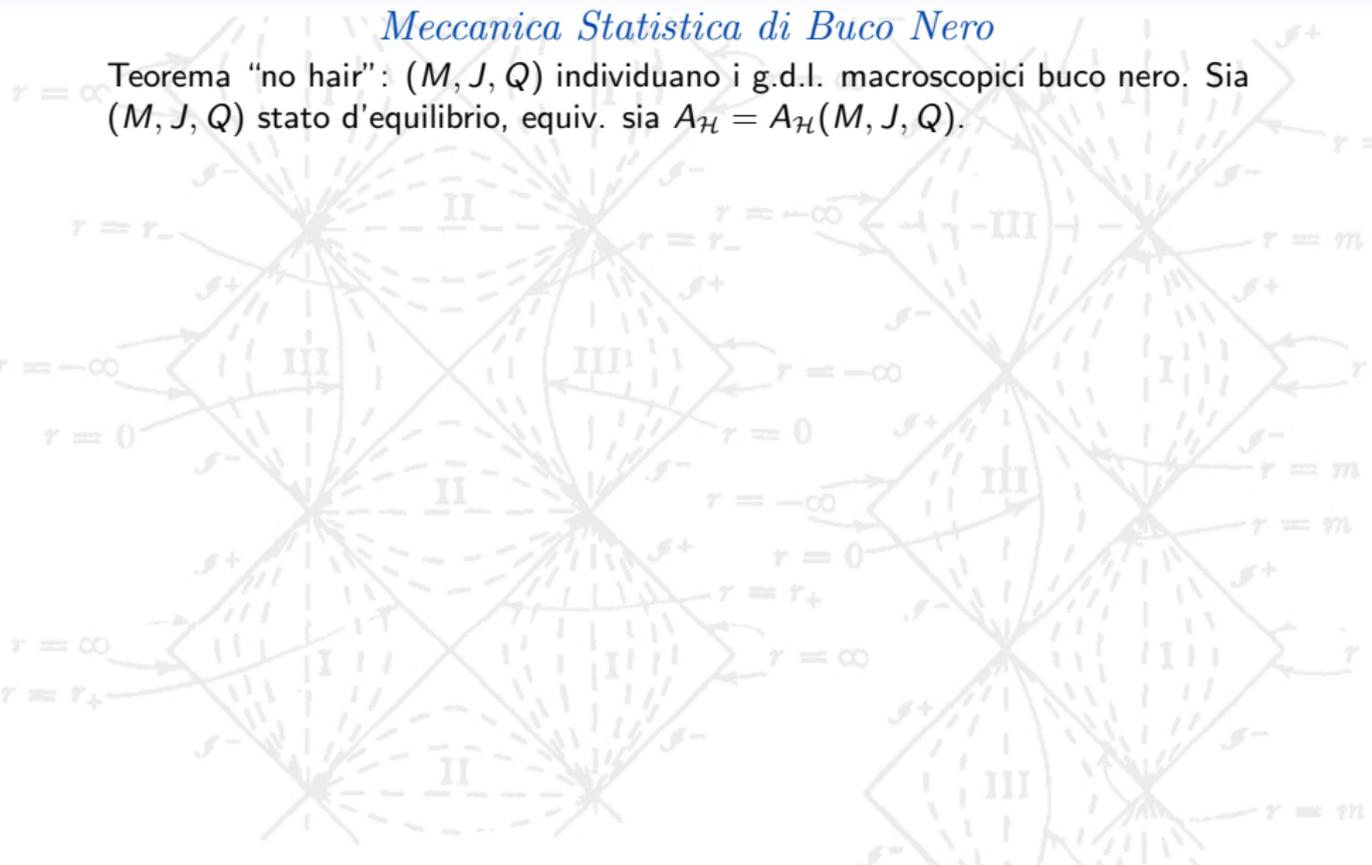
$$\mathcal{L}_{GR} = \frac{1}{16\pi} R = \frac{1}{16\pi} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} = \frac{1}{16\pi} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta},$$

$$S_{bh} = -2\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{16\pi} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} n_{\mu\nu} n_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8} \int_{\mathcal{C}} n^{\mu\nu} n_{\mu\nu} = \frac{1}{4} A.$$

¹⁹R. M. WALD – *Black hole entropy is Noether Charge*, Phys. Rev. **D48** (1993);

Meccanica Statistica di Buco Nero

Teorema "no hair": (M, J, Q) individuano i g.d.l. macroscopici buco nero. Sia (M, J, Q) stato d'equilibrio, equiv. sia $A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{H}}(M, J, Q)$.



Meccanica Statistica di Buco Nero

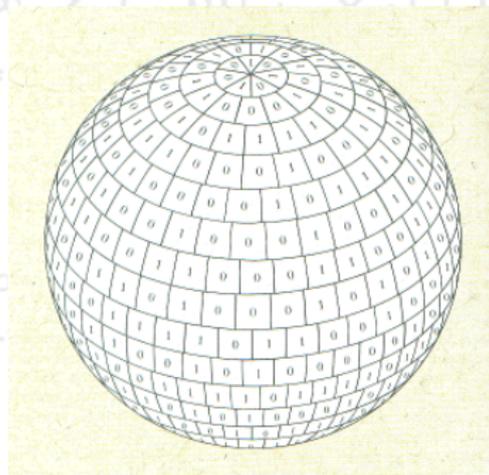
Teorema "no hair": (M, J, Q) individuano i g.d.l. macroscopici buco nero. Sia (M, J, Q) stato d'equilibrio, equiv. sia $A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{H}}(M, J, Q)$. Quali sono le configurazioni microscopiche indipendenti associate ad $A_{\mathcal{H}}$?

$$S_{\odot} \sim Nk_b \sim 10^{57} \xrightarrow{\text{collasso}} S_{BHW} \sim 10^{77} \xrightarrow{\# \text{ microstati}} \mathcal{N}(A_{\mathcal{H}}) \sim e^{10^{77}}$$

Meccanica Statistica di Buco Nero

Teorema "no hair": (M, J, Q) individuano i g.d.l. macroscopici buco nero. Sia (M, J, Q) stato d'equilibrio, equiv. sia $A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{H}}(M, J, Q)$. Quali sono le configurazioni microscopiche indipendenti associate ad $A_{\mathcal{H}}$?

$$S_{\odot} \sim Nk_b \sim 10^{57} \xrightarrow{\text{collasso}} S_{BHW} \sim 10^{77} \xrightarrow{\# \text{ microstati}} \mathcal{N}(A_{\mathcal{H}}) \sim e^{10^{77}}.$$



ESPERIMENTO CONCETTUALE:

invio un bit, a.e. fotone $\lambda = r_S$:

$$\Delta M = \frac{h}{c r_S}, \quad \Delta R = \frac{2Gh}{c^2 r_S},$$

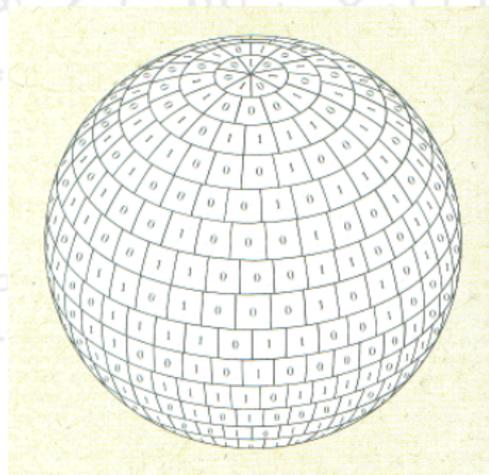
$$\Delta A_{\mathcal{H}} = 32\pi^2 \ell_P^2.$$

Un bit aumenta $A_{\mathcal{H}}$ di un'area di Planck!

Meccanica Statistica di Buco Nero

Teorema "no hair": (M, J, Q) individuano i g.d.l. macroscopici buco nero. Sia (M, J, Q) stato d'equilibrio, equiv. sia $A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{H}}(M, J, Q)$. Quali sono le configurazioni microscopiche indipendenti associate ad $A_{\mathcal{H}}$?

$$S_{\odot} \sim Nk_b \sim 10^{57} \xrightarrow{\text{collasso}} S_{BHW} \sim 10^{77} \xrightarrow{\# \text{ microstati}} \mathcal{N}(A_{\mathcal{H}}) \sim e^{10^{77}}.$$



ESPERIMENTO CONCETTUALE:

invio un bit, a.e. fotone $\lambda = r_S$:

$$\Delta M = \frac{h}{cr_S}, \quad \Delta R = \frac{2Gh}{c^2 r_S},$$

$$\Delta A_{\mathcal{H}} = 32\pi^2 \ell_P^2.$$

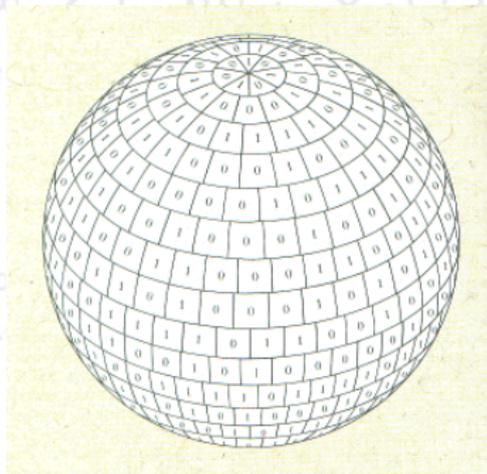
Un bit aumenta $A_{\mathcal{H}}$ di un'area di Planck!

J. H. WHEELER²⁰ (1992) **It from Bit:**

Meccanica Statistica di Buco Nero

Teorema "no hair": (M, J, Q) individuano i g.d.l. macroscopici buco nero. Sia (M, J, Q) stato d'equilibrio, equiv. sia $A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{H}}(M, J, Q)$. Quali sono le configurazioni microscopiche indipendenti associate ad $A_{\mathcal{H}}$?

$$S_{\odot} \sim Nk_b \sim 10^{57} \xrightarrow{\text{collasso}} S_{BHW} \sim 10^{77} \xrightarrow{\# \text{ microstati}} \mathcal{N}(A_{\mathcal{H}}) \sim e^{10^{77}}.$$



ESPERIMENTO CONCETTUALE:

invio un bit, a.e. fotone $\lambda = r_S$:

$$\Delta M = \frac{h}{cr_S}, \quad \Delta R = \frac{2Gh}{c^2 r_S},$$

$$\Delta A_{\mathcal{H}} = 32\pi^2 \ell_P^2.$$

Un bit aumenta $A_{\mathcal{H}}$ di un'area di Planck!

J. H. WHEELER²⁰ (1992) **It from Bit:**

$$\mathcal{N}_{bit}(A_{\mathcal{H}}) := \frac{A_{\mathcal{H}}}{4\ell_P^2},$$

$$S_S = \log_2 2^{\mathcal{N}_{bit}(A_{\mathcal{H}})} = \frac{A_{\mathcal{H}}}{4\ell_P^2}.$$

²⁰J. A. WHEELER – *It from Bit*, Sakharov Memorial Lecture on Physics (1992).

Sketches of Loop quantum gravity I

◇ J. A. WHEELER, B. DEWITT (1960–1969) \Rightarrow equazione Wheeler–DeWitt:

$$\Psi = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}[g_{\mu\nu}, \phi] e^{-\mathcal{I}[g_{\mu\nu}, \phi]} \quad \Longrightarrow \quad \hat{H}|\psi\rangle = 0,$$

analogo gravitazionale dell'eq. di Schrödinger. Estremamente mal definita!

◇ A. ASHTEKAR (1987) riscrive GR “come” Yang–Mills: introduce nuove variabili (connessione di Ashtekar) \rightarrow camp. grav. \sim flusso elettromagnetico.

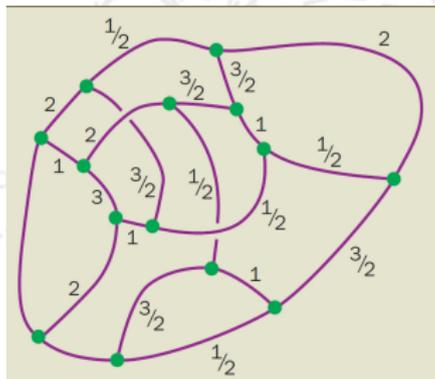
Sketches of Loop quantum gravity I

- ◇ J. A. WHEELER, B. DEWITT (1960–1969) \Rightarrow equazione Wheeler–DeWitt:

$$\Psi = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}[g_{\mu\nu}, \phi] e^{-I[g_{\mu\nu}, \phi]} \implies \hat{H}|\psi\rangle = 0,$$

analogo gravitazionale dell'eq. di Schrödinger. Estremamente mal definita!

- ◇ A. ASHTEKAR (1987) riscrive GR “come” Yang–Mills: introduce nuove variabili (connessione di Ashtekar) \rightarrow camp. grav. \sim flusso elettromagnetico.



- ◇ L. SMOOLIN, C. ROVELLI (1994):
procedura quantizzazione (criterio dei loop di Wilson); eliminano background richiedendo *diff-invarianza* \leftrightarrow riscrivono il campo come **spin-network** Υ (indicizzati da irrep. di $\mathfrak{su}(2)$) \rightarrow costruiscono spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = \text{Span}\{|\Upsilon; \vec{j}, \vec{m}\rangle\}_{\text{grafi}}$$

Sketches of Loop quantum gravity II

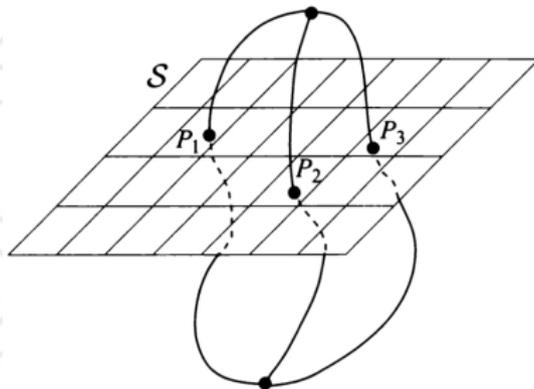
Equazione Wheeler–DeWitt ben definita su \mathcal{H} ; stati $|\Upsilon, \vec{j}, \vec{m}\rangle$ sono autostati di osservabili geometriche quantizzate, a.e. area:

$$A(S)|\Upsilon, \vec{j}, \vec{m}\rangle = 8\pi\ell_P^2\gamma \sum_{p(\text{uncture})} \sqrt{j_p(j_p + 1)}|\Upsilon, \vec{j}, \vec{m}\rangle.$$

Sketches of Loop quantum gravity II

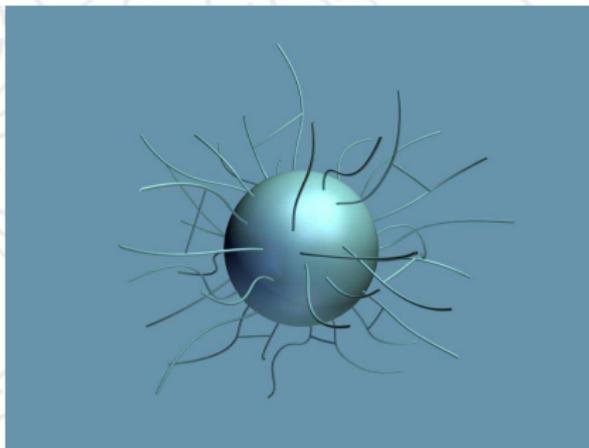
Equazione Wheeler–DeWitt ben definita su \mathcal{H} ; stati $|\Upsilon, \vec{j}, \vec{m}\rangle$ sono autostati di osservabili geometriche quantizzate, a.e. area:

$$A(S)|\Upsilon, \vec{j}, \vec{m}\rangle = 8\pi\ell_P^2\gamma \sum_{p(\text{unture})} \sqrt{j_p(j_p + 1)}|\Upsilon, \vec{j}, \vec{m}\rangle.$$



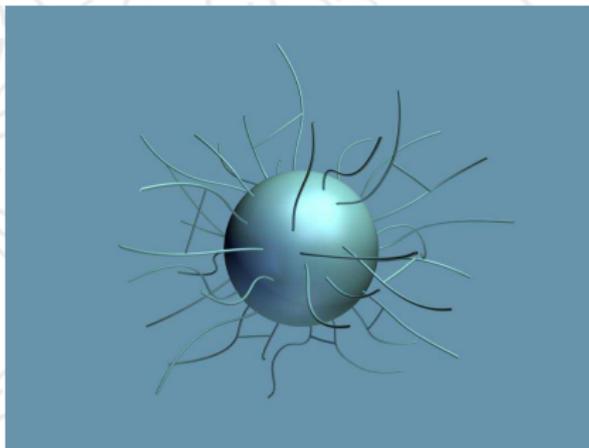
Ciascuna puntura (parametrizzata da $j \in \frac{\mathbb{N}}{2}$) contribuisce ad un quanto di area.

Conteggio dei microstati dell'orizzonte I



Contare numero stati microscopici compatibili con $A_{\mathcal{H}} \equiv$ contare numero
 punture spin-network compatibili con autovalore di $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

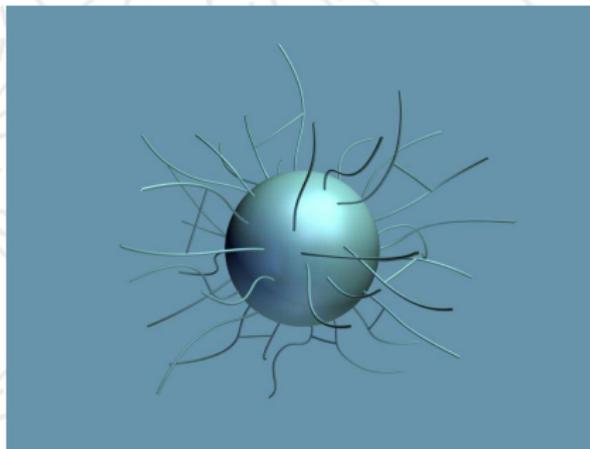
Conteggio dei microstati dell'orizzonte I



Contare numero stati microscopici compatibili con $A_{\mathcal{H}} \equiv$ contare numero punture spin-network compatibili con autovalore di $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Per $A_{\mathcal{H}} \gg \ell_p^2$ il conto procede nel modo seguente²¹. Sia N numero totale di punture su \mathcal{H} ed n_j numero punture con indice j ($N = \sum_j n_j$, dove $j = 1/2, \dots, j_{max}$);

²¹A. CORICHI – *Black holes and entropy in loop quantum gravity*, arXiv0901.1302 (2009)

Conteggio dei microstati dell'orizzonte I



Contare numero stati microscopici compatibili con $A_{\mathcal{H}} \equiv$ contare numero punture spin-network compatibili con autovalore di $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Per $A_{\mathcal{H}} \gg \ell_p^2$ il conto procede nel modo seguente²¹. Sia N numero totale di punture su \mathcal{H} ed n_j numero punture con indice j ($N = \sum_j n_j$, dove $j = 1/2, \dots, j_{max}$); numero stati ottenuto considerando dimensione Hilbert $\mathcal{H} = \otimes_j \mathcal{H}_j$; a.e. se tutte j , allora

$$\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}}) = \dim(\mathcal{H}) = (2j+1)^N \xrightarrow{\text{generale}} \mathcal{N}(A_{\mathcal{H}}) = \frac{(\sum_j n_j)!}{\prod_j n_j!} \prod_j (2j+1)^{n_j}.$$

²¹A. CORICHI – *Black holes and entropy in loop quantum gravity*, arXiv0901.1302 (2009)

Conteggio dei microstati dell'orizzonte II

Adoperando l'approssimazione di Stirling, si trova²²

$$\ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j n_j \ln\left(\frac{2j+1}{n_j}\right) + \left(\sum_j s_j\right) \ln\left(\sum_j s_j\right),$$

²²P. MITRA – *Black hole entropy*, arXiv:0902.2055 (2009).

Conteggio dei microstati dell'orizzonte II

Adoperando l'approssimazione di Stirling, si trova²²

$$\ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j n_j \ln\left(\frac{2j+1}{n_j}\right) + \left(\sum_j s_j\right) \ln\left(\sum_j s_j\right),$$

dovendo imporre vincolo su autovalore dell'area, consideriamo una variazione

$$\delta \ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j \delta n_j \left[\ln(2j+1) - \ln n_j + \ln \sum_k n_k \right],$$

²²P. MITRA – *Black hole entropy*, arXiv:0902.2055 (2009).

Conteggio dei microstati dell'orizzonte II

Adoperando l'approssimazione di Stirling, si trova²²

$$\ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j n_j \ln\left(\frac{2j+1}{n_j}\right) + \left(\sum_j s_j\right) \ln\left(\sum_j s_j\right),$$

dovento imporre vincolo su autovalore dell'area, consideriamo una variazione

$$\delta \ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j \delta n_j \left[\ln(2j+1) - \ln n_j + \ln \sum_k n_k \right],$$

ed introduciamo un moltiplicatore di Lagrange γ_0 per condizione area:

$$\ln(2j+1) - \ln n_j + \ln \sum_k n_k = \gamma_0 \sqrt{j(j+1)}.$$

Isolando nella precedente il termine n_j e sommando su j si trova

$$\sum_j (2j+1) e^{-2\pi\gamma_0 \sqrt{j(j+1)}} = 1 \quad \iff \quad \gamma_0 \approx 1.72,$$

$$\ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \gamma_0 \sum_j \sqrt{j(j+1)} = \frac{\gamma_0}{8\pi\ell_P^2\gamma} \left(8\pi\ell_P^2\gamma \sum_j \sqrt{j(j+1)} \right) = \frac{\gamma_0}{2\pi\gamma} \frac{A_{\mathcal{H}}}{4\ell_P^2}.$$

²²P. MITRA – *Black hole entropy*, arXiv:0902.2055 (2009).

Conteggio dei microstati dell'orizzonte II

Adoperando l'approssimazione di Stirling, si trova²²

$$\ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j n_j \ln\left(\frac{2j+1}{n_j}\right) + \left(\sum_j s_j\right) \ln\left(\sum_j s_j\right),$$

dovendo imporre vincolo su autovalore dell'area, consideriamo una variazione

$$\delta \ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \sum_j \delta n_j \left[\ln(2j+1) - \ln n_j + \ln \sum_k n_k \right],$$

ed introduciamo un moltiplicatore di Lagrange γ_0 per condizione area:

$$\ln(2j+1) - \ln n_j + \ln \sum_k n_k = \gamma_0 \sqrt{j(j+1)}.$$

Isolando nella precedente il termine n_j e sommando su j si trova

$$\sum_j (2j+1) e^{-2\pi\gamma_0 \sqrt{j(j+1)}} = 1 \quad \iff \quad \gamma_0 \approx 1.72,$$

$$\ln(\mathcal{N}(A_{\mathcal{H}})) = \gamma_0 \sum_j \sqrt{j(j+1)} = \frac{\gamma_0}{8\pi\ell_P^2\gamma} \left(8\pi\ell_P^2\gamma \sum_j \sqrt{j(j+1)} \right) = \frac{\gamma_0}{2\pi\gamma} \frac{A_{\mathcal{H}}}{4\ell_P^2}.$$

Si usa fissare a mano il parametro di Immirzi-Barbero t.c. $\gamma = \frac{\gamma_0}{2\pi} \approx 0.274$.

²²P. MITRA – *Black hole entropy*, arXiv:0902.2055 (2009).