

APPUNTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA

Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce, 73100 Lecce, Italy.

Novembre 2011

Lo scopo di questi appunti è fornire le nozioni essenziali per la comprensione degli assiomi della Meccanica Quantistica ed introdurre il lettore ad alcune tecniche di uso comune in Fisica Matematica.

Indice

1	Assiomi fondamentali della Meccanica Quantistica	3
1.1	Interpretazione di Born della funzione d'onda	5
1.2	Teoria di Pauli per particelle dotate di spin	6
2	Teoremi fondamentali su spazi di Hilbert	7
2.1	Teorema del completamento e proprietà dei sottospazi	7
2.2	Teorema della proiezione ortogonale	7
2.3	Teorema del vettore minimizzante	8
2.4	Teorema di Riesz–Fréchet	10
2.5	Basi di Hamel e basi di Schauder	11
2.6	Famiglie ortonormali e disuguaglianza di Bessel	12
2.7	Basi ortonormali in spazi di Hilbert	14
3	Complementi di Analisi Funzionale negli spazi di Hilbert	18
3.1	Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert	18
3.2	Particelle identiche e gruppo simmetrico	21
3.3	Spazi di Fock	25
4	Teoria degli operatori lineari in spazi di Hilbert	27
4.1	Operatori lineari limitati (richiami)	27
4.2	Aggiunto di Hilbert di operatori lineari limitati (richiami)	30
4.3	Aggiunto di Hilbert di operatori lineari non limitati	35
4.4	Simmetria, autoaggiuntezza ed essenziale autoaggiuntezza.	40
4.5	Estendibilità di operatori simmetrici	48
4.6	Cenni sulla teoria delle perturbazioni di operatori simmetrici	53
4.6.1	Teoremi di Kato–Rellich, di Wüst e KLMN	56
4.7	Prodotto tensoriale di operatori	61
5	Elementi di teoria spettrale degli operatori lineari	63
5.1	Teoria spettrale degli operatori lineari in spazi finito dimensionali	63
5.1.1	Operatori autoaggiunti, unitari e normali	66
5.1.2	Funzioni di operatori commutanti e non commutanti	68
5.2	Teoria spettrale degli operatori lineari	73
5.2.1	Teoria spettrale degli operatori lineari non limitati	80
5.2.2	Proprietà spettrali degli operatori unitari, autoaggiunti e normali	81
5.3	Decomposizione spettrale di operatori autoaggiunti	83

5.3.1	Famiglia spettrale e primo teorema spettrale	85
5.3.2	“Secondo” teorema spettrale e spectral mapping theorem	89
5.4	Gruppi unitari ad un parametro e Teorema di Stone	94
5.4.1	Evoluzione dinamica e sviluppo in serie di Dyson	108
5.4.2	Formula di Lie–Trotter ed integrale lungo i cammini di Feynman	110
6	Distribuzioni e trasformata di Fourier	114
6.1	Spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni di prova	114
6.2	Spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni di Schwartz	117
6.3	Distribuzioni e spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni	121
6.4	Distribuzioni temperate e δ -famiglie	124
6.5	Calcolo distribuzionale	131
6.5.1	Derivata distribuzionale, prodotto diretto e prodotto di convoluzione	133
6.6	Trasformata di Fourier di funzioni di prova di Schwartz	142
6.7	Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate	149
6.8	Trasformata di Fourier di funzioni sommabili	156
6.9	Operatori differenziali in \mathcal{S}' e soluzioni fondamentali	161
A	*-algebre e C^*-algebre	172
B	Algebre di Weyl e teorema di Stone–von Neumann	173
C	Integrale di Feynman e formula di Feynman–Kac	173
C.1	Da Schrödinger a Feynman e viceversa	173
D	Hilbert rigged spaces	173
E	Trasformata di Laplace	173
F	Metodo di Laplace	173
	Bibliografia174	

1 Assiomi fondamentali della Meccanica Quantistica

Sia \mathcal{S} un certo sistema fisico; esso può in generale essere definito come una porzione di universo isolata, o al più sottoposta all'azione di forze esterne note, sul quale è possibile compiere delle misurazioni (*osservazioni*) di alcune particolari grandezze fisiche dette appunto *osservabili*. L'insieme delle osservazioni di tutte le osservabili (o quanto meno delle *osservabili fondamentali*) caratterizza lo *stato di preparazione* di \mathcal{S} ; lo stato, quindi, può essere visto come la collezione delle distribuzioni di probabilità di ciascuna osservabile. Agli stati ed alle osservabili si associano particolari enti matematici e tale corrispondenza viene stabilita dalla *teoria fisica*: in particolare, in Meccanica Quantistica si assumono alcuni *assiomi fondamentali*, detti di *von Neumann*. Ne presentiamo qui i primi quattro.

PRIMO POSTULATO

Sia \mathcal{S} un sistema fisico. Ad esso si associa uno spazio di Hilbert “degli stati” $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ complesso e separabile (definito a meno di isomorfismi di spazi hilbertiani); in assenza di regole di superselezione, ciascuno stato di \mathcal{S} è caratterizzato da raggi di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

È opportuno precisare il concetto di *raggio* di uno spazio di Hilbert. Siano $(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ due vettori ket descriventi due “stati” di \mathcal{S} . Secondo il **principio di sovrapposizione**, il ket $|\psi\rangle \equiv c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ ($(c_1, c_2) \in \mathbb{C}$, associati alle probabilità dei corrispondenti “stati”) può descrivere ancora uno “stato” di \mathcal{S} (vedremo che esistono alcune restrizioni); nel caso in cui ciò si verifichi si parla di una *sovrapposizione coerente* di “stati”. Segue allora che se $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ descrive un certo “stato”, il ket $a|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, $a \in \mathbb{C}$, descrive il medesimo “stato”. Uno stato, quindi, viene specificato da una classe di equivalenza di vettori ket definiti a meno di una costante complessa di modulo unitario (dovuta ad un'opportuna condizione di normalizzazione di $|\psi\rangle$); di conseguenza, gli stati di \mathcal{S} sono in realtà rappresentati da raggi di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, ovvero da *sottospazi unidimensionali* di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ identificati dai cosiddetti (spazi) *proiettivi*¹ $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$. Pertanto, se $\xi \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ identifica uno stato di \mathcal{S} , allora per ciascuna coppia di vettori rappresentativi $(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) \in \xi$ con $|\psi\rangle \neq |\psi'\rangle$, risulta $|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$, dove $\theta \in \mathbb{R}$. Il fattore $e^{i\theta}$ è detto *fattore di fase*, non è un'osservabile ed infatti non compare mai nei prodotti scalari.

Il principio di sovrapposizione non può però essere applicato incondizionatamente. In certi contesti, infatti, può accadere che ad una sovrapposizione lineare di stati di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ non sia associato alcuno stato fisico² di \mathcal{S} . Formalmente, risulta che se $\xi_1 \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S},1}$, $\xi_2 \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S},2}$ e $\mathcal{PH}_{\mathcal{S},1} \cap \mathcal{PH}_{\mathcal{S},2} = \emptyset$, e se inoltre $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S},1} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{S},2}$, il rappresentativo $|\psi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$ (con $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ due rappresentativi normalizzati di ξ_1 e ξ_2 rispettivamente) può non identificare alcuno stato fisico di \mathcal{S} . Tali restrizioni prendono il nome di **regole di superselezione** e sono dovute al fatto che $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ è più propriamente suddiviso in *settori di superselezione*: all'interno del medesimo settore il principio di sovrapposizione è sempre valido, mentre non lo è necessariamente se si considerano elementi di settori di superselezione distinti.

Si osservi ora che, in quanto proiettivo di uno spazio di Hilbert, $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ assume automaticamente una metrica $\gamma : \mathcal{PH}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{PH}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$. Ciononostante, va sottolineato che la coppia $(\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}, \gamma)$ non costituisce uno spazio metrico nel senso usuale del termine in quanto, per definizione, $\mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$ è lo *spazio dei sottospazi unidimensionali* di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. La metrica γ può essere definita come segue: siano $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$, tali che i corrispondenti rappresentativi $|\xi_1\rangle$ e $|\xi_2\rangle$ abbiano norma unitaria; sia inoltre $|\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle|^2 \in [0, 1]$ la cosiddetta *fedeltà*, caratterizzate (in un certo senso) la “somiglianza” tra i due stati³. Allora la metrica indotta è la cosiddetta **metrica di Fubini–Study**, definita come

$$\gamma(\xi_1, \xi_2) := 2 \arccos \sqrt{|\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle|^2}. \quad (1.1)$$

Prima di mostrare alcune proprietà della metrica di Fubini–Study, introduciamo due ulteriori postulati.

¹Si dimostra che se così non fosse non sarebbe possibile spiegare l'esistenza dei fermioni.

²Ciò si verifica, ad esempio, in *Teoria Quantistica dei Campi*, dove si è dimostrato impossibile ottenere delle sovrapposizioni coerenti di autostati associati a autovalori distinti dell'osservabile carica elettrica.

³Si noti che la fedeltà non è una metrica dal momento che non soddisfa la disuguaglianza triangolare.

SECONDO POSTULATO

Le osservabili di \mathcal{S} sono descritte da operatori lineari autoaggiunti definiti su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, il cui spettro σ caratterizza l'insieme dei possibili valori ottenuti misurando le osservabili stesse.

TERZO POSTULATO

Sia $\xi \in \text{PH}_{\mathcal{S}}$ il raggio associato allo stato di preparazione di \mathcal{S} e $|\psi\rangle$ un suo vettore rappresentativo. La probabilità che una misura di un'osservabile A su ξ dia come risultato un valore contenuto nel sottoinsieme boreliano \mathfrak{b} della retta reale è data dall'espressione

$$\mathcal{P}_A(\mathfrak{b}|\xi) = \frac{\langle \psi | \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (1.2)$$

dove $\mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A) := \int_{\mathfrak{a} \in \sigma(A)} d\mathbb{E}_{\mathfrak{a}}(A)$ è il proiettore ortogonale appartenente alla famiglia spettrale $\mathcal{E}(A) \equiv \{\mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A) : \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}\}$ di A , essendo $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{R}\}$ una σ -algebra di Borel di \mathbb{R} .

Consideriamo come sistema fisico un elettrone e supponiamo che l'unica proprietà che lo caratterizzi sia lo spin. In tal caso $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \leftrightarrow \mathbb{C}^2$ (anch'esso hilbertiano) e ad una generica coppia di suoi elementi $|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi_1, \psi_2)^{\top}$ (con $(\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{C}$), $|\phi\rangle \leftrightarrow (\phi_1, \phi_2)^{\top}$ (con $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{C}$) si associa il prodotto scalare

$$\langle \psi | \phi \rangle \rightarrow (\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \overline{\psi_1} \phi_1 + \overline{\psi_2} \phi_2.$$

Sia quindi $\xi \in \text{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{CP}^1$ uno stato dell'elettrone⁴, $|\psi\rangle$ un rappresentativo di norma unitaria di ξ ed A un'osservabile di \mathcal{S} . Qualsiasi operatore autoaggiunto su un $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ bidimensionale si scrive come

$$A = \alpha \mathbf{1} + \beta \sigma_1 + \gamma \sigma_2 + \delta \sigma_3 \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le *matrici di Pauli* associate alle componenti di spin⁵, definite come

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una serie (teoricamente infinita) di misurazioni di A sullo stato ξ permetterà di ottenere il valor medio

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \alpha + \beta \langle \sigma_1 \rangle + \gamma \langle \sigma_2 \rangle + \delta \langle \sigma_3 \rangle, \quad (1.4)$$

avendo scritto, per semplicità di notazione $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{\xi}$ (convenzione che adopereremo da qui in avanti); si noti che, essendo le σ_k hermitiane, $\langle \sigma_k \rangle \in \mathbb{R} \forall k$. Vale, in questo particolare contesto, il seguente

LEMMA I - *L'insieme dei valori di attesa $(\langle \sigma_1 \rangle, \langle \sigma_2 \rangle, \langle \sigma_3 \rangle)$ caratterizza univocamente lo stato ξ di \mathcal{S} .*

Si prova inoltre che $\langle \sigma_1 \rangle^2 + \langle \sigma_2 \rangle^2 + \langle \sigma_3 \rangle^2 = 1$, qualunque sia ξ ; ciò significa che la terna dei valor medi delle metrici di Pauli su un certo stato di \mathcal{S} identifica una sfera di raggio unitario di \mathbb{R}^3 , detta **sfera di Bloch**. Pertanto gli stati di \mathcal{S} possono essere identificati come punti appartenenti alla superficie della sfera di Bloch⁶, che corrisponde quindi a \mathbb{CP}^1 (vedi nota 4). Quel che risulta è che la metrica di Fubini–Study rappresenta una *metrica naturale per la sfera di Bloch*: la distanza γ tra due stati corrisponde proprio alla lunghezza d'arco di circonferenza massima associata ai relativi punti di \mathbb{CP}^1 . In particolare, punti diametralmente opposti della sfera di Bloch corrispondono a stati ortogonali di \mathcal{S} .

Infine, enunciamo il quarto postulato, relativo all'evoluzione temporale.

⁴In tal caso il proiettivo di \mathbb{C}^2 corrisponde alla *retta proiettiva complessa* \mathbb{CP}^1 la quale, se completata con il punto all'infinito, identifica la definizione che si dà della *sfera di Riemann* in geometria proiettiva.

⁵I parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ introdotti nella (1.3) sono noti una volta assegnata l'osservabile.

⁶Più precisamente, si ha che gli stati puri di \mathcal{S} si dispongono sulla superficie della sfera, mentre gli stati miscela (ottenuti come combinazioni lineari di stati puri) appartengono invece ai diametri congiungenti due punti di superficie.

QUARTO POSTULATO

L'evoluzione temporale indisturbata del sistema fisico \mathcal{S} dall'istante iniziale t_0 a quello finale t è realizzata mediante una trasformazione di simmetria $T(t, t_0)$ su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Il esso è riassunto il ruolo che i *principi di simmetria* e di *invarianza* hanno in Meccanica Quantistica. Le leggi fisiche godono delle stesse proprietà di invarianza dello spazio-tempo in cui si inquadrano i fenomeni osservati; in particolare, la probabilità $\mathcal{P}_{\Sigma}(A)$ che un evento A si verifichi nel sistema di riferimento Σ deve essere uguale alla probabilità $\mathcal{P}_{\Sigma'}(A)$ misurata in Σ' . In accordo con il terzo postulato, l'invarianza $\mathcal{P}_{\Sigma}(A) = \mathcal{P}_{\Sigma'}(A)$ viene implementata richiedendo che la trasformazione $T : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ conservi le *fedeltà* (e più in generale i moduli quadri dei prodotti scalari) o, equivalentemente, la *struttura metrica* di $\mathcal{P}\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, rispettandone le eventuali regole di superselezione. Una simile trasformazione prende il nome di **trasformazione di simmetria**. Il legame di questi concetti con la dinamica di \mathcal{S} è chiarito dal

TEOREMA (WIGNER) - *Ogni trasformazione di simmetria T in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ può essere implementata attraverso un operatore unitario od antiunitario \mathcal{U}_T tra i settori di superselezione di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.*

In Fisica si ha spesso a che fare con gruppi connessi con continuità all'identità e ciò obbliga l'operatore \mathcal{U}_T ad essere unitario, piuttosto che antiunitario. Nel caso dell'evoluzione temporale di un sistema isolato con hamiltoniano H , posto $|\psi(x, t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\psi(x, 0)\rangle$ è immediato verificare che $\mathcal{U}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}$ soddisfa l'equazione differenziale operatoriale $i\hbar d_t \mathcal{U}(t, t_0) = H\mathcal{U}(t, t_0)$ con condizione iniziale $\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}$. Grazie al *teorema di Stone*, $\mathcal{U}(t, t_0)$ è ben definito ed H , ora inteso come il *generatore dell'evoluzione temporale*, è autoaggiunto. Torneremo più avanti sull'argomento.

1.1 Interpretazione di Born della funzione d'onda

Sia \mathcal{S} = “spin 1/2” il sistema fisico in questione; \mathcal{S} rappresenta, ad esempio, un elettrone “nudo” (ovvero spogliato di ogni altra proprietà), oppure un *quantum bit* e cioè un registro di memoria binario caratterizzato dagli stati $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ associati rispettivamente ai valori 1 e 0. Si ha quindi che $\dim\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \dim\mathbb{C}^2 = 2$. Consideriamo il caso di un elettrone e supponiamo che esso sia confinato in una struttura unidimensionale (essenzialmente un “*filo quantico*”) di lunghezza ℓ . In meccanica classica saremmo portati ad identificare il segmento di retta $[0, \ell]$ come lo spazio delle configurazioni del sistema; in una trattazione quantistica, invece, siamo interessati ad $L_2([0, \ell])$, ovvero allo spazio delle funzioni di quadrato sommabile sull'intervallo $[0, \ell]$. Esiste infatti un isomorfismo $T : \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \rightarrow L_2([0, \ell])$ che associa a ciascun vettore di stato di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ una funzione d'onda $\psi \in L_2([0, \ell])$. Tale rappresentazione di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ costituisce uno spazio vettoriale, è dotato di prodotto scalare ed è completo; esso, quindi, è a tutti gli effetti uno spazio di Hilbert ed il prodotto scalare su di esso definito è dato dalla relazione

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \int_0^{\ell} \overline{\psi_1(x)} \psi_2(x) dx, \quad \psi_1, \psi_2 \in L_2([0, \ell]). \quad (1.5)$$

Dal momento che $\psi_1, \psi_2 \in L_2([0, \ell])$, il prodotto scalare $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ è ben definito. Qual è l'interpretazione fisica di $L_2([0, \ell])$? Per rispondere, consideriamo una generica $\psi \in L_2([0, \ell])$ ed introduciamo la quantità

$$\rho(x) \equiv \frac{|\psi(x)|^2}{\int_0^{\ell} |\psi(x)|^2 dx}, \quad \rho(\cdot) : x \in [0, \ell], \quad \int_0^{\ell} \rho(x) dx = 1. \quad (1.6)$$

La funzione ρ , così definita, ha le proprietà di una probabilità e può essere interpretata come una **densità di probabilità**: in altre parole, la quantità $d\omega = \rho(x) dx$ rappresenta la probabilità di trovare la particella nell'intervallo infinitesimo di estremi $x, x + dx$. Più in generale, indicando con $\mathcal{E} \subseteq [0, \ell]$, la probabilità $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ di trovare la particella nel sottointervallo \mathcal{E} sarà data dall'espressione

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} \rho(x) dx = \int_{\mathcal{E}} |\psi(x)|^2 dx.$$

Quest'interpretazione probabilistica della funzione d'onda fu proposta da MAX BORN nel 1926 in un articolo intitolato “Zür Quantenmechanik der Stoßvorgänge” ed è oggi nota come *interpretazione di Born*. A tal proposito è interessante riportare ciò che lo stesso Born affermò nel discorso tenuto alla cerimonia di consegna del premio Nobel⁷ nel 1954 e che dà prova dell'immenso intuito di Einstein:

“... Again an idea of Einstein's gave me the lead. He had tried to make the duality of particles - light quanta or photons - and waves comprehensible by interpreting the square of the optical wave amplitudes as probability density for the occurrence of photons. This concept could at once be carried over to the ψ -function: $|\psi|^2$ ought to represent the probability density for electrons (or other particles). It was easy to assert this, but how could it be proved?”

Il precedente discorso può essere esteso al caso di un elettrone confinato in un “pozzo quantico” $\mathcal{R}(\ell_1, \ell_2) \equiv [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$, nel qual caso esiste un isomorfismo che associa a ciascun vettore di $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}^{2d}}$ una funzione $\psi \in L_2(\mathcal{R})$. Il prodotto scalare su $L_2(\mathcal{R})$ è evidentemente definito come

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \iint_{\mathcal{R}} \overline{\psi_1(x_1, x_2)} \psi_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathcal{R}).$$

La generalizzazione ad un “quantum dot” $\mathcal{D}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \equiv [0, \ell_1] \times [0, \ell_2] \times [0, \ell_3]$ è immediata.

1.2 Teoria di Pauli per particelle dotate di spin

Sia ora \mathcal{S} = “atomo di idrogeno” ed $H_{\mathcal{S}} = \frac{p_1^2}{2m_p} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$ la Hamiltoniana associata. Al fine di caratterizzare lo spazio di Hilbert degli stati di \mathcal{S} , è conveniente riportarsi alla risoluzione di un problema ad un corpo. In questo modo si ottiene che $H_{\mathcal{S}} = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}$, dove μ ed \mathbf{r} corrispondono rispettivamente alla massa ridotta del sistema elettrone-protonone ed al vettore di posizione relativo tra i due e quindi $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3)$, ovvero lo spazio di Hilbert degli stati dell'atomo di idrogeno è isomorfo allo spazio di Hilbert delle funzioni di quadrato sommabile su \mathbb{R}^3 .

Sebbene corretta, tale descrizione è palesemente limitativa, in quanto non si presta a spiegare il comportamento dell'atomo di idrogeno (ed in generale della materia) in presenza di campi magnetici; il precedente modello, infatti, non fornisce alcuna descrizione dei fenomeni *paramagnetici* e *ferromagnetici*, per i quali è necessario considerare anche lo spin dell'elettrone. Nel §1 abbiamo visto che per un “elettrone nudo” (ovvero spogliato di ogni altra proprietà all'infuori dello spin) $\mathcal{H}_{\text{spin } 1/2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ed un generico $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{spin } 1/2}$ è rappresentato da uno *spinore* (coppie di numeri complessi). Pertanto, per tener conto degli effetti dovuti allo spin dell'elettrone nell'atomo di idrogeno, basterà scegliere la rappresentazione

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{P}^{Pauli}} (\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}))^T, \quad \psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R}^3),$$

ed il prodotto scalare

$$\langle \psi | \phi \rangle \xrightarrow{\mathcal{P}^{Pauli}} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi_i(\mathbf{x})} \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

L'isomorfismo individuato dalla precedente scelta è noto come “*rappresentazione di Pauli*” per particelle a spin 1/2 ed è a sua volta isomorfo alla somma diretta di sottospazi di funzioni di quadrato sommabile⁸. Pertanto, lo studio degli effetti dovuti all'accoppiamento del momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}_s = -\mu_B \boldsymbol{\sigma}$ (generato dallo spin dell'elettrone) con un campo magnetico \mathbf{B} esterno può essere effettuata risolvendo in rappresentazione di Pauli l'equazione agli autovalori $H'_S |\psi\rangle = E' |\psi\rangle$, dove $H'_S \equiv H_S - \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}$ con H_S opportunamente modificata tramite l'accoppiamento minimale⁹.

⁷MAX BORN, “The statistical interpretation of quantum mechanics”, Nobel Lecture, December 11, 1954.

⁸Pur essendo somma diretta di spazi di Hilbert, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{P}^{Pauli}}$ non ammette settori di superselezione (più correttamente, ammette settori di superselezione perfettamente sovrapposti) e dunque non esistono regole di superselezione. Uno spazio siffatto è di grande utilità in *meccanica quantistica supersimmetrica*, un modello semplificato di teoria di campo.

⁹Ovvero la sostituzione $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}$, dove \mathbf{A} è il potenziale vettore e \mathbf{P} è il momento canonicamente coniugato.

2 Teoremi fondamentali su spazi di Hilbert

In questa sezione rivedremo gli enunciati di alcuni importanti teoremi dell'analisi funzionale su spazi di Hilbert e ne analizzeremo alcune applicazioni in Fisica. Gli spazi di Hilbert di maggior interesse saranno spazi (separabili) infinito dimensionali. In tal caso, molte proprietà tipiche degli spazi finito dimensionali non sono necessariamente garantite. Ricordiamo, ad esempio, la seguente

DEFINIZIONE (INDIPENDENZA LINEARE) - Sia V uno spazio vettoriale infinito dimensionale su un campo K e $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia (un insieme con indice) infinita di vettori di V . Sia inoltre $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una generica sottofamiglia finita di $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Gli elementi della famiglia sono linearmente indipendenti su K se e solo se gli elementi di ogni sua sottofamiglia finita sono linearmente indipendenti su K .

Si ricorda che se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ sono elementi di V , essi sono linearmente indipendenti (su K) se e solo se esiste in K una famiglia di elementi $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ tali che se $a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$, allora $a_k = 0$ per $k = 1, 2, \dots, m$.

Esempi

- Si consideri l'insieme $\mathcal{C}^0([0, \ell]) \subset L_2([0, \ell])$. Si può dimostrare che $\overline{\mathcal{C}^0} = L_2$, ovvero \mathcal{C}^0 è denso in L_2 . Tra le famiglie di elementi di $\mathcal{C}^0([0, \ell])$ si trovano le funzioni potenza $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$; scelta quindi un'arbitraria sottofamiglia finita $\{1, x, \dots, x^n\}$ e consideratane una combinazione lineare, per il teorema fondamentale dell'algebra si ha che se $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$, $a_k = 0$ per $k = 0, 1, \dots, n$. Dall'arbitrarietà di n segue che $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è una famiglia infinita linearmente indipendente.

2.1 Teorema del completamento e proprietà dei sottospazi

TEOREMA (COMPLETAMENTO) - Per ogni spazio prehilbertiano \mathcal{X} esiste uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ed un isomorfismo $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$, con $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{H}$. Lo spazio \mathcal{H} è unico a meno di isomorfismi.

TEOREMA (SOTTOSPAZIO) - Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed \mathcal{Y} un suo sottospazio. Si ha che:

- \mathcal{Y} è completo se e solo se \mathcal{Y} è chiuso in \mathcal{H} ;
- se \mathcal{Y} è finito dimensionale allora è completo;
- se \mathcal{H} è separabile, lo è anche¹⁰ \mathcal{Y} .

2.2 Teorema della proiezione ortogonale

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed \mathcal{Y} un suo sottospazio. Indicheremo con $\mathcal{Y}^\perp \equiv \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : \mathbf{y} \perp \mathcal{Y}\}$ il *complemento ortogonale* di \mathcal{Y} in \mathcal{H} ; essendo \mathcal{Y} sottospazio di uno spazio di Hilbert, si ha che $(\mathcal{Y}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{Y}}$.

TEOREMA (DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE) - Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed \mathcal{Y} un suo sottospazio chiuso. Allora $\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$, ovvero $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \exists! \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{Y} \exists' \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{Y}^\perp$ (oppure $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Y}^\perp$).

Esempi

- (DECOMPOSIZIONE ORTOGONALE DI FUNZIONI D'ONDA)
Sia $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$ lo spazio delle funzioni d'onda di particelle elementari e $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore di parità, tale che $\mathcal{P}[\psi](\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$. Di conseguenza, si avranno funzioni d'onda *pari* se $\mathcal{P}[\psi](\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$ e funzioni d'onda *dispari* se $\mathcal{P}[\psi](\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$. Siano ora $\mathcal{M} \equiv \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \mathcal{P}[\psi](\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\}$ lo spazio delle funzioni d'onda pari e $\mathcal{K} \equiv \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \mathcal{P}[\psi](\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})\}$ lo spazio delle funzioni d'onda dispari. Si può dimostrare che \mathcal{M} e \mathcal{K} sono chiusi ed ortogonali in \mathcal{H} . Pertanto, $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{K}$ ed ogni $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ ammetterà un'unica decomposizione del tipo

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\psi(\mathbf{r}) + \psi(-\mathbf{r})}{2} + \frac{\psi(\mathbf{r}) - \psi(-\mathbf{r})}{2} \equiv \psi_I(\mathbf{r}) + \psi_{II}(\mathbf{r}), \quad \psi_I \in \mathcal{M}, \quad \psi_{II} \in \mathcal{K}.$$

¹⁰Più in generale, ogni sottospazio di uno spazio prehilbertiano separabile è ancora separabile.

◦ (DECOMPOSIZIONE TRAMITE FUNZIONE CARATTERISTICA)

Sia data una particella elementare nello spazio tridimensionale; allora $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$. Sia inoltre E il volume occupato da un rilevatore di particelle. Supponendo che la particella sia in E si ha che

$$1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_E |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{C}(E) := \mathbb{R}^3/E} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 1 + \int_{\mathcal{C}(E)} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

da cui segue che $\psi(x)$ deve essere identicamente nulla su $\mathcal{C}(E)$. L'insieme

$$M(E) \equiv \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}(E)\}$$

forma un sottospazio chiuso di $L_2(\mathbb{R}^3)$. Ogni funzione $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ può scriversi perciò in modo unico come somma di funzioni di $M(E)$ e del suo complemento ortogonale; in particolare

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\chi_E(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})(1 - \chi_E(\mathbf{x})), \quad \chi_E(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione χ_E prende il nome di *funzione caratteristica* (di E).

2.3 Teorema del vettore minimizzante

Sia V uno spazio vettoriale ed $Y \subset V$. Y è detto *convesso* se $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in Y, \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}' \in Y, \lambda \in [0, 1]$. Possiamo allora enunciare il seguente

TEOREMA (DEL VETTORE MINIMIZZANTE) - Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}$ chiuso e convesso¹¹. Allora $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \exists! \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \ni d(\mathbf{x}, \mathcal{Y}) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{Y}} \{d(\mathbf{x}, \mathbf{z})\}$.

In particolare, il teorema precedente afferma che *in ogni sottospazio chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert esiste uno ed un solo vettore di norma minima*. Ciò ha importanti applicazioni in Fisica.

Esempi

◦ (STABILITÀ DI UNA CORDA ELASTICA VINCOLATA AVENTE ESTREMI FISSATI.)

In meccanica ed in particolare in teoria dei sistemi dinamici, è di rilevante importanza stabilire se un sistema ammette una configurazione di equilibrio e se essa è stabile. Ricordiamo che le possibili configurazioni di un sistema Lagrangiano ad n gradi di libertà sono individuate dalle coppie $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dello *spazio delle configurazioni*, il quale può essere costruito una volta note le coordinate generalizzate \mathbf{q} . Se il sistema Lagrangiano è conservativo ed $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, si può dimostrare che una configurazione $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^n$ è di *equilibrio* se e solo se $\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Tale configurazione, inoltre, è *stabile* se $\forall \varepsilon, \delta > 0 \exists \varepsilon_1, \delta_1 > 0 \ni \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*\| < \varepsilon, \|K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| < \delta \forall t$ e $\forall (\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \ni \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}^*\| < \varepsilon_1, \|K(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)\| < \delta_1$. In altre parole, la configurazione di equilibrio è stabile se le orbite rimangono confinate in un suo intorno arbitrario con velocità arbitrariamente piccole, purché il dato iniziale \mathbf{q}_0 sia prossimo a \mathbf{q}^* e $\dot{\mathbf{q}}_0$ sia piccola. In questo contesto si colloca il noto¹²

TEOREMA (DI LAGRANGE-DIRICHLET) - Sia $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$ la lagrangiana di un sistema conservativo ad n gradi di libertà e sia \mathbf{q}^* una sua configurazione di equilibrio. Si ha che \mathbf{q}^* è stabile se è un minimo assoluto di V .

¹¹La tesi resta valida pur richiedendo \mathcal{H} prehilbertiano ed \mathcal{Y} convesso e completo.

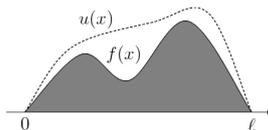
¹²Il teorema di Lagrange-Dirichlet costituisce un corollario del PRIMO TEOREMA DI LYAPUNOV - Sia \mathbf{x}^* un punto fisso di un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Si definisce funzione di Lyapunov per \mathbf{x}^* una funzione $\Lambda(\mathbf{x})$ almeno C^1 in un intorno U di \mathbf{x}^* tale che: *v*) $\Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda(\mathbf{x}^*), \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}^*\}$; *u*) $d_t \Lambda(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in U$. Allora, se per \mathbf{x}^* esiste una funzione di Lyapunov, esso è Lyapunov-stabile.

Veniamo al problema in questione. Sia data una corda elastica di estremi fissati soggetta ad un vincolo rappresentato in \mathbb{R}^2 dal grafico di una funzione $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0 = f(\ell)$ (vedi figura). Dalla teoria dell'elasticità è noto che l'energia potenziale della corda è descritta dal funzionale

$$\mathcal{V}[u(x)] = \frac{k}{2} \int_0^\ell \left(\frac{d u(x)}{d x} \right)^2 dx, \quad k \in \mathbb{R}^+; \quad (2.1)$$

si vuol dimostrare che esiste una ed una sola configurazione di equilibrio stabile.

Preliminarmente, supponiamo che il vincolo sia assente: in tal caso lo spazio delle configurazioni corrisponde all'insieme $\mathcal{S} \equiv \{u \in L_2([0, \ell]) : u(0) = u(\ell) = 0, u_x \in L_2([0, \ell])\}$, nel quale la richiesta $u_x \in L_2([0, \ell])$ è stata posta affinché $\mathcal{V} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ risulti ben definito. Uno spazio vettoriale siffatto appartiene alla famiglia degli **spazi di Sobolev**¹³ e corrisponde, in particolare, allo spazio $\mathbb{H}_0^1([0, \ell])$; su di esso è possibile definire la norma $\|u\|_0^2 = \frac{2}{k} \mathcal{V}[u]$, soddisfacente la regola del parallelogramma e quindi indotta da un prodotto scalare, rispetto al quale $\mathbb{H}_0^1([0, \ell])$ è di Hilbert (vedi nota 12). Imponendo l'esistenza del vincolo $u(x) \leq f(x) \forall x \in [0, \ell]$, si restringe $\mathbb{H}_0^1([0, \ell])$ al sottospazio $\mathcal{S}' \equiv \{u \in \mathbb{H}_0^1([0, \ell]) : u(x) \geq f(x), \forall x \in [0, \ell]\}$, il quale è convesso per costruzione (infatti $\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{S}', \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \geq f(x), \forall \lambda \in [0, 1]$) ed è possibile provarne la chiusura. Di conseguenza, $\exists! u^* \in \mathcal{S}' \ni \mathcal{V}[u^*] \leq \mathcal{V}[u], \forall u \in \mathcal{S}$ e quindi il sistema ammette un'unica configurazione di equilibrio stabile.



¹³BREVE DIGRESSIONE SUGLI SPAZI DI SOBOLEV – Gli spazi di Sobolev, sono spazi vettoriali infinito dimensionali di funzioni L_p sommabili su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme a tutte le loro derivate (propriamente definite) fino ad un certo ordine. La loro importanza è dovuta al fatto che su di essi sono definite le soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per semplicità, supponiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}$: in questo caso, lo spazio di Sobolev di ordine n in L_p è definito come

$$\mathbb{W}^{n,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in L_p(\Omega) : \forall \alpha \leq n, f^{(\alpha)} \in L_p(\Omega) \right\}, \quad (\alpha, n) \in \mathbb{N}_0, \quad p \in [1, +\infty). \quad (2.2)$$

Perché $\mathbb{W}^{n,p}(\Omega)$ sia ben definito, è sufficiente richiedere che $f^{(\alpha)}$ (la derivata α -esima di f) sia differenziabile quasi ovunque in Ω e coincida quasi ovunque con l'integrale di Lebesgue della sua derivata. Inoltre, una volta definita la norma

$$\|f\|_{\mathbb{W}^{n,p}(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha=0}^n \|f^{(\alpha)}\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega} [f^{(\alpha)}(x)]^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathbb{W}^{n,p}(\Omega), \quad (2.3)$$

la coppia $(\mathbb{W}^{n,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbb{W}^{n,p}(\Omega)})$ identifica uno spazio di Banach. Il caso $p = 2$ riveste un ruolo speciale nella teoria degli spazi di Sobolev e per esso è stata introdotta la notazione $\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{W}^{n,2}$; in questo caso, infatti, la norma (2.3) soddisfa la regola del parallelogramma ed è quindi indotta da un prodotto scalare, definito in termini di prodotti scalari in L_2 :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}^n(\Omega)} := \sum_{\alpha=0}^n \langle f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)} \rangle_{L_2(\Omega)} = \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega} f^{(\alpha)}(x) g^{(\alpha)}(x) dx, \quad (f, g) \in \mathbb{H}^n(\Omega). \quad (2.4)$$

Si dimostra che $(\mathbb{H}^n(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^n(\Omega)})$ è uno spazio di Hilbert. In Fisica si ha spesso a che fare con problemi le cui soluzioni si annullano sulla frontiera del dominio di integrazione; in tal caso lo spazio $\mathbb{H}^n(\Omega)$ non è adatto ed è opportuno considerarne una restrizione. Un sottospazio ricorrente è identificato dalla coppia $(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)})$, dove

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{H}^1(\Omega) : f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\}, \quad \langle f, g \rangle_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} f'(x) g'(x) dx. \quad (2.5)$$

Si dimostra che, munito del prodotto scalare (2.5), $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ è completo. A tal proposito, enunciano il seguente teorema:

(DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ) – Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto e limitato. $\exists k_{\Omega} \in \mathbb{R}^+ \ni \|h\|_{L_2(\Omega)} \leq k_{\Omega} \|h'\|_{L_2(\Omega)}, \forall h \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Grazie alla precedente e poiché, per definizione, $\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_0$, si ha che $(1 + k_{\Omega})^{-1} \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1$, ovvero le due norme sono equivalenti; segue che \mathbb{H}_0^1 è di Banach rispetto a $\|\cdot\|_0$ (se uno spazio normato è completo allora è tale ogni altro spazio normato sullo stesso spazio vettoriale dotato di norma equivalente) ed è quindi di Hilbert rispetto ad $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Si noti che, per semplicità di notazione, si è posto $\|\cdot\|_0 \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_1 \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$.

2.4 Teorema di Riesz–Fréchet

Richiamiamo le definizioni di funzionale lineare limitato, spazio duale topologico ed algebrico.

(DEFINIZIONE) FUNZIONALE LINEARE LIMITATO - Sia V uno spazio normato definito sul campo scalare K ed $f : V \rightarrow K$ un funzionale lineare su K , ovvero tale per cui $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V$, $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$, $(\alpha, \beta) \in K$. Diremo che f è limitato se e solo se $\exists k \in \mathbb{R}^+$ e' $|f(x)| \leq k\|x\|$.

Si dimostra che ogni funzionale lineare limitato è continuo ed, in particolare, uniformemente continuo¹⁴. L'insieme dei *funzionali lineari* definiti su V è detto **spazio duale algebrico** di V e viene spesso indicato con V^* al fine di distinguerlo dal **duale topologico** V' di V , che invece costituisce l'insieme dei *funzionali lineari limitati* su V . Diversamente dagli spazi finito dimensionali, negli spazi infinito dimensionali non tutti i funzionali lineari sono limitati e quindi V' può non coincidere con V^* . Si osservi che sia V^* che V' sono spazi lineari normati, in quanto possono essere muniti della norma

$$\|f\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in V \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{|f(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in V \\ \|\mathbf{x}\|=1}} |f(\mathbf{x})|, \quad f \in V^*; \quad (2.6)$$

dalla (2.6), la condizione di limitatezza di f si può riscrivere come $|f(\mathbf{x})| \leq \|f\|\|\mathbf{x}\|$. Enunciamo ora il

TEOREMA (RIESZ-FRÉCHET) - Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed $f : \mathcal{H} \rightarrow K$ un funzionale lineare limitato. Allora $\forall f \in \mathcal{H}'$, $\exists! \mathbf{z}_f \in \mathcal{H}$ e' $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{z}_f, \mathbf{x} \rangle$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$; inoltre $\|\mathbf{z}_f\| = \|f\|$.

Ciò significa che una volta assegnato un funzionale lineare limitato su \mathcal{H} , è automaticamente fissata la sua rappresentazione, ovvero esiste una corrispondenza biunivoca tra \mathcal{H} ed \mathcal{H}' .

Esempi

- FUNZIONALE LINEARE NON LIMITATO SU UNO SPAZIO INFINITO DIMENSIONALE

Sia $I \equiv [-1, 1]$ e $\delta_0 : C^0(I) \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare, tale che $\phi(x) \xrightarrow{\delta_0} \phi(0)$, $\forall \phi \in C^0(I)$; sia inoltre definita su $C^0(I)$ la norma $\|\psi\| \equiv \int_I |\phi(x)| dx$. Per come definito, δ_0 è non limitato; se così non fosse sarebbe possibile scegliere una $\psi \in C^0(I)$ di norma unitaria sicché $|\psi(0)| \leq \|\delta_0\|\|\psi(x)\| = |\psi(0)|$, il che è assurdo. Ciò mostra che nel caso di spazi infinito dimensionali, lo spazio duale algebrico ed il duale topologico non coincidono necessariamente.

- EQUAZIONE DI POISSON E GABBIA DI FARADAY

Sia ϕ il potenziale elettrostatico di una cavità Ω messa a massa (una *gabbia di Faraday*) e ρ la sua densità di carica. Provare che esiste un'unica soluzione del problema generale dell'elettrostatica¹⁵

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \\ \phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Individuiamo preliminarmente lo spazio delle soluzioni del problema. Poiché $Q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ (Q indica la carica totale contenuta in Ω) è necessario imporre che $\rho \in L_1(\Omega)$; tuttavia, dalla *disuguaglianza di Cauchy–Schwarz* segue che la sommabilità quadrata implica la sommabilità ed è quindi possibile richiedere che $\rho \in L_2(\Omega)$ (la convenienza è dovuta al fatto che L_2 è uno spazio di Hilbert mentre L_1 è al più di Banach). Di conseguenza, le eventuali soluzioni del problema (2.7) andranno ricercate in $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$, ovvero nel secondo spazio di Sobolev delle funzioni in $L_2(\Omega)$ che si annullano sulla frontiera (si veda nota 12, p.7). In realtà, il problema può essere opportunamente

¹⁴Dalla limitatezza, infatti, segue che $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V$, $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $k \in \mathbb{R}^+$.

¹⁵In Matematica, un simile problema è noto come *problema (al contorno) di Dirichlet*. Esso consiste nel dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione alle derivate parziali che assuma un determinato valore sulla frontiera di una limitata regione (in genere un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n).

semplificato: infatti, moltiplicando ambo i membri della (2.7) per una $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, osservando che $\nabla \cdot (v \nabla \phi) = \nabla v \cdot \nabla \phi + v \nabla^2 \phi$ ed applicando il *teorema di Gauss*, si trova che

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} - 4\pi \int_{\Omega} v \rho \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

dalla quale si ricava la cosiddetta *formulazione debole dell'equazione di Poisson*

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f \, d\mathbf{x}, \quad f \equiv 4\pi\rho. \quad (2.8)$$

Di conseguenza è sufficiente richiedere che $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e dimostrare che esiste una ed una sola $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ soddisfacente l'equazione integrale (2.8). A tal fine, si osservi che il primo membro della (2.8) corrisponde all'estensione su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ del prodotto scalare (2.5) definito su $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, rispetto al quale $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ è completo. Introducendo quindi il funzionale

$$F[v(\mathbf{x})] \equiv \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.9)$$

la (2.8) può essere riscritta nella forma $F[v] = \langle v, \phi \rangle_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ ed il problema può essere risolto dimostrando la linearità e la limitatezza di $F[v]$. Circa la linearità, essa discende banalmente dalla distributività della moltiplicazione e dall'additività dell'integrazione; la limitatezza, invece, si prova adoperando la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (CV) su $F[v]$ e la disuguaglianza di Poincaré (P) su v (notare che $\|h'\|_{L_2} = \|h\|_{\mathbb{H}_0^1}$; si veda nota 12, p.7). In definitiva, si ottiene che

$$|F[v]| = |\langle v, f \rangle_{L_2(\Omega)}| \stackrel{\text{CV}}{\leq} \|v\|_{L_2(\Omega)} \|f\|_{L_2(\Omega)} \stackrel{\text{P}}{\leq} k_{\Omega} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \equiv \tilde{k}_{f,\Omega} \|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)},$$

ovvero $F[v]$ è un funzionale lineare e limitato. Di conseguenza, per il teorema di Riesz–Fréchet $\exists! v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ che soddisfa la (2.8).

◦ INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI RIESZ–FRÉCHET

Le rette nel piano date da $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$ aventi la stessa pendenza costituiscono una famiglia. Analogamente nel caso dei piani nello spazio. In generale, introducendo la **codimensione** come dimensione del complemento ortogonale, si può definire **iperpiano** un *sottospazio di codimensione 1*. Sia quindi \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed $F \in \mathcal{H}'$ un funzionale lineare limitato. Si consideri l'insieme $M = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} : F(\mathbf{x}) = 0\}$; questo sottospazio è definito dagli $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ tali che $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Per il teorema di Riesz–Fréchet, esiste un unico $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ soddisfacente la precedente proprietà e dunque $M^{\perp} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : \mathbf{y} = \alpha \mathbf{z}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ e la $\text{cod}\{M\} = 1$; lo spazio M identifica pertanto un iperpiano.

2.5 Basi di Hamel e basi di Schauder

DEFINIZIONE (SOTTOSPAZIO GENERATO) - Sia V uno spazio vettoriale su un campo K ed $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ un sottoinsieme di V . Si definisce **span** di M (o sottospazio generato da M) l'insieme di tutte le combinazioni lineari degli elementi di M , ovvero

$$\text{Span}\{M\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K\}.$$

Dalla precedente segue la definizione di base data in algebra lineare:

DEFINIZIONE (BASE DI HAMEL) - Un sottoinsieme linearmente indipendente B di V che genera V è una base (di Hamel) per V .

In altre parole, se $B = \{v_i\}_{i \in I}$ è una base di Hamel per V , parametrizzata da un insieme ordinato I di indici, allora $\forall v \in V$ esiste una successione finita $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ di elementi di K tali che $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. In particolare, nel caso in cui I sia finito, la definizione coincide con quella usuale in algebra lineare. Inoltre, grazie al *lemma di Zorn*, si dimostra che *ogni spazio vettoriale $V \neq \emptyset$ (finito o infinito dimensionale) ammette una base di Hamel*.

Le basi di Hamel, tuttavia, risultano inadeguate nel momento in cui V viene munito di una topologia¹⁶. In tal caso risulta conveniente adoperare la seguente

DEFINIZIONE (BASE DI SCHAUDER) - *Sia V uno spazio topologico sul campo K e $B = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione linearmente indipendente di V . Diremo che B è una base di Schauder per V se*

$$\overline{\text{Span}\{B\}} = V.$$

Ciò significa che, se B è una base di Schauder per V , allora $\forall v \in V$ esiste un'unica successione di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di K tali che $v = \sum_n a_n v_n$. Se uno spazio normato V ammette una base di Schauder allora esso è separabile, mentre l'inverso non è necessariamente garantito.

Esempi

- o Dallo studio degli sviluppi in serie di Fourier è noto che l'insieme

$$\circledast \equiv \left\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (2.10)$$

è formato da vettori linearmente indipendenti e costituisce una base per lo spazio vettoriale (reale o complesso) delle funzioni definite in $L_2([0, \ell])$. Se \circledast fosse una base di Hamel, allora $\forall f \in L_2([0, \ell])$ esisterebbero due successioni di scalari $\{a_1, \dots, a_n\}$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ tali che

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=0}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right).$$

Tuttavia, la maggior parte delle funzioni $f \in L_2([0, \ell])$ non possono essere semplicemente rappresentate attraverso una combinazione lineare finita di elementi di \circledast , che, quindi, non costituisce una base di Hamel.

2.6 Famiglie ortonormali e disuguaglianza di Bessel

DEFINIZIONE (FAMIGLIA ORTONORMALE) - *Sia \mathcal{H} uno spazio prehilbertiano ed $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di elementi di \mathcal{H} . $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una famiglia ortonormale di \mathcal{H} se $\forall \alpha, \beta \in I$ $\langle \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$.*

Si noti che, indipendentemente dalla numerabilità di I , una famiglia ortonormale di vettori è sempre un insieme linearmente indipendente. Il vantaggio che si ha nell'utilizzo delle famiglie ortonormali invece delle famiglie linearmente indipendenti è legato alla determinazione dei coefficienti delle combinazioni lineari; partiamo dal caso di *successioni ortonormali finite*. Se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è ortonormale in \mathcal{H} e se $\mathbf{x} \in \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, è immediato provare che $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_k$. Vale, inoltre, il seguente

TEOREMA (DISUGUAGLIANZA DI BESSEL) - *Sia $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1, \dots, n}$ una successione ortonormale di \mathcal{H} . Allora, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, il vettore $\mathbf{y} \in \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ che ha distanza minima da \mathbf{x} è*

$$\mathbf{y} \equiv \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_k \quad (2.11)$$

¹⁶Dal teorema della categoria di Baire, infatti, segue che una base di Hamel per uno spazio di Banach è non numerabile.

e vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2. \quad (2.12)$$

I prodotti scalari $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$ nella (2.12) sono detti coefficienti di Fourier di \mathbf{x} rispetto a $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1, \dots, n}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y}' \in \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Dall'ortonormalità degli \mathbf{e}_k si trova che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle - \alpha_k|^2; \quad (2.13)$$

il vettore (2.11), quindi, minimizza la distanza da \mathbf{x} . Inoltre, poiché $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^2 \geq 0$, risulta

$$\sum_{k=1}^n |\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

nella quale la somma forma una successione monotona non decrescente superiormente limitata e quindi convergente, il che implica la (2.12). \square

Spesso, però, si dispone di successioni finite linearmente indipendenti e non ortonormali. In tal caso il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla successione linearmente indipendente $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1, \dots, n}$ di \mathcal{H} , permette di ricavare la successione ortonormale $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1, \dots, n}$ i cui elementi sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\equiv \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}, \\ \mathbf{e}_2 &\equiv \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, & \mathbf{v}_2 &\equiv \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{e}_1, \\ &\vdots & &\vdots \\ \mathbf{e}_n &\equiv \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}, & \mathbf{v}_n &\equiv \mathbf{x}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

La successione risultante è tale per cui $\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\forall n = 1, 2, \dots$.

Cosa si può dire sui coefficienti di Fourier nel caso in cui l'insieme di indici I risulti *numerabile*? In tal caso, il problema si traduce nello studio delle proprietà di convergenza della serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \mathbf{e}_k$, con $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di scalari ed $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione ortonormale. Vale il seguente

TEOREMA (COEFFICIENTI DI FOURIER – INSIEMI NUMERABILI) - Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione ortonormale di \mathcal{H} . Allora:

1. la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \mathbf{e}_k$ converge se e solo $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^2$ converge;
2. se $\mathbf{x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \mathbf{e}_k$ (somma della serie), allora $\alpha_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$;
3. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_k$ converge (non necessariamente ad \mathbf{x});
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ si ha che $\mathbf{x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle|^2$.

Infine, se $\{\mathbf{e}_\tau\}_{\tau \in I}$ è una famiglia ortonormale *non numerabile* di \mathcal{H} , è ancora possibile formare i coefficienti di Fourier $\langle \mathbf{e}_\tau, \mathbf{x} \rangle$ di un $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ e si può dimostrare il seguente

TEOREMA (COEFFICIENTI DI FOURIER – INSIEMI NON NUMERABILI) - Sia \mathcal{H} uno spazio prehilbertiano ed $\{\mathbf{e}_\tau\}_{\tau \in I}$ una famiglia ortonormale di \mathcal{H} . Si ha che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ esiste al più una quantità numerabile

di coefficienti di Fourier $\langle \mathbf{e}_\tau, \mathbf{x} \rangle$ diversi da zero. Inoltre, riordinando gli \mathbf{e}_τ con $\langle \mathbf{e}_\tau, \mathbf{x} \rangle \neq 0$ ad \mathbf{x} fissato, restano valide le considerazioni del precedente teorema ed, in particolare, la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{\tau \in I} |\langle \mathbf{e}_\tau, \mathbf{x} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Infine, se \mathcal{H} è completo, la serie $\sum_{\tau \in I} \langle \mathbf{e}_\tau, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_\tau$ converge e la sua somma non dipende dal riordino degli \mathbf{e}_τ con coefficiente di Fourier diverso da zero.

Esempi

o ELETTRONE IN UN FILO QUANTICO

Sia dato un elettrone confinato in un filo quantico di lunghezza ℓ ; abbiamo osservato che $\mathcal{H} = L_2([0, \ell])$. Due esempi di famiglie ortonormali su \mathcal{H} (già incontrate in precedenza) sono:

$$\mathcal{U} \equiv \left\{ u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, x \in [0, \ell] \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{V} \equiv \left\{ v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \frac{n\pi x}{\ell}, x \in [0, \ell] \right\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (2.15)$$

\mathcal{U} e \mathcal{V} sono famiglie ortonormali alla luce delle relazioni di ortogonalità del seno e del coseno:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\ell \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx = \int_0^\ell \cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \ell/2 & \text{se } n = m \end{cases}.$$

o FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO ℓ

Sia $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo ℓ , ovvero tale che $f(x + \ell) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. In tal caso conviene identificare lo spazio $L_2([0, \ell])$ con $L_2(\mathbb{T}^1)$, dove $\mathbb{T}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \ell^2/(4\pi^2)\}$, ovvero rappresenta la circonferenza di lunghezza ℓ centrata nell'origine. Lo spazio $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^1)$ è di Hilbert ed in esso è contenuta la famiglia

$$\mathcal{E} \equiv \left\{ e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} e^{ik\omega x}, x \in [0, \ell] \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{\ell}, \quad (2.16)$$

nota come *sistema trigonometrico*. La famiglia è ortonormale in quanto $\|e_k\|^2 = 1$ e $\langle e_j, e_k \rangle = \int_{[0, \ell]} \exp\{i\omega(k - j)x\} dx = 0$ per $k \neq j$ a causa delle relazioni di ortogonalità e del fatto che

$$\int_0^\ell \sin \frac{2k\pi x}{\ell} \cos \frac{2j\pi x}{\ell} dx = 0 = \int_0^\ell \cos \frac{2k\pi x}{\ell} \sin \frac{2j\pi x}{\ell} dx, \quad k \neq j.$$

Gli elementi della famiglia (2.16) sono le uniche soluzioni ammesse dell'equazione agli autovalori $He_k = \varepsilon_k e_k$, con $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ ed $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

2.7 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Le famiglie ortonormali interessanti negli spazi di Hilbert sono quelle che consistono in un numero "sufficientemente grande" di elementi perché ogni elemento dello spazio possa essere rappresentato o approssimato con sufficiente accuratezza utilizzando questi insiemi. A tal proposito, diamo la seguente

DEFINIZIONE (BASE ORTONORMALE) - Sia $M = \{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia ortonormale di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Se M è massimale allora è una base ortonormale (o hilbertiana) per \mathcal{H} .

Si noti che, a meno che \mathcal{H} non sia finito dimensionale, la base qui definita non è una base nel senso dell'algebra (una base di Hamel), mentre è coerente con la definizione di base in uno spazio topologico (base di Schauder). Anche qui, grazie al lemma di Zorn, è possibile provare che *ogni spazio di Hilbert $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ammette una base ortonormale*. Inoltre, tutte le basi ortonormali definite nel medesimo spazio di Hilbert hanno la medesima cardinalità (dimensione di Hilbert). La definizione precedente (di base ortonormale) si esprime equivalentemente attraverso il seguente

TEOREMA (COMPLEMENTO ORTOGONALE) - $M = \{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una base per \mathcal{H} se e solo se $M^\perp = \{0\}$.

Un altro criterio per stabilire se un insieme ortonormale è una base si desume dal seguente

TEOREMA (CRITERIO DI PARSEVAL) - Una famiglia ortonormale M in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è una base se e solo per ogni vettore di \mathcal{H} vale l'uguaglianza di Parseval, ovvero se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}, \quad \sum_{\alpha \in I} |\langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} \rangle|^2 = \|\mathbf{x}\|^2. \quad (2.17)$$

Si può dimostrare inoltre che $M = \{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una base ortonormale di \mathcal{H} se:

1. l'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è denso in \mathcal{H} , ovvero se

$$\overline{\text{Span}\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}} = \mathcal{H};$$

2. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ si ha che $\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in I} \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_\alpha$, dove la somma è estesa a tutti gli \mathbf{e}_α corrispondenti a coefficienti di Fourier di \mathbf{x} non nulli;
3. $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è chiusa, ovvero se $\exists \mathbf{x} \in \mathcal{H} \quad \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in I \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
4. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H}$ si ha che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\alpha \in I} \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} \rangle^* \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{y} \rangle$ oppure, in notazione di Dirac, $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{\alpha \in I} \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_\alpha \rangle \langle \mathbf{e}_\alpha | \mathbf{y} \rangle$, il che equivale a richiedere la completezza $\sum_{\alpha \in I} |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{e}_\alpha| = \mathbb{1}$.

Consideriamo, infine, il caso di spazi di **Hilbert separabili**. Tali spazi sono di grande interesse in Fisica ed, in particolare, in Meccanica Quantistica, dove la richiesta di separabilità è indispensabile al fine dell'interpretazione operativa dei risultati teorici¹⁷. La separabilità di uno spazio di Hilbert può essere relazionata con l'esistenza in esso di una base ortonormale, secondo quanto affermato dal seguente

TEOREMA (SPAZI DI HILBERT SEPARABILI) - Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Ne segue che

- i) se \mathcal{H} è separabile, ogni famiglia ortonormale di \mathcal{H} è numerabile;
- ii) se $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale di \mathcal{H} , allora \mathcal{H} è separabile.

Esempi

o ELETTRONE IN UN FILO QUANTICO

Nel §2.6 abbiamo introdotto le famiglie ortonormali \mathcal{U} e \mathcal{V} di $\mathcal{H} = L_2([0, \ell])$. Diversamente da \mathcal{U} , la famiglia \mathcal{V} non è massimale in quanto la condizione 3. precedente non è soddisfatta: $\langle v_n, 1 \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$; essa non è, quindi, una base hilbertiana. Se ne può considerare però l'estensione $\mathcal{V}' \equiv \mathcal{V} \cup \{1/\sqrt{\ell}\}$, la quale è una famiglia ortonormale massimale.

o POLINOMI DI HERMITE-CHEBYSHEV

Sia $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ lo spazio di Hilbert sul quale supponiamo essere definita l'hamiltoniana $h =$

¹⁷Richiedere la separabilità equivale ad affermare l'impossibilità pratica di fissare esattamente il valore di osservabili dotate di spettro continuo. Le procedure operative di preparazione di una misura, infatti, sono numerabili e numerabili devono anche essere i raggi ortogonali di \mathcal{H}_S .

$-\frac{1}{2}\partial_{x^2}^2 + \frac{1}{2}x^2$. Le soluzioni dell'equazione agli autovalori $h\phi_n = \varepsilon_n\phi_n$ si esprimono in funzione dei polinomi di Hermite-Chebyshev:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad \varepsilon_n = n + \frac{1}{2}.$$

I polinomi di Hermite discendono da un processo di ortonormalizzazione alla Gram-Schmidt e costituiscono una base hilbertiana. Ad esempio, ortonormalizzando la famiglia $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ di polinomi ortogonali nell'intervallo $[-1, 1]$ si ottengono i polinomi di Legendre.

o TEOREMI DI CONVERGENZA PER LE SERIE DI FOURIER

Sia $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo ℓ appartenente allo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^1)$. Nel §2.6 abbiamo mostrato che il sistema trigonometrico costituisce una famiglia ortonormale di $L_2(\mathbb{T}^1)$; poiché \mathcal{E} è numerabile, si può pensare di applicare il teorema sui coefficienti di Fourier per insiemi numerabili e concludere che $\forall f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ la serie (di Fourier di f)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega x}, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int_0^\ell f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (2.18)$$

è convergente, ma non necessariamente ad f . Numerosi matematici si interessarono allo studio delle proprietà di convergenza delle serie di Fourier ed uno dei primissimi risultati fu ottenuto da Dirichlet (il quale fu allievo di Fourier). Il teorema si enuncia nel modo seguente

TEOREMA (DI DIRICHLET PER LE SERIE DI FOURIER) - *Sia $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione ℓ -periodica, regolare a tratti¹⁸, avente un numero finito di punti di discontinuità ed un numero finito di punti estremali. Allora*

$$\forall x \in [0, \ell], \quad \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega x} \xrightarrow{k} f^*(x) := \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

dove la convergenza va intesa in senso puntuale ed $f(x^\pm) \equiv \lim_{y \rightarrow x^\pm} f(y)$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo chiuso nel quale non cadono punti di discontinuità di f , ovvero: se

$$f \in C^1([0, \ell]) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega x} \xrightarrow{k} f(x), \quad \forall x \in [0, \ell].$$

Sebbene potenti, i precedenti risultati sono difficilmente applicabili in contesti pratici. Basti pensare al campionamento di una tensione alternata mediante un voltmetro AC od un oscilloscopio: la misura del segnale non è mai continua e, per di più, è sempre accompagnata da delle bande d'errore. Ciò significa che il grafico del segnale non può essere univocamente ricostruito e non vi è quindi alcuna garanzia che le ipotesi del precedente teorema risultino soddisfatte.

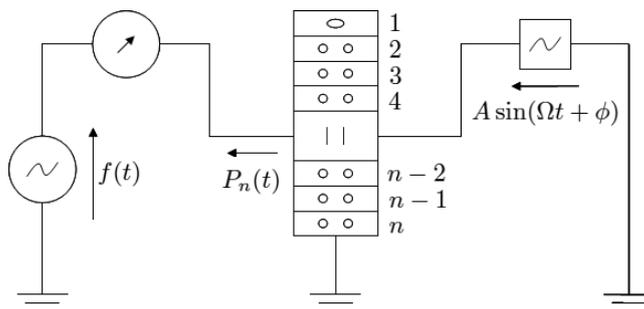
Per avere un'idea di ciò che avviene praticamente, si consideri, ad esempio, un circuito composto da un generatore di tensione alternata $f(t)$ di periodo ℓ , un voltmetro AC ed un resistore di resistenza R . Trascurando gli effetti dovuti al voltmetro, è noto che l'energia totale dissipata per effetto Joule dal resistore in un periodo è $E_{\text{Joule}} = \frac{1}{R} \int_0^\ell f(t)^2 dt$ con la condizione che $E_{\text{Joule}} < \infty$. Di conseguenza, è necessario richiedere che $f(t) \in L_2(\mathbb{T}^1)$. Quali sono allora le proprietà di convergenza della serie di Fourier nell'ipotesi in cui $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$? Esistono a tal riguardo alcuni importanti risultati. Preliminarmente, enunciamo il seguente

¹⁸Ricordiamo che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *regolare a tratti* su $[a, b]$ se esiste una partizione $\{a \equiv x_0, x_1, \dots, x_n \equiv b\}$ di $[a, b]$ tale che, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, la restrizione di f all'intervallo aperto (x_{i-1}, x_i) ammetta prolungamento di classe C^1 sull'intervallo chiuso $[x_{i-1}, x_i]$.

TEOREMA (RIESZ-FISCHER) - Sia $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n f(x)\|_{L_2(\mathbb{T}^1)} = 0, \quad S_n f(x) \equiv \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x}.$$

Il teorema afferma, in altre parole, che se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è di quadrato sommabile su I , allora la serie di Fourier di f converge ad f in *media quadratica*, ovvero rispetto alla norma definita in $L_2(I)$ ¹⁹. Possiamo fare un esempio pratico in cui il teorema di Riesz-Fischer interviene. Si consideri il circuito in figura: esso è composto da un generatore di tensione alternata $f(t)$, da un voltmetro AC, da un banco di generatori di armoniche e da un ulteriore generatore producente un segnale del tipo $A \sin(\Omega t + \phi)$.



Il banco di generatori di armoniche permette di modificare, mediante le manopole, ampiezza e fase del segnale in ingresso, fornendo in uscita una combinazione lineare delle prime n armoniche fondamentali. Supponendo che $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ di periodo ℓ e sapendo che il voltmetro AC misura la varianza del segnale, a quale combinazione delle manopole del banco corrisponde la somma parziale n -esima della serie di Fourier di f ? Poiché il voltmetro campiona varianze, è evidente che, nel caso in questione, le sue misure forniscono i valori di $\sigma \equiv (\ell)^{-1/2} \|f(t) - P_n(t)\|_{L_2(\mathbb{T}^1)}$, dove $P_n(t)$ è un generico polinomio trigonometrico corrispondente al segnale in uscita dal banco. Per il teorema di Riesz-Fischer, la serie di Fourier di f converge in media quadratica ad f e quindi la somma parziale n -esima della serie di Fourier di f potrà essere ottenuta determinando la combinazione delle manopole che minimizza σ .

Infine, riportiamo un importante teorema dimostrato nel 1966 da Lennard Carleson riguardante la convergenza della serie di Fourier di funzioni di quadrato sommabile:

TEOREMA (CARLESON) - Sia $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$, allora

$$S_n f(x) \equiv \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x} \xrightarrow{n} f(x), \quad \text{quasi ovunque in } [0, \ell].$$

Di questo teorema si può dare un'interpretazione probabilistica. Sia $f(t)$ un segnale periodico caratterizzato da numerose oscillazioni: onde evitare di incappare in valori particolari del segnale è preferibile effettuare un campionamento casuale. Sia dunque X la variabile aleatoria che supponiamo essere distribuita uniformemente sull'intervallo di campionamento I . Dalla teoria delle probabilità sappiamo che la probabilità che X cada nell'intervallo $I' \subset I$ è data dal rapporto tra le misure di Lebesgue degli intervalli in questione, ovvero $P(X \in I') = \mu(I')/\mu(I)$. Secondo il teorema di Carleson, la convergenza della serie di Fourier di $f(t)$ è puntuale a meno di un insieme di punti Λ di misura (di Lebesgue) nulla, ovvero a meno di un insieme di punti statisticamente proibiti e cioè tali per cui $P(X \in \Lambda) = 0$.

¹⁹Si noti che $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ è anche condizione sufficiente: se la serie di Fourier di una funzione periodica f converge in media quadratica ad f su I allora f è di quadrato sommabile su I .

3 Complementi di Analisi Funzionale negli spazi di Hilbert

3.1 Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert

In questa sezione studieremo alcune delle proprietà principali dell'operazione di prodotto tensoriale di spazi di Hilbert²⁰; come noto, tale operazione permette di costruire “nuovi” spazi di Hilbert a partire da (almeno) uno spazio di Hilbert assegnato. Preliminarmente, si consideri il seguente ragionamento: siano \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert sul medesimo campo K e sia $(\cdot) \otimes (\cdot) : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow K$ una *forma sesquilineare*²¹ tale che $\forall \phi_1 \in \mathcal{H}_1$ e $\forall \phi_2 \in \mathcal{H}_2$

$$(\psi_1, \psi_2) \xrightarrow{\phi_1 \otimes \phi_2} \langle \psi_1, \phi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

Sia quindi \mathcal{E} l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di tali forme. Poiché \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 sono prehilbertiani, è possibile munire \mathcal{E} del prodotto scalare

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad (3.1)$$

che è *ben definito* e *definito positivo*. Lo spazio \mathcal{E} è dunque prehilbertiano e per il teorema del completamento esiste uno spazio \mathcal{H} completo rispetto al prodotto scalare (3.1).

DEFINIZIONE (PRODOTTO TENSORIALE DI SPAZI DI HILBERT) - *Dati due spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 , si definisce prodotto tensoriale di \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 lo spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ottenuto (a meno di isomorfismi) come completamento di \mathcal{E} rispetto al prodotto scalare (3.1).*

Vale inoltre un'importante proprietà legata alle basi ortonormali, riportata nel seguente

LEMMA (BASI ORTONORMALI IN PRODOTTI TENSORIALI) - *Siano $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ ed $\{\mathbf{f}_j\}_{j \in J}$ due basi ortonormali di \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 rispettivamente; allora $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.*

Il prodotto tensoriale di spazi di Hilbert emerge in modo naturale ogni qual volta si consideri la composizione di due o più sistemi. Come esempio, si considerino gli spazi $\mathcal{H}_1 = L_2(E \subseteq \mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{H}_2 = L_2(F \subseteq \mathbb{R}^m)$ e siano $\psi \in L_2(E)$ e $\phi \in L_2(F)$. A partire da queste ultime, si costruisce la funzione fattorizzata $\xi = \psi\phi : E \times F \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$; così definita, la funzione ξ è una funzione di $(m+n)$ variabili per la quale risulta essere

$$\iint_{E \times F} |\xi(\mathbf{x}; \mathbf{y})|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \left(\int_E |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left(\int_F |\phi(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right) < \infty,$$

avendo applicato un corollario del *teorema di Fubini*²² all'integrale esteso al prodotto cartesiano $E \times F$.

²⁰Si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 1, pag. 49-54.*

²¹DEFINIZIONE (FORMA SESQUILINEARE) - Siano X ed Y due spazi vettoriali sul medesimo campo K . Si dice *forma sesquilineare* su $X \times Y$ un'applicazione $h : X \times Y \rightarrow K$ tale che $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ risulta

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2) &= \alpha h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \beta h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \\ h(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= \alpha^* h(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \beta^* h(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

In particolare, se X ed Y sono reali, la forma si dice *bilineare* (essendo lineare in entrambi gli argomenti). Infine, se X ed Y sono normati, è possibile definire la norma di h (da intendere sullo spazio delle forme sesquilineari definite su $X \times Y$)

$$\|h\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in X - \{0\} \\ \mathbf{y} \in Y - \{0\}}} \frac{|h(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in X: \|\mathbf{x}\|=1 \\ \mathbf{y} \in Y: \|\mathbf{y}\|=1}} |h(\mathbf{x}, \mathbf{y})|,$$

ed affermare che h è *limitata* se e solo se $|h(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|h\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

²²Il teorema di Fubini si enuncia nel modo seguente: siano \mathfrak{A} e \mathfrak{B} due spazi di misura (spazi vettoriali muniti di una σ -algebra e di una misura \mathfrak{d}) completi unidimensionali e sia $f(x, y)$ una funzione misurabile su $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Se $\int_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} |f(x, y)| d(x, y) < \infty$, dove l'integrazione è effettuata rispetto alla misura definita su $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, allora

$$\int_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathfrak{A}} \left(\int_{\mathfrak{B}} f(x, y) d\mathfrak{y} \right) d\mathfrak{x} = \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{A}} f(x, y) d\mathfrak{x} \right) d\mathfrak{y}.$$

Come corollario, segue immediatamente che se $f(x, y) = g(x)h(y)$, allora $\int_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathfrak{A}} g(x) d\mathfrak{x} \int_{\mathfrak{B}} h(y) d\mathfrak{y}$.

Di conseguenza $\xi \in L_2(E \times F)$ rispetto alla misura di Lebesgue definita su $E \times F$. Supponiamo dunque che $L_2(E)$ ed $L_2(F)$ siano separabili rispetto alle misure di Lebesgue su di essi definite; in tal caso sappiamo che esistono due basi ortonormali $\{\psi_k\}_{k=1,\dots,n} \in L_2(E)$ ed $\{\phi_l\}_{l=1,\dots,m} \in L_2(F)$. Sia allora $\mathcal{U} : \psi_k \otimes \phi_l \in L_2(E) \otimes L_2(F) \mapsto \psi_k \phi_l \in L_2(E \times F)$: tale applicazione è lineare e costituisce un isomorfismo tra $L_2(E) \otimes L_2(F)$ ed $L_2(E \times F)$ in quanto mappa biunivocamente basi ortonormali del primo spazio in basi ortonormali del secondo. Si noti, infatti, che se $f \in L_2(E)$ e $g \in L_2(F)$, allora

$$\mathcal{U}(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{U} \left(\sum_k c_k \psi_k \otimes \sum_l d_l \phi_l \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k,l} c_k d_l \mathcal{U}(\psi_k \otimes \phi_l)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}).$$

Per questa proprietà si usa dire che $L_2(E) \otimes L_2(F)$ ed $L_2(E \times F)$ sono *naturalmente isomorfi*. In particolare si osservi che se $E = \mathbb{R} = F$, allora $L_2(\mathbb{R}^2)$ è naturalmente isomorfo ad $L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R})$.

Consideriamo infine le proprietà della dimensione del prodotto tensoriale. Siano \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert e sia \mathcal{H} il loro prodotto tensoriale. Dal lemma sulle basi ortonormali di prodotti tensoriali segue che se \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 sono separabili, allora $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}_1 \dim \mathcal{H}_2$, essendo $\dim(\cdot)$ la dimensione di Hilbert di detti spazi. Più in generale, vale il seguente

TEOREMA (DIMENSIONE DI PRODOTTI TENSORIALI) - *Siano $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ degli spazi di Hilbert. Allora*

$$\dim \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k = \prod_{k=1}^n \dim \mathcal{H}_k. \quad (3.2)$$

In particolare, se $\mathcal{H}_1 = \dots = \mathcal{H}_n \equiv \mathcal{D}$, si usa definire *potenza tensoriale n -esima* di \mathcal{D} lo spazio

$$\mathcal{D}^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k. \quad (3.3)$$

Sovente in letteratura si usa indicare \mathcal{D} come lo *spazio monoparticellare* (si noti che $\dim \mathcal{D}^{\otimes n} = (\dim \mathcal{D})^n$). La scelta di questo nome è da interpretarsi alla luce di un quinto postulato, che enunciamo di seguito.

QUINTO POSTULATO

Sia \mathcal{S} un sistema fisico composto da un numero N finito di sottosistemi $\{\mathcal{S}_n\}_{n=1,\dots,N}$. Allora

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H}_{\mathcal{S}_n}$$

identifica lo spazio di Hilbert degli stati del sistema composto e l'osservabile A_n dell' n -esimo sottosistema corrisponde all'operatore autoaggiunto $\mathbb{1} \otimes \dots \otimes A_n \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$ di $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ ²³.

Usualmente, il sistema in esame è composto da N particelle “*elementari*” dotate di *struttura interna*, ovvero caratterizzate da un numero *finito* di gradi di libertà interni. In questo caso $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ ha una struttura del tipo $L_2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{H}_0$, dove \mathcal{H}_0 è lo spazio di Hilbert *finito dimensionale* associato ai gradi di libertà interni delle particelle²⁴. Spesso ci si riferisce ad $L_2(\mathbb{R}^{3N})$ come allo **spazio orbitale** (o dei gradi di libertà orbitali) e ad \mathcal{H}_0 come allo **spazio interno** (o dei gradi di libertà interni) del sistema.

²³Non avendo ancora introdotto il concetto di operatore, non è chiaro cosa s'intenda per *prodotto tensoriale di operatori*. Discuteremo quest'operazione più avanti, una volta descritte le proprietà degli operatori lineari su spazi di Hilbert.

²⁴L'“*elementarità*” di una particella dotata di struttura interna è riferita al fatto che \mathcal{H}_0 è finito dimensionale.

Esempi

◦ STATI FATTORIZZATI E STATI ENTANGLED

Siano \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert separabili e sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ il loro prodotto tensoriale. All'interno di \mathcal{H} è possibile distinguere due categorie di vettori: *vettori fattorizzati* e *vettori entangled*. I primi (già introdotti in precedenza) formano un insieme denso in \mathcal{H} e sono della forma

$$|\xi\rangle = \sum_{k,l} a_{k,l} |\psi_k\rangle \otimes |\phi_l\rangle = \left(\sum_{k=1}^n c_k |\psi_k\rangle \right) \otimes \left(\sum_{l=1}^m d_l |\phi_l\rangle \right) = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle;$$

i secondi, invece, sono combinazioni lineari dei precedenti e possono essere scritti nella forma

$$|\zeta\rangle = \sum_{k,l} a_{k,l} |\psi_k\rangle \otimes |\phi_l\rangle, \quad a_{k,l} \neq c_k d_l.$$

Un esempio tipico è dato dagli stati di singoletto e tripletto per la composizione di due spin 1/2. In tal caso $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^4$ (ovvero è isomorfo a \mathbb{C}^4) e gli autovettori di base associati all'insieme completo di osservabili compatibili (ICOC) $\{\mathbf{S}^2, \mathbf{S}_z, \mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2\}$ sono:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle), \quad |1, -1\rangle = |\uparrow, \downarrow\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle), \quad |1, 1\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle.$$

Nelle precedenti si è adoperata, per semplicità, la notazione $|\cdot\rangle \otimes |\cdot\rangle \equiv |\cdot, \cdot\rangle$ ed i vettori $\{|\downarrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \downarrow\rangle, |\uparrow, \uparrow\rangle\}$ sono autovettori di base associati all'ICOC $\{\mathbf{S}^2, \mathbf{S}_z, \mathbf{S}_{1,z}, \mathbf{S}_{2,z}\}$. Come si può notare, non tutti gli stati del sistema composto sono associati a vettori rappresentativi fattorizzati ma esistono anche stati entangled.

◦ SPAZIO DI HILBERT NELLA TEORIA DI PAULI PER PARTICELLE DOTATE DI SPIN

Nel §1.2 si è introdotta la rappresentazione di Pauli per particelle non relativistiche dotate di spin. In particolare, si era visto il caso di un sistema tipo atomo d'idrogeno e cioè composto da un elettrone ed un protone. Avevamo osservato che i vettori di stato del sistema composto possono essere rappresentati da "spinori" bidimensionali i cui elementi sono funzioni d'onda di quadrato sommabile su tutto lo spazio. Si era fissata, in altri termini, la rappresentazione

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{P}auli} (\psi_\uparrow(\mathbf{x}), \psi_\downarrow(\mathbf{x}))^\top, \quad \psi_\uparrow, \psi_\downarrow \in L_2(\mathbb{R}^3), \quad \langle \psi | \phi \rangle \xrightarrow{\mathcal{P}auli} \sum_{k=\uparrow, \downarrow} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}_k(\mathbf{x}) \phi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Avendo ormai introdotto il concetto di prodotto tensoriale di spazi di Hilbert, possiamo definitivamente identificare lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_S^{\mathcal{P}auli}$ associato al sistema composto come il prodotto tensoriale di $L_2(\mathbb{R}^3)$ e di \mathbb{C}^2 , ovvero $\mathcal{H}_S^{\mathcal{P}auli} = L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$.

◦ INTERPRETAZIONE ALLA LANDAU DELLA RAPPRESENTAZIONE DI PAULI

Si è detto che in rappresentazione di Pauli lo spazio di Hilbert associato a particelle non relativistiche dotate di spin corrisponde ad $\mathcal{H}_S^{\mathcal{P}auli} = L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{H}_{Spin}$. Un'interpretazione alternativa di tale rappresentazione è stata proposta da Landau²⁵: in tal caso gli elettroni vengono descritti da funzioni d'onda dipendenti da tre variabili di posizione continue (x, y, z) e da una *variabile di spin* discreta $\sigma \in \mathbb{Z}_2 := \{-1, 1\}$ che determina il valore della proiezione dello spin su una direzione scelta (asse \hat{z}). Sicché le funzioni spaziali ψ_\uparrow e ψ_\downarrow , che nella teoria di Pauli costituivano gli elementi dello spinore, son qui rimpiazzate dalle funzioni d'onda $\psi(\mathbf{x}, +1)$ e $\psi(\mathbf{x}, -1)$ rispettivamente. L'interpretazione di Landau è dunque individuata dalla rappresentazione²⁶

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}andau} \psi(\xi), \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2), \quad \langle \psi | \phi \rangle \xrightarrow{\mathcal{L}andau} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \overline{\psi}(\xi) \phi(\xi) d\xi, \quad (3.5)$$

²⁵Si veda *L. D. Landau, E. M. Lifšits, MECCANICA QUANTISTICA – TEORIA NON RELATIVISTICA, cap. VIII.*

²⁶Si noti che la sommatoria contenuta nella (3.4) va qui intesa come integrale rispetto alla variabile discreta σ .

dove $\xi \equiv (\mathbf{x}, \sigma)$ ed è *naturalmente isomorfa* alla rappresentazione non relativistica di Pauli. In questa nuova rappresentazione, le matrici di Pauli soddisfano le equazioni agli autovalori

$$\sigma_1 \psi(\sigma) = \sigma \psi(\sigma), \quad \sigma_2 \psi(\sigma) = -i\sigma \psi(-\sigma), \quad \sigma_3 \psi(\sigma) = \psi(-\sigma),$$

mentre per gli stati associati alla terza componente di spin risulta $|\uparrow\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_{\sigma,1}$ e $|\downarrow\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_{\sigma,-1}$. Nel caso, invece, in cui il sistema sia composto da due elettroni “nudi” localizzati, avremo che

$$\mathcal{H}_S = \mathcal{D}^{\otimes 2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \psi(\cdot, \cdot) : \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}_2 \text{ con } \langle \psi, \phi \rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) \phi(\sigma_1, \sigma_2) \right\}$$

e gli stati di singoletto e tripletto saranno scritti nella forma

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{\sigma_1,1} \delta_{\sigma_2,-1} - \delta_{\sigma_1,-1} \delta_{\sigma_2,1}), & |1, -1\rangle &\xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_{\sigma_1,-1} \delta_{\sigma_2,-1}, \\ |1, 0\rangle &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{\sigma_1,1} \delta_{\sigma_2,-1} + \delta_{\sigma_1,-1} \delta_{\sigma_2,1}), & |1, 1\rangle &\xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_{\sigma_1,1} \delta_{\sigma_2,1}. \end{aligned}$$

Esaminiamo, infine, il caso di un atomo di Elio: come per l'atomo d'idrogeno, si vuol tener conto degli effetti dovuti agli spin degli elettroni. Sarà allora necessario considerare sia la posizione di ciascun elettrone che il corrispondente spin. Sia allora $\mathcal{H} = [L_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)]^{\otimes 2}$ lo spazio di Hilbert associato al sistema composto dai due elettroni; sappiamo che in \mathcal{H} esistono stati fattorizzati della forma $\psi(\xi_1, \xi_2) = R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \chi(\sigma_1, \sigma_2)$. In assenza di campi magnetici esterni, l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dallo spin totale, che può quindi essere fissato. Per semplicità, supponiamo che $|\mathbf{S}_{\text{tot}}| = 0$; allora lo stato di singoletto si scriverà come

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\delta_{\sigma_1,1} \delta_{\sigma_2,-1} - \delta_{\sigma_1,-1} \delta_{\sigma_2,1}}{\sqrt{2}}.$$

Come vedremo, $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ non è arbitraria, ma dipende dalle proprietà di simmetria di $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$.

3.2 Particelle identiche e gruppo simmetrico

A differenza della meccanica classica, dove oggetti identici possono essere distinti avendo a disposizione il concetto di traiettoria, in meccanica quantistica le particelle identiche sono *indistinguibili*. Ciò ha profonde conseguenze che possono essere analizzate partendo dal semplice caso di due particelle identiche. Siano quindi \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 i sistemi ad esse associati e sia \mathcal{D} lo spazio monoparticellare in rappresentazione di Landau. A causa dell'indistinguibilità, le funzioni d'onda del sistema composto ottenute “scambiando di stato” le due particelle individuano la medesima densità di probabilità. Introduciamo dunque la *mappa involutiva* “di scambio” $\tau : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$; essa induce su $\mathcal{D}^{\otimes 2}$ l'operatore *unitario ed hermitiano*²⁷ $(\mathfrak{S}\psi)(\xi_1, \xi_2) := \alpha \psi(\xi_2, \xi_1)$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ un eventuale fattore di fase²⁸. Di conseguenza, si ha che $\psi(\xi_1, \xi_2) = \mathfrak{S}^2 \psi(\xi_1, \xi_2) = \alpha^2 \psi(\xi_1, \xi_2) \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$. In particolare, se $\alpha = 1$ il sistema si dirà composto da **bosoni** e la funzione d'onda di stato sarà *globalmente simmetrica* (rispetto ad uno scambio delle particelle), se invece $\alpha = -1$ il sistema si dirà composto da **fermioni** e la funzione d'onda di stato sarà *globalmente antisimmetrica*. Pertanto, in $\mathcal{D}^{\otimes 2}$ vengono individuati i due sottospazi disgiunti

$$\mathcal{SD}^{\otimes 2} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \psi \in \mathcal{D}^{\otimes 2} : \mathfrak{S}\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1), \forall (\xi_1, \xi_2) \} \subset \mathcal{D}^{\otimes 2}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{AD}^{\otimes 2} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \psi \in \mathcal{D}^{\otimes 2} : \mathfrak{S}\psi(\xi_1, \xi_2) = -\psi(\xi_2, \xi_1), \forall (\xi_1, \xi_2) \} \subset \mathcal{D}^{\otimes 2}, \quad (3.7)$$

²⁷Si noti che l'*unitarietà* ($\mathfrak{S}^2 = \mathbf{1}$) discende dall'*involutività* della mappa, mentre l'*hermitianità* è richiesta affinché la densità di probabilità restino invariate, infatti $|\psi(\xi_2, \xi_1)|^2 = \psi^*(\xi_1, \xi_2) \mathfrak{S}^\dagger \mathfrak{S} \psi(\xi_1, \xi_2) = |\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 \Leftrightarrow \mathfrak{S}^\dagger = \mathfrak{S}$.

²⁸Introdotta per tener conto del fatto che lo spazio degli stati è in realtà $\mathcal{PD}^{\otimes 2}$.

Occorrerà allora scegliere rispettivamente la **potenza tensoriale seconda simmetrizzata** $\mathcal{S}\mathcal{D}^{\otimes 2}$ o la **potenza tensoriale seconda antisimetrizzata** $\mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes 2}$ a seconda che si abbia a che fare con una coppia di bosoni o di fermioni. Tali considerazioni risultano applicabili nel caso in cui il sistema sia composto da due particelle identiche. Per estendere la teoria al caso di N particelle identiche, occorre introdurre alcuni basilari concetti di teoria dei gruppi. Cominciamo dalla seguente

DEFINIZIONE (GRUPPO) - Si definisce **gruppo** un insieme \mathcal{G} chiuso rispetto ad un'operazione binaria interna " \star " (detta legge del gruppo) soddisfacente gli assiomi di

1. *associatività* : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{G}$ risulta $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$;
2. *esistenza dell'elemento neutro* : $\forall a \in \mathcal{G}, \exists e \in \mathcal{G} \ni e \star a = a \star e = a$;
3. *esistenza dell'elemento inverso* : $\forall a \in \mathcal{G}, \exists a^{-1} \in \mathcal{G} \ni a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Gli assiomi 1., 2., 3. prendono il nome di *assiomi gruppali*²⁹ ed è immediato verificare che l'elemento neutro e l'elemento inverso sono univocamente determinati. In generale, la proprietà di commutatività rispetto alla legge di gruppo non è soddisfatta e qualora risulti verificata si usa parlare di *gruppo abeliano* o *commutativo*; ne sono esempi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e \mathbb{C} , tutti rispetto all'operazione di somma "+" e $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ (dove l'asterisco indica la privazione dello zero) rispetto all'operazione di moltiplicazione ".". Si definisce *ordine* del gruppo $|\mathcal{G}|$ la cardinalità dell'insieme \mathcal{G} ed in base ad essa si suol distinguere tra *gruppi finiti* (cardinalità finita) e *gruppi infiniti*. Avremo ulteriormente bisogno della seguente

DEFINIZIONE (RAPPRESENTAZIONE LINEARE DI UN GRUPPO) - Sia (\mathcal{G}, \star) un gruppo e V uno spazio vettoriale su un campo K . Si definisce **rappresentazione lineare del gruppo** \mathcal{G} l'omeomorfismo $\mathcal{U} : \mathcal{G} \rightarrow \text{End}(V)$, dove $\text{End}(V) = \{\mathcal{U} : V \rightarrow V : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \mathcal{U}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathcal{U}\mathbf{x} + \beta \mathcal{U}\mathbf{y}, \alpha, \beta \in K\}$ è il gruppo degli endomorfismi di V , e cioè un'applicazione da \mathcal{G} in $\text{End}(V)$ tale che

$$\mathcal{U}(g_1 \star g_2) = \mathcal{U}(g_1) \cdot \mathcal{U}(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}. \quad (3.8)$$

Per come definita, \mathcal{U} soddisfa le seguenti proprietà: *i)* $\mathcal{U}(e) = \mathbb{1}_V$, infatti, posto $g_2 = e$ nella (3.8) si ha che $\forall \mathbf{x} \in V \mathcal{U}(g_1)\mathbf{x} = \mathcal{U}(g_1) \cdot \mathcal{U}(e)\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathcal{U}(e) = \mathbb{1}_V$; *ii)* $\forall g \in \mathcal{G}, \mathcal{U}(g^{-1}) = \mathcal{U}^{-1}(g)$, infatti, posto $g_2 = g_1^{-1}$ nella (3.8) si ha che $\forall \mathbf{x} \in V \mathbb{1}_V \mathbf{x} = \mathcal{U}(g_1) \cdot \mathcal{U}(g_1^{-1})\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathcal{U}(g_1^{-1}) = \mathcal{U}^{-1}(g_1), \forall g \in \mathcal{G}$.

Si noti che anche $\text{End}(V)$ forma un gruppo. In generale, dunque, la rappresentazione di un gruppo \mathcal{G} può essere intesa come un omeomorfismo di elementi di \mathcal{G} a valori nel gruppo degli endomorfismi di V ³⁰. Nei casi di nostro interesse lo spazio vettoriale V è usualmente di Hilbert; in tal caso si dovrà ulteriormente richiedere l'*unitarietà*³¹ degli operatori appartenenti ad $\text{End}(V)$. Si parlerà allora di **rappresentazione lineare ed unitaria** del gruppo \mathcal{G} . Diamo, infine, la seguente

DEFINIZIONE (CARETTERE DI UN GRUPPO) - Sia (\mathcal{G}, \star) un gruppo ed $\mathcal{U} : \mathcal{G} \rightarrow \text{End}(V)$ una sua rappresentazione lineare. Si definisce **carattere** di \mathcal{G} un'applicazione $\chi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\chi(g) = \text{Tr}[\mathcal{U}(g)], \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Anche l'insieme $\text{Ch}(\mathcal{G})$ dei caratteri di \mathcal{G} soddisfa gli assiomi di gruppo (gruppo dei caratteri di \mathcal{G}) ed è esso stesso abeliano rispetto alla moltiplicazione. Spesso si usa tener conto solo dei **caratteri unitari** di \mathcal{G} , ovvero di tutti quei caratteri $\chi \in \text{Ch}(\mathcal{G})$ tali che $|\chi(g)| = 1, \forall g \in \mathcal{G}$.

Passiamo quindi alla descrizione di un sistema composto da N particelle identiche; come in precedenza, indichiamo con \mathcal{D} lo spazio monoparticellare in notazione di Landau. Sia allora \mathcal{S}_N l'insieme delle possibili permutazioni di N oggetti: esso soddisfa gli assiomi di gruppo e prende il nome di

²⁹Imponendo che la coppia (\mathcal{G}, \star) soddisfi solo alcuni degli assiomi di gruppo o nessuno di essi (limitandosi, cioè, alla singola proprietà di chiusura) si ottengono altre strutture matematiche quali *magma*, *quasigruppo*, *semigruppo* e *monoide*.

³⁰Inoltre, l'insieme delle rappresentazioni di \mathcal{G} nel gruppo degli endomorfismi di V è esso stesso un gruppo.

³¹Vedremo nel seguito la definizione generale di operatore unitario su spazi non necessariamente finito dimensionali.

gruppo simmetrico di grado N ; avendo cardinalità $N!$, il gruppo S_N è un gruppo finito. Sia poi $\mathcal{U}(\cdot) : \pi \in S_N \mapsto \mathcal{U}(\pi) \in \text{End}(\mathcal{D}^{\otimes N})$ una rappresentazione lineare di S_N su $\mathcal{D}^{\otimes N}$ tale che

$$\mathcal{U}(\pi) \bigotimes_{k=1}^N \psi(\xi_k) = \chi(\pi) \bigotimes_{k=1}^N \psi(\pi^{-1}(\xi_k)), \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(N) \end{pmatrix} \in S_N, \quad (3.9)$$

dove $\chi(\pi) \in \mathbb{C}^*$ è un carattere unitario di S_N e svolge il ruolo di fattore di fase; per costruzione, la rappresentazione (3.9) è unitaria³². La risoluzione dell'equazione (3.9) completa la nostra ricerca in quanto permette di determinare i sottospazi di $\mathcal{D}^{\otimes N}$ compatibili con l'indistinguibilità delle N particelle; in altre parole, il problema si riduce alla *classificazione dei caratteri unitari* di S_N . Si può dimostrare che all'interno di $\text{Ch}(S_N)$ esistono sempre i due caratteri $\chi(\pi) = (+1)^{|\pi|} = 1$ e $\chi(\pi) = (-1)^{|\pi|}$, $\forall \pi \in S_n$, entrambi associati alla *parità della permutazione* tramite il termine $|\pi|$, il quale identifica il numero di trasposizioni della permutazione (che si dirà *pari* se $|\pi|$ è pari e *dispari* altrimenti). Nel caso $N = 2$ i precedenti sono gli *unic* caratteri ammessi e corrispondono rispettivamente agli autovalori ± 1 dell'operatore di scambio \mathfrak{S} . In $\mathcal{D}^{\otimes N}$ vengono dunque individuati i due sottospazi disgiunti

$$\mathcal{S}\mathcal{D}^{\otimes N} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \psi \in \mathcal{D}^{\otimes N} : \mathcal{U}(\pi)\psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \psi(\pi^{-1}(\xi_1), \dots, \pi^{-1}(\xi_N)), \forall \pi \in S_n \}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes N} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \psi \in \mathcal{D}^{\otimes N} : \mathcal{U}(\pi)\psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = (-1)^{|\pi|} \psi(\pi^{-1}(\xi_1), \dots, \pi^{-1}(\xi_N)), \forall \pi \in S_n \}. \quad (3.11)$$

Come in precedenza, ai bosoni corrisponde la potenza tensoriale N -esima simmetrizzata ed ai fermioni la potenza tensoriale N -esima antisimmetrizzata. Al fine di individuare i precedenti sottospazi, si può pensare di introdurre gli operatori di proiezione

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} : \mathcal{D}^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes N}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{A}} := \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \mathcal{U}(\pi), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}} : \mathcal{D}^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{D}^{\otimes N}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{S}} := \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{|\pi|} \mathcal{U}(\pi), \quad (3.13)$$

noti in letteratura come *simmetrizzatore totale* ed *antisimmetrizzatore totale*, rispettivamente.

Affrontiamo ora un'altra questione. Si è visto che a causa dell'indistinguibilità, le funzioni d'onda ottenute a seguito di una generica permutazione di stati definiscono la medesima densità di probabilità. In generale, qualunque quantità fisicamente misurabile *deve* restare invariante sotto un'arbitraria permutazione degli stati ed, in particolare, i valori medi delle osservabili del sistema devono soddisfare tale proprietà. Allora, è necessario richiedere che per ogni osservabile A definita su \mathcal{S} risulti

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{U}(\pi)^\dagger A \mathcal{U}(\pi) | \psi \rangle, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{D}^{\otimes N}, \quad (3.14)$$

avendo richiamato la notazione di Dirac per semplicità. Si noti che $\mathcal{U}(\pi)^\dagger = \mathcal{U}^{-1}(\pi)$, essendo $\mathcal{U}(\pi)$ unitario. Proprio grazie all'unitarietà di $\mathcal{U}(\pi)$ ed al fatto che la (3.14) vale $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{D}^{\otimes N}$, possiamo *definire* N particelle come identiche mediante la restrizione delle relative osservabili a quelle, e solo quelle, che corrispondono ad operatori autoaggiunti in commutazione con $\mathcal{U}(\pi)$. In altre parole, diremo che A è *un'osservabile di un sistema composto da N particelle identiche se e solo se* $[A, \mathcal{U}(\pi)] = 0$, $\forall \pi \in S_n$. In definitiva, possiamo riformulare il principio d'indistinguibilità in termini di un

SESTO POSTULATO

Le osservabili di un sistema composto da N particelle identiche corrispondono ad operatori autoaggiunti in commutazione con tutti i rappresentativi degli elementi di $\mathcal{U}(\pi) \in S_n$ e, conseguentemente, lo spazio di Hilbert degli stati è naturalmente ristretto ad

$$\mathcal{D}_\zeta^{\otimes N} \equiv \mathcal{P}_\zeta \mathcal{D}^{\otimes N},$$

³²Si noti che, sebbene definita sui vettori fattorizzati di $\mathcal{D}^{\otimes N}$, \mathcal{U} può essere estesa a tutto $\mathcal{D}^{\otimes N}$, essendo l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori fattorizzati denso in $\mathcal{D}^{\otimes N}$.

dove ζ vale $+1$ per i bosoni e -1 per i fermioni, mentre \mathcal{P}_\pm è il simmetrizzatore o l'antisimmetrizzatore totale

$$\mathcal{P}_\zeta \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_n} \zeta^{|\pi|} \mathcal{U}(\pi).$$

Si ricordi che in $\mathcal{A}D^{\otimes N}$, la generica funzione d'onda (globalmente antisimmetrica) associata al sistema composto ha la forma di un *determinante di Slater*

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \cdots & \psi_1(\xi_N) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \cdots & \psi_2(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(\xi_1) & \psi_N(\xi_2) & \cdots & \psi_N(\xi_N) \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

dove le $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, N}$ sono le funzioni d'onda di singola particella. Risulta evidente che se due fermioni vengono a trovarsi nel medesimo stato di singola particella, il determinante (3.15) è nullo ed il **principio di esclusione di Pauli** è automaticamente soddisfatto. Esso è, di fatto, una conseguenza diretta della realizzazione fermionica del principio d'indistinguibilità.

In conclusione, possiamo affermare che in natura esistono due realizzazioni del principio d'indistinguibilità, una fermionica ed una bosonica. Inoltre, si verifica sperimentalmente l'esistenza di un ferreo legame tra la statistica e lo spin delle particelle: *tutte le particelle con spin intero sono bosoni* (mesoni π , fotoni, fononi, gravitoni, ecc.), *mentre tutte le particelle con spin semintero sono fermioni* (elettroni, protoni, muoni, quarks, ecc.). Questa regola trova previsione teorica in teoria quantistica relativistica dei campi in termini del celebre **teorema spin-statistica**.

OSSERVAZIONE – ANYONS. L'unicità delle realizzazioni bosoniche e fermioniche del principio d'indistinguibilità si dimostrano valide per sistemi aventi dimensione spaziale $d > 2$. Per sistemi bidimensionali, invece, è teoricamente prevista (J. M. LEINAAS, J. MYRHEIM, 1977) l'esistenza di *quasi-particelle*³³ obbedienti a statistiche variabili con continuità tra le statistiche di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein³⁴. Nel caso di un sistema composto da una coppia di simili quasi-particelle, si avrebbe che

$$\mathfrak{S}\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\theta} \psi(\xi_2, \xi_1), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Dunque, se $\theta = 0$ la statistica è quella di Bose-Einstein e se $\theta = \pi$ è quella di Fermi-Dirac; tuttavia per valori di θ intermedi e diversi dai precedenti, le statistiche sono differenti. Proprio per via del fatto che le funzioni d'onda possono assumere qualsiasi fattore di fase a seguito dello scambio, F. WILCZEK conio per tali particelle il nome **anyons**. Un'evidente proprietà è quella di avere spin arbitrario (non solo valori interi o semi-interi in unità di \hbar): infatti, indicando con s il "numero quantico" di spin ed imponendo che $\theta = 2\pi s$, si ha che $e^{i\theta} = (e^{i\pi})^{2s} = (-1)^s$ e quindi

$$\mathfrak{S}\psi(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{2s} \psi(\xi_2, \xi_1), \quad s \in [0, 1).$$

³³Introdotta da L. D. LANDAU per semplificare la trattazione di alcuni complessi sistemi quantistici a molti corpi, il termine **quasi-particella** identifica una serie di *entità di tipo particellare* e speciali *eccitazioni collettive* presenti in sistemi fisici *fortemente interagenti*. Un esempio è associato al transito di un elettrone all'interno di un semiconduttore: la traiettoria del moto, influenzata dalle numerose interazioni con gli altri elettroni e nuclei, corrisponde approssimativamente a quella di un "elettrone" libero con massa effettiva $\mu_e \neq m_e$. Ulteriori esempi sono associati alle eccitazioni collettive dei *fononi* (vibrazioni dei reticoli cristallini dei solidi), dei *plasmoni* (eccitazioni coerenti all'interno di un plasma), dei *polaroni* (quasi-particelle cariche in movimento in un materiale e circondate da ioni), dei *polaritoni* (una miscela di fotoni con altre quasi-particelle), dei *rotoni* (eccitazioni elementari dell' ^4He -superfluido), dei *frattoni* (vibrazioni collettive quantizzate su un substrato frattale). Un altro esempio famoso è quello dei *solitoni*, soluzioni d'onda stabili ottenute da una delicata compensazione tra fenomeni non lineari e dissipativi.

³⁴Sperimentalmente non esiste alcuna verifica ufficiale dell'esistenza degli anyons. Tuttavia, nel 2005 un gruppo di ricercatori della Stony Brook University avrebbe realizzato un interferometro a quasi-particelle e nel corso dello studio di alcune proprietà dell'*effetto Hall quantistico frazionario*, avrebbe osservato l'esistenza di frange d'interferenza simili a quelle osservate nell'*effetto Aharonov-Bohm* e soggette ad uno spostamento a seguito dell'accensione di un campo magnetico (F. E. CAMINO, W. ZHOU e V. J. GOLDMAN, *Realization of a Laughlin quasi-particle interferometer: Observation of fractional statistics*, Phys. Rev. B **72**, 075342, (2005)). Se riprodotto, questo risultato permetterebbe di concludere che gli anyons hanno realtà fisica e non sono solo speciali speculazioni matematiche.

L'arbitrarietà del numero quantico di spin non è poi così sorprendente: infatti il gruppo delle rotazioni in due dimensioni è *abeliano* e quindi non esistono relazioni di commutazione da quantizzare; in altre parole, nessuna restrizione sui possibili autovalori di spin proviene dall'algebra del gruppo³⁵.

Esempi

- GROUND STATE DI HAMILTONIANI SIMMETRIZZATI ED ANTISIMMETRIZZATI

Sia \mathcal{S} composto da N particelle identiche *non interagenti* ed $\{H^{(n)}\}_{n=1,\dots,N}$ i relativi hamiltoniani, ciascuno definito su \mathcal{D} . Sia noto lo spettro energetico di singola particella che, per semplicità, assumiamo *discreto* e *non degenero*: in ordine *crescente* $\sigma(H^{(n)}) = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ $n = 1, \dots, N$, dove ε_0 è il ground state di singola particella. Vogliamo determinare il ground state E_0 di \mathcal{S} . In accordo con il quinto postulato, l'hamiltoniano H_S del sistema composto è della forma

$$H_S = \bigotimes_{n=1}^N H^{(n)} = H^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}^{(N)} + \dots + \mathbf{1}^{(1)} \otimes \dots \otimes H^{(N)},$$

è definito su $\mathcal{D}^{\otimes N}$ e la sua azione su un generico $|\Psi\rangle \in \mathcal{D}^{\otimes N}$ è specificata dalla seguente espressione

$$H_S|\Psi\rangle = (H^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle) \otimes \dots \otimes |\psi^{(N)}\rangle + \dots + |\psi^{(1)}\rangle \otimes (H^{(N)}|\psi^{(N)}\rangle).$$

Sia ora $|\psi_0^{(n)}\rangle \in \mathcal{D}$ l'autovettore di ground state di singola particella: $H^{(n)}|\psi_0^{(n)}\rangle = \varepsilon_0|\psi_0^{(n)}\rangle$ con $n = 1, \dots, N$. Per il sistema composto, il vettore $|\Psi_0\rangle = |\psi_0^{(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_0^{(N)}\rangle$ è certamente autostato dell'**hamiltoniano bosonico** $\mathcal{S}H_S \equiv H_S|_{\mathcal{S}\mathcal{D}^{\otimes N}}$ in quanto $\mathcal{S}H_S|\Psi_0\rangle = N\varepsilon_0|\Psi_0\rangle$ e $|\Psi_0\rangle \in \mathcal{S}\mathcal{D}^{\otimes N}$; tuttavia, non è autostato dell'**hamiltoniano fermionico** $\mathcal{A}H_S \equiv H_S|_{\mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes N}}$ in quanto $|\Psi\rangle \notin \mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes N}$. In questo caso occorre tener presente del principio di esclusione e quindi, dati $|\psi_0^{(n)}\rangle, \dots, |\psi_{N-1}^{(n)}\rangle \in \mathcal{D}$ tali che $H^{(n)}|\psi_k^{(n)}\rangle = \varepsilon_k|\psi_k^{(n)}\rangle$ con $k = 0, \dots, N-1$ e costruito il vettore $|\Psi_0\rangle \in \mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes N}$ come *determinante di Slater*, si ha che $\mathcal{A}H_S|\Psi_0\rangle = \sum_k \varepsilon_k|\Psi_0\rangle$ ed ε_{N-1} (l'ultimo livello occupato) prende il nome di **energia di Fermi**. Più in generale, il ground state bosonico resta invariato anche in presenza di degenerazione, mentre per fermioni assume la forma $E_0 = \sum_k g_k \varepsilon_k$, dove $0 \leq g_k \leq n_k$ tiene conto del numero di particelle presenti nel k -esimo livello.

3.3 Spazi di Fock

Uno dei punti centrali per la seconda quantizzazione è l'introduzione di uno spazio di Hilbert associato ad un numero di particelle variabile. Tale spazio, introdotto da V. D. Fock nel 1932, può esser definito nel modo seguente. Sia \mathcal{D} lo spazio di Hilbert monoparticellare e $\mathcal{D}^{\otimes n}$ lo spazio associato ad n particelle identiche che supponiamo per il momento *distinguibili*: si definisce **spazio di Fock** su \mathcal{D} l'insieme

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}^{\otimes n}, \quad (3.16)$$

e cioè la somma diretta di tutti i prodotti tensoriali degli spazi di singola particella. Per definizione, $\mathcal{D}^{\otimes 0} \equiv \mathbb{C}$ è lo spazio degli stati senza particelle e possiede come unico vettore di base il cosiddetto **stato di vuoto**. Si osservi che $\mathcal{D}^{\otimes n} \perp \mathcal{D}^{\otimes n'}$ per $n \neq n'$, ovvero i sottospazi associati ad un numero diverso di particelle sono tra loro ortogonali. Dunque un arbitrario $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ è identificato dalla sequenza di elementi $\{\psi_0 \in \mathbb{C}, \psi_1 \in \mathcal{D}, \psi_2 \equiv \psi_{21} \otimes \psi_{22} \in \mathcal{D}^{\otimes 2}, \dots, \psi_n \equiv \psi_{n1} \otimes \dots \otimes \psi_{nn} \in \mathcal{D}^{\otimes n}, \dots\}$ tali che

$$\Psi = \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_n \oplus \dots$$

Naturalmente, gli spazi di Hilbert $\mathcal{D}^{\otimes n}$ inducono su $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ il prodotto scalare

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathcal{F}(\mathcal{D})} := \psi_0^* \phi_0 + \langle \psi_1, \phi_1 \rangle_{\mathcal{D}} + \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{\mathcal{D}^{\otimes 2}} + \dots, \quad (3.17)$$

³⁵Si veda, ad esempio, A. LERDA – *Anyons: quantum mechanics of particles with fractional statistics*.

dove $\langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{\mathcal{D}^{\otimes 2}} = \langle \psi_{21}, \phi_{21} \rangle_{\mathcal{D}} \langle \psi_{22}, \phi_{22} \rangle_{\mathcal{D}}$ per definizione (vedi (3.1)). Dunque $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ è prehilbertiano; inoltre, è evidente che se \mathcal{D} è di Hilbert ed è separabile allora anche $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ lo è per costruzione, intendendo la completezza nel senso di Cauchy (essendo coinvolta una somma diretta infinita).

Il prodotto scalare (3.17) consente di riscrivere l'espressione per un generico $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$: fissando in $\mathcal{D}^{\otimes n}$ una base ortonormale tale che $\mathcal{D}^{\otimes n} = \text{Span}\{\mathbf{e}_{i^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{i^n}\}_{(i^1, \dots, i^n) \in I \times \dots \times K} \forall n \in \mathbb{N}$ e sfruttandone la completezza, si ottiene

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i^1, \dots, i^n} \Psi(i^1, \dots, i^n) \mathbf{e}_{i^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{i^n} \quad \text{dove} \quad \Psi(i^1, \dots, i^n) \equiv \langle \mathbf{e}_{i^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{i^n}, \Psi \rangle_{\mathcal{F}(\mathcal{D})} \quad (3.18)$$

e per ipotesi $\langle \Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{F}(\mathcal{D})} < \infty$. L'ortonormalità della base fornisce inoltre l'espressione per la norma:

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}(\mathcal{D})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i^1, \dots, i^n} |\Psi(i^1, \dots, i^n)|^2. \quad (3.19)$$

In realtà in Meccanica Quantistica, ed in special modo in Teoria Quantistica dei Campi, trovano applicazione i sottospazi di Fock simmetrizzati ed antisimmetrizzati, ovvero i sottospazi associati alle potenze tensoriali simmetrizzate ed antisimmetrizzate di \mathcal{D} . In altre parole, imponendo la validità del *principio di indistinguibilità* è possibile identificare in $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ i due sottospazi disgiunti

$$\mathcal{F}_{\zeta}(\mathcal{D}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{\zeta}^{\otimes n} \quad \text{dove} \quad \mathcal{D}_{\zeta}^{\otimes n} = \begin{cases} \mathcal{A}\mathcal{D}^{\otimes n} & \text{se } \zeta = -1, \\ \mathcal{S}\mathcal{D}^{\otimes n} & \text{se } \zeta = 1. \end{cases}$$

Per $\zeta = 1$ si parlerà di **spazio di Fock bosonico** (su \mathcal{D}) e per $\zeta = -1$ di **spazio di Fock fermionico**. Un'espressione analoga alla (3.18) si ottiene per $\Psi_{\zeta} \in \mathcal{F}_{\zeta}(\mathcal{D})$ proiettando una base ortonormale di $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ sul sottospazio simmetrizzato ed antisimmetrizzato. Adoperando i proiettori \mathcal{P}_{ζ} si trovano la basi

$$(\mathbf{e}_{i^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{i^n})_{\zeta} \equiv \sqrt{n!} \mathcal{P}_{\zeta}(\mathbf{e}_{i^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{i^n}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \zeta^{|\pi|} (\mathbf{e}_{\pi(i^1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{\pi(i^n)}).$$

Procedendo come in precedenza, si trovano rispettivamente per $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ ed $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D})$ le norme

$$\|\Psi_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})}^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i^1, \dots, i^n \\ \text{tutti distinti}}} |\Psi_{\mathcal{A}}(i^1, \dots, i^n)|^2,$$

$$\|\Psi_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D})}^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i^1, \dots, i^n} \left[\prod_i \mathcal{N}(i)! \right] |\Psi_{\mathcal{S}}(i^1, \dots, i^n)|^2,$$

dove $\mathcal{N}(i)$ tiene conto del numero di volte che l'indice i compare in (i^1, \dots, i^n) .

Esempi

◦ SPAZI DI FOCK DI FUNZIONI DI QUADRATO SOMMABILE

Sia $\mathcal{D} = L_2(\mathbb{R})$, allora $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R}^2) \oplus L_2(\mathbb{R}^3) \dots L_2(\mathbb{R}^n) \dots$ (si tenga presente che $L_2(E) \otimes L_2(F)$ ed $L_2(E \times F)$ sono naturalmente isomorfi) ed un elemento $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ è identificato dalla sequenza di funzioni $\Psi = \{\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n), \dots\}$ tali che

$$|\Psi|^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_n(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n < \infty.$$

In questo caso $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(L_2(\mathbb{R}))$ è la somma diretta dei sottospazi di $L_2(\mathbb{R}^n)$ (con $n \in \mathbb{N}$) delle funzioni lasciate invariate sotto qualsiasi permutazione delle variabili, mentre $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(L_2(\mathbb{R}))$ è la somma diretta dei sottospazi di $L_2(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni dispari rispetto allo scambio di due variabili.

4 Teoria degli operatori lineari in spazi di Hilbert

In questa sezione studieremo le principali proprietà degli operatori lineari (limitati e non) in spazi di Hilbert. A tal fine, richiamiamo alcune proprietà degli operatori lineari limitati.

4.1 Operatori lineari limitati (richiami)

Con il termine **operatore** si intende usualmente una mappa tra spazi vettoriali. Di particolare interesse sono quegli operatori che “conservano” le proprietà algebriche degli spazi vettoriali (omomorfismi).

DEFINIZIONE (OPERATORE LINEARE) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ un operatore, X, Y due spazi vettoriali su K ; A è **lineare** se e solo se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ e $\forall \alpha, \beta \in K$ si ha che $A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}') = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{x}'$.

Il sottospazio \mathcal{D}_A prende il nome di **dominio** di A : quest'ultimo si dirà **ovunque definito** se $\mathcal{D}_A = X$ e **densamente definito** se $\overline{\mathcal{D}_A} = X$. D'ora in avanti indicheremo con

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A &:= AX = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in X\}, && \text{l'immagine di } A, \\ \mathcal{R}_A &:= A\mathcal{D}_A = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}, && \text{il range di } A, \\ \mathcal{N}_A &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A : A\mathbf{x} = \mathbf{0}_Y\}, && \text{il kernel di } A. \end{aligned}$$

Si dimostra banalmente che $\mathcal{I}_A, \mathcal{R}_A$ ed \mathcal{N}_A sono spazi vettoriali.

Esempi di operatori lineari sono: l'operatore identità $\mathbb{1} : \mathbf{x} \in X \mapsto \mathbb{1}\mathbf{x} = \mathbf{x} \in X$, l'operatore nullo $\mathbf{0} : \mathbf{x} \in X \mapsto \mathbf{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}_Y \in Y$, l'operatore differenziale $d_z : p(z) \in P_n(\mathbb{C}) \mapsto d_z p(z) = \frac{dp(z)}{dz} \in P_n(\mathbb{C})$, dove $P_n(\mathbb{C})$ indica lo spazio dei polinomi di variabile complessa aventi grado inferiore od uguale ad n . Un esempio di operatore non-lineare: $u \in C^1(\mathbb{R}) \mapsto (d_x u)^2 \in C^0(\mathbb{R})$ ³⁶.

Introduciamo ora l'inverso di un operatore lineare. Preliminarmente, richiamiamo la seguente

DEFINIZIONE (INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ) - Un operatore lineare $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ si dice **iniettivo** se $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{D}_A$ si ha che $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow A\mathbf{x}_1 \neq A\mathbf{x}_2$ (equiv., se $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$) e **suriettivo** (ovvero una mappa da \mathcal{D}_A su Y) se $\mathcal{R}_A = Y$. Inoltre, A è **biiettivo** se è iniettivo e suriettivo.

Se $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ è **iniettivo**, è possibile definirne l'**inverso** come l'operatore $A^{-1} : \mathcal{R}_A \rightarrow \mathcal{D}_A$ t.c.

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \quad \text{ovvero} \quad AA^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}_A.$$

Se in aggiunta A è **suriettivo**, allora è invertibile su tutto Y , ovvero $A^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{D}_A$. Occorre stabilire quando un operatore lineare è invertibile e quali proprietà soddisfa l'inverso.

TEOREMA (ESISTENZA DELL'INVERSO) - L'inverso di A esiste $\Leftrightarrow \mathcal{N}_A = \{\mathbf{0}\}$ ed è un operatore lineare.

Dimostrazione. *i) Esistenza.* Se $\mathcal{N}_A = \{\mathbf{0}\}$ allora $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sia $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$: A è lineare, per cui $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, ovvero A è iniettivo e quindi esiste l'inverso. Viceversa, supponiamo che A^{-1} esiste: allora $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, posto $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ si ha che $\mathcal{N}_A = \{\mathbf{0}\}$. *ii) Linearità.* $\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}_A$, $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{D}_A$ tali che $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$. Ma \mathcal{R}_A è uno spazio vettoriale e quindi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ è $\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}_A$, ovvero $\exists \mathbf{x}' \in \mathcal{D}_A$ tale che $\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}'$; poiché A è lineare $\mathbf{x}' = A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)$. Si osservi ora che $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}' \in \mathcal{D}_A$ e dunque $\mathbf{x}_{1,2} = A^{-1}\mathbf{y}_{1,2}$ ed $\mathbf{x}' = A^{-1}(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2)$, dalle quali segue che $A^{-1}(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2) = \alpha A^{-1}\mathbf{y}_1 + \beta A^{-1}\mathbf{y}_2$, il che dimostra la linearità di A^{-1} . \square

Si noti che se $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ e $B : \mathcal{D}_B \subseteq Y \rightarrow Z$ sono operatori lineari e biiettivi, allora l'inverso del prodotto $(BA)^{-1} : Z \rightarrow \mathcal{D}_A$ esiste ed è tale per cui $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

L'insieme degli operatori lineari $A : X \rightarrow Y$ forma lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(X, Y)$, il quale può essere munito della struttura di spazio normato una volta definita la norma di un operatore.

³⁶Simili operatori intervengono puntualmente in Meccanica Classica nello studio dei cosiddetti sistemi non-lineari.

DEFINIZIONE (OPERATORE LINEARE LIMITATO) - Siano X, Y normati; l'operatore $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ si dice **limitato** se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|A\mathbf{x}\|_Y \leq M\|\mathbf{x}\|_X \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ (per semplicità, omettiamo d'ora in avanti i pedici di norma). Inoltre, qualora esista, si definisce **norma** di A il limite superiore

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|A\mathbf{x}\|. \quad (4.1)$$

Si noti che con $M = \|A\|$ la condizione di limitatezza diventa $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Si prova banalmente che le formule (4.1) sono tra loro equivalenti e soddisfano gli assiomi di norma. Il sottospazio $B(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)|_{A: X \rightarrow Y, \text{limitati}}$ munito della norma (4.1) è di Banach se Y è di Banach.

In generale l'inverso di un operatore limitato *non* è limitato, a meno che non si considerino operatori su spazi finito dimensionali. Per spazi normati di dimensione arbitraria vale il seguente

TEOREMA (INVERSO LIMITATO) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ un operatore lineare ed X, Y degli spazi normati. Allora A ammette inverso limitato se e solo se $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|A\mathbf{x}\| \geq \delta\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$.

Dimostrazione. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{0} = \|A\mathbf{x}\| \geq \delta\|\mathbf{x}\|$ e quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; di conseguenza $\mathcal{N}_A = \{\mathbf{0}\}$ ed A^{-1} esiste. Per provarne la limitatezza, sia $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dunque $\|\mathbf{y}\| = \|A\mathbf{x}\| \geq \delta\|\mathbf{x}\|$; d'altra parte $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ e quindi $\|A^{-1}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{\delta}\|\mathbf{y}\|$. Pertanto A^{-1} è limitato e $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$. Viceversa, se A^{-1} esiste limitato, allora $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\|A^{-1}\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{\delta}\|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}_A$ e quindi $\|A\mathbf{x}\| \geq \delta\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. \square

Si può inoltre dimostrare che se $A \in B(X, Y)$ è biiettivo ed X, Y sono di Banach, allora $A^{-1} \in B(Y, X)$.

Gli operatori lineari limitati godono di alcune importanti proprietà, riassunte nei seguenti teoremi.

TEOREMA (CONTINUITÀ) - Sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ed X, Y normati. Allora A è limitato $\Leftrightarrow A$ è continuo.

TEOREMA (DIMENSIONI FINITE) - Sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X normato e finito dimensionale $\Rightarrow A$ limitato.

Dimostrazione. Sia $X = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$: dunque un generico $\mathbf{x} \in X$ potrà essere sviluppato nella forma $\mathbf{x} = \sum_k \xi_k \mathbf{e}_k$. Dalla linearità di A segue allora che

$$\|A\mathbf{x}\| = \left\| \sum_k \xi_k A\mathbf{e}_k \right\| \leq \sum_k \|A\mathbf{e}_k\| |\xi_k| \leq \max_k \{\|A\mathbf{e}_k\|\} \sum_k |\xi_k|.$$

D'altra parte, si dimostra che ad ogni insieme di vettori linearmente indipendenti $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ di uno spazio normato X di dimensioni arbitrarie è possibile associare un numero $K > 0$ tale che per ogni scelta degli scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ si abbia che $\|\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n\| \geq K(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$. Pertanto $\sum |\xi_k| \leq \frac{1}{c} \|\sum_k \xi_k \mathbf{e}_k\| = \frac{1}{c} \|\mathbf{x}\|$ ed in definitiva $\|A\mathbf{x}\| \leq \gamma \|\mathbf{x}\|$ dove $\gamma \equiv \frac{1}{c} \max_k \{\|A\mathbf{e}_k\|\} \quad \forall \mathbf{x} \in X$. \square

Nel seguito avremo inoltre bisogno del concetto di uguaglianza, restrizione ed estensione di operatori:

DEFINIZIONE (RESTRIZIONE, UGUAGLIANZA ED ESTENSIONE DI OPERATORI) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ un generico operatore ed X, Y due spazi vettoriali di dimensione arbitraria. Si definiscono

1. **restrizione** di A ad un sottospazio $B \subset \mathcal{D}_A$, l'operatore

$$A|_B : B \rightarrow Y \quad \text{tale che} \quad A|_B \mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in B;$$

2. **estensione** di A ad un sottospazio $M \supset \mathcal{D}_A$, l'operatore

$$\tilde{A} : M \rightarrow Y \quad \text{tale che} \quad \tilde{A}|_{\mathcal{D}_A} \mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A.$$

Inoltre, dato un secondo operatore $A' : \mathcal{D}_{A'} \subseteq X \rightarrow Y$, si dirà che A ed A' sono **uguali** se

$$A = A' \quad \text{ovvero se} \quad \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A'} \quad \text{ed} \quad A'\mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A'}.$$

Usualmente, le estensioni di interesse sono quelle che conservano le proprietà degli operatori di partenza, in particolare linearità, limitatezza e norma. A tal proposito si dimostra il seguente, importante

TEOREMA (ESTENSIONE LINEARE LIMITATA) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$ lineare e limitato, X normato ed Y di Banach: A ammette un'unica **estensione lineare limitata** $\tilde{A} : \overline{\mathcal{D}_A} \rightarrow Y$ tale che $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Si noti che il teorema comprende anche i casi in cui l'estensione è da un sottospazio denso in uno spazio normato X a tutto X , o da uno spazio normato X al suo completamento.

Ricordiamo infine che su spazi vettoriali *finito dimensionali* un operatore lineare è in corrispondenza biunivoca con una matrice, individuata dall'azione dell'operatore sugli elementi di una base fissata. In altre parole, dato $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X, Y finito dimensionali su K e scelte in questi le basi $E = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$, $B = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1, \dots, m}$ rispettivamente, si ha che $X \ni \mathbf{x} = \sum_i \xi_i \mathbf{e}_i$, $Y \ni \mathbf{y} = \sum_k \eta_k \mathbf{b}_k$ e quindi

$$\sum_k \eta_k \mathbf{b}_k = \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_i \xi_i A\mathbf{e}_i = \sum_k \left(\sum_i \mathcal{A}_{ki} \xi_i \right) \mathbf{b}_k \iff \eta_k = \sum_i \mathcal{A}_{ki} \xi_i, \quad k = 1, \dots, m.$$

L'azione di A su X è pertanto individuata dalla **matrice rappresentativa** $K^{m \times n} \ni \mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ki})$, determinata univocamente a meno di *trasformazioni di similitudine* delle basi di X ed Y .

Nei paragrafi successivi avremo sempre a che fare con operatori lineari definiti su spazi di Hilbert, in particolare con operatori A che mappano \mathcal{H} in sé. Nel caso di dimensioni finite, la classificazione delle proprietà degli operatori è molto semplice e discende grossomodo dalle proprietà delle matrici. Infatti, ogni *prehilbertiano finito dimensionale* è *completo* ed ogni *Hilbert finito dimensionale* è *isomorfo a \mathbb{C}^n* ; quindi, fissata una base in \mathbb{C}^n , si ha che ciascun operatore $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sarà rappresentato univocamente da una matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Comunemente, si usa affermare che la matrice \mathcal{A} è

i) hermitiana	se $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}^T$		i') simmetrica	se $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$,
ii) anti-hermitiana	se $\mathcal{A} = -\overline{\mathcal{A}}^T$	$\xrightarrow{\text{se } \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}}$	ii') anti-simmetrica	se $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^T$,
iii) unitaria	se $\mathcal{A}^{-1} = \overline{\mathcal{A}}^T$		iii') ortogonale	se $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$.

Inoltre, si dice che la matrice \mathcal{A} è **normale** se soddisfa la condizione $\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}^T = \overline{\mathcal{A}}^T\mathcal{A}$.

Sembra allora naturale introdurre un operatore A^* che ammetta come rappresentazione matriciale la trasposta coniugata $\overline{\mathcal{A}}^T$: in questo modo sarebbe possibile definire *operatori hermitiani, unitari o normali*, semplicemente richiedendo che siano soddisfatte delle opportune uguaglianze con l'operatore A^* . Nel prossimo paragrafo vedremo come costruire A^* in spazi di Hilbert di dimensione arbitraria.

Esempi

o ESEMPI DI OPERATORI IN $B(\ell_2, \ell_2)$

Richiamiamo alcune proprietà degli spazi ℓ_p . Sia ℓ_p lo spazio delle successioni di p -esima potenza sommabile, con $1 \leq p < \infty$: allora $\mathbf{x} = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_p \Leftrightarrow (\sum_i |\xi_i|^p)^{1/p} < \infty$. Lo spazio ℓ_p può essere metrizzato definendo in esso la metrica³⁷ $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_i |\xi_i - \eta_i|^p)^{1/p}$, rispetto alla quale (ℓ_p, d_p) è completo. La metrica d_p proviene dalla norma $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_i |\xi_i|^p)^{1/p}$ e quindi, poiché (ℓ_p, d_p) è completo, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ è di Banach³⁸. Definiamo ora l'operatore $T_n : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ e tale per cui

$$T_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n\text{-volte}}, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \quad \forall \mathbf{x} \in \ell_2.$$

³⁷Le proprietà di simmetria e di non-negatività si verificano banalmente; il fatto che $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sia finita e soddisfi la disuguaglianza triangolare segue invece dalla *disuguaglianza di Minkowsky*

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\eta_i|^p \right)^{1/p}.$$

³⁸Ricordiamo che $\|\cdot\|_p$ discende da un prodotto scalare se e solo se $p = 2$. Infatti, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_p$ deve esser soddisfatta l'*identità del parallelogramma* $\|\mathbf{x}\|_p^2 + \|\mathbf{y}\|_p^2 = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p^2)$; presi $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, \dots)$ ed $\mathbf{y} = (1, -1, 0, 0, \dots)$ in ℓ_p si ha che $\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_p = 2^{1/p}$ e $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = 2$. Sostituendo nell'identità si trova $2^{2/p+1} = 2^2 \Leftrightarrow p = 2$.

Gli operatori così definiti sono lineari e limitati. *i) Linearità:* $\forall \mathbf{x} = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}, \mathbf{y} = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ si ha che $T_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T_n(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n, \dots) = (0, 0, \dots, 0, \xi_n + \eta_n, \xi_{n+1} + \eta_{n+1}, \dots) = T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y}$. *ii) Limitatezza:* $\forall \mathbf{x} \in \ell_2$ si ha che $\|T_n\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=n}^{\infty} |\xi_i|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|^2 - \sum_{i \leq n} |\xi_i|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 - s_n \leq \|\mathbf{x}\|_2^2$, dunque T_n è limitato e $\|T_n\|_{B(\ell_2, \ell_2)} \leq 1$. Possiamo dimostrare che $\|T_n\|_{B(\ell_2, \ell_2)} = 1$: scelto $\mathbf{x}_n = (0, 0, \dots, 0, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ è $T_n\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n$ e quindi $\frac{\|T_n\mathbf{x}_n\|_2}{\|\mathbf{x}_n\|_2} = 1$ da cui $\|T_n\|_{B(\ell_2, \ell_2)} = 1$. Con ragionamenti analoghi si dimostra che l'operatore $S_n : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ tale che

$$S_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-volte}}, \xi_1, \xi_2, \dots),$$

è lineare, limitato ed ha norma $\|S_n\|_{B(\ell_2, \ell_2)} = 1$.

o UN ESEMPIO DI OPERATORE INTEGRALE IN $B(C^0, C^0)$

Richiamiamo alcune proprietà degli spazi $C^0([a, b])$. Sia $C^0([a, b])$ lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ a valori in \mathbb{R} o \mathbb{C} ; esso può essere metrizzato mediante $d_{C^0}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$, la quale è ben definita per il teorema di Weierstrass e soddisfa gli assiomi fondamentali. Rispetto ad essa lo spazio $(C^0([a, b]), d_{C^0})$ è completo³⁹ e d_{C^0} proviene dalla norma $\|x\|_{C^0} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$: dunque $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0})$ è di Banach⁴⁰. Sia ora $T : C^0([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$ tale che

$$Tx(t) = \int_a^b K(t, \tau)x(\tau) d\tau, \quad K(t, \tau) \in C^0([a, b] \times [a, b]).$$

T è lineare e limitato. *i) Linearità:* discende dalla linearità dell'integrale; *ii) limitatezza:*

$$\|Tx\|_{C^0} = \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b K(t, \tau)x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, \tau)||x(\tau)| d\tau \leq \kappa \|x\|_{C^0},$$

dove $\kappa \equiv (b - a) \max_{(t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]} |K(t, \tau)|$. Dunque T è limitato e $\|T\|_{B(C^0, C^0)} \leq \kappa$.

o OPERATORE DERIVATA

Sia $P_n([0, 1])$ lo spazio dei polinomi di grado minore od uguale ad n su $[0, 1]$ e $D : P_n([0, 1]) \rightarrow P_n([0, 1])$ l'operatore derivata. D è lineare, ma *non limitato*. Infatti, introdotta la norma $\|\cdot\| = \max_{t \in [0, 1]} |\cdot(t)|$ e scelta $x(t) = t^n$, si ha che $\|x\| = 1$, $\|Dx\| = \|nt^{n-1}\| = n$ e quindi, per definizione,

$$\|D\| = \sup_{\substack{x \in P_n([0, 1]) \\ \|x\|=1}} \|Dx\| = n.$$

4.2 Aggiunto di Hilbert di operatori lineari limitati (richiami)

La costruzione dell'aggiunto di Hilbert per operatori lineari limitati necessita un ultimo richiamo al teorema di Riesz per *forme sesquilineari limitate* (si veda nota 19, pg. 16) su spazi di Hilbert.

TEOREMA (RIESZ – FORME SESQUILINEARI LIMITATE) - Sia $F : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow K$ una forma sesquilineare limitata ed $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ due spazi di Hilbert. Allora $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, S\mathbf{y} \rangle$, dove $S : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ è un operatore lineare e limitato, univocamente determinato da F e tale per cui $\|F\| = \|S\|$.

³⁹Va dimostrato che ogni successione di Cauchy di elementi di $C^0([a, b])$ è convergente ad un elemento di $C^0([a, b])$. Sia quindi $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in $C^0([a, b])$: allora $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > \nu$ è $d_{C^0}(x_n, x_m) = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. Fissato $t_0 \in [a, b]$ segue che $(x_m(t_0))_{m \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in \mathbb{R} o \mathbb{C} e quindi, per la completezza di questi ultimi, $\lim_m x_m(t_0) = x(t_0)$. Si può allora costruire $x(t)$ punto per punto, sicché $\lim_m x_m(t) = x(t)$ e quindi, scelti $n, m > \nu$ è $\lim_m |x_n(t) - x_m(t)| = |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, ovvero x_n converge uniformemente ad x e quindi $x(t) \in C^0([a, b])$.

⁴⁰La norma $\|\cdot\|_{C^0}$ non proviene da un prodotto scalare: infatti, scelte in $C^0[a, b]$ le funzioni $x : t \rightarrow 1$ ed $y : t \rightarrow \frac{t-a}{b-a}$, si ha che $\|x\|_{C^0} = 1 = \|y\|_{C^0}$, $\|x + y\|_{C^0} = 2$ ed $\|x - y\|_{C^0} = 1$, dunque l'identità del parallelogramma non è soddisfatta.

DEFINIZIONE (OPERATORE AGGIUNTO DI HILBERT) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ lineare e limitato, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ di Hilbert. Si definisce **aggiunto di Hilbert**⁴¹ di A l'operatore $A^* : \mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ tale che

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =: \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}. \quad (4.2)$$

Si osservi che i prodotti scalari coinvolti nella (4.2) sono rispettivamente di \mathcal{H}_1 (destra) ed \mathcal{H}_2 (sinistra).

Dobbiamo ora mostrare che tale definizione è ben posta, ovvero che esiste A^* per un dato A .

TEOREMA (ESISTENZA E UNICITÀ DELL'AGGIUNTO) - $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ lineare e limitato. L'aggiunto $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ di A esiste, è unico ed è un operatore lineare, limitato e tale per cui $\|A\| = \|A^*\|$.

Dimostrazione. Occorre verificare che $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ individua una forma sesquilineare limitata su $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$. *i) Sesquilinearità:* è garantita dal prodotto scalare e dalla linearità di A ; la *linearità coniugata* (od *antilinearità*) della forma si prova osservando che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{H}_1$ e $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}_2$

$$F(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \langle A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2), \mathbf{y} \rangle = \bar{\alpha}\langle A\mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \bar{\beta}\langle A\mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \bar{\alpha}F(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \bar{\beta}F(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

ii) Limitatezza: segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dalla limitatezza di A :

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|A\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|,$$

dalla quale segue anche che $\|F\| \leq \|A\|$ ⁴². D'altra parte, per le proprietà dell'estremo superiore

$$\|F\| = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H} \\ \mathbf{x} \neq 0, \mathbf{y} \neq 0}} \frac{|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \geq \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{H} \\ \mathbf{x} \neq 0, A\mathbf{x} \neq 0}} \frac{|\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{x}\|\|A\mathbf{x}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{H} \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|A\|;$$

in definitiva: $\|F\| = \|A\|$. Dunque $F : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ è una forma sesquilineare limitata e, per il teorema di Riesz, $\exists! A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ lineare e limitato, tale che $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle$ ed $\|A\| = \|A^*\|$. \square

Va osservato che il teorema resta valido anche nel caso in cui A è *densamente definito* in \mathcal{H}_1 : infatti, per il teorema dell'estensione lineare limitata, $\exists! \tilde{A} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ lineare, limitato e tale che $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. Inoltre, appare evidente che il dominio dell'operatore aggiunto corrisponde al sottospazio

$$\mathcal{D}_{A^*} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H}_2 : F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitata, } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}.$$

Per come definito, l'operatore aggiunto soddisfa alcune proprietà generali, riassunte nel seguente

TEOREMA (PROPRIETÀ DELL'AGGIUNTO) - Siano $A, B : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ lineari e limitati, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ di Hilbert ed $A^*, B^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ i rispettivi aggiunti. Siano inoltre $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ due scalari qualunque. Allora

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^* && \text{(antilinearità),} \\ \text{b)} \quad & (A^*)^* = A && \text{(involutività),} \\ \text{c)} \quad & \|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Inoltre, supponendo che $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ e $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$, vale la seguente regola per il prodotto

$$(BA)^* = A^*B^*. \quad (4.4)$$

Infine, se A è biiettivo allora anche A^* è biiettivo ed in tal caso vale l'uguaglianza

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*. \quad (4.5)$$

⁴¹La desinenza “di Hilbert” serve a risaltare la differenza con la definizione di “aggiunto di Banach”, ovvero l'aggiunto di operatori lineari e limitati definiti su uno spazio di Banach (vedi *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 1, pgg. 185-186*). D'ora in avanti essa verrà sottintesa, poiché lavoreremo esclusivamente in spazi di Hilbert.

⁴²Si noti che $\|F\|$ va intesa sullo spazio delle forme sesquilineari limitate su $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ ed $\|A\|$ su $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)|_{\text{limitati}}$.

Dimostrazione. **a)** Dalla (4.2) segue che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}_1, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}_2$ è $\langle \mathbf{x}, (\alpha A + \beta B)^* \mathbf{y} \rangle = \langle (\alpha A + \beta B) \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\alpha} \langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\beta} \langle B \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) \mathbf{y} \rangle$. **b)** Per le proprietà del prodotto scalare, la (4.2) è equivalente all'espressione $\langle \mathbf{y}, A \mathbf{x} \rangle = \langle A^* \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ e quindi $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}_1, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}_2$ è $\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^* \mathbf{y} \rangle = \langle (A^*)^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. **c)** $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}_1$ è $\|A \mathbf{x}\|^2 = \langle A \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle = \langle A^* A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \|A^* A \mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\| \leq \|A^* A\| \|\mathbf{x}\|^2$ dunque $\|A\|^2 \leq \|A^* A\|$; d'altronde, per operatori lineari limitati $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$: nel nostro caso $\|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$ ovvero $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Sostituendo in quest'ultima A con A^* si trova $\|(A^*)^* A^*\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2$, ma $(A^*)^* = A$ e dunque $\|A A^*\| = \|A\|^2$. **d)** Notare che $BA : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_3$ ed $A^* B^* : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_1$, quindi $\forall z \in \mathcal{H}_3, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}_1$ si ha che $\langle \mathbf{x}, (BA)^* \mathbf{z} \rangle = \langle (BA) \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle A \mathbf{x}, B^* \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^* B^* \mathbf{z} \rangle$. **e)** $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ biiettivo $\Rightarrow A^{-1} \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1) \Rightarrow (A^{-1})^* \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Ma $A^{-1} A = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$ ed $A A^{-1} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$ quindi $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} = A^* (A^{-1})^*$ ed $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} = (A^{-1})^* A^*$ (essendo $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{1,2}}^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{1,2}}$), ovvero A^* è biiettivo ed $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. \square

L'introduzione dell'aggiunto permette di definire due importanti classi di operatori.

DEFINIZIONE (OPERATORI HERMITIANI ED AUTOAGGIUNTI) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineare e limitato, \mathcal{H} di Hilbert ed $A^* : \mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ il suo aggiunto. Diremo che A è **hermitiano** se $A \subseteq A^*$ e cioè se $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{A^*}$ ed $A \mathbf{x} = A^* \mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Equivalentemente, A è hermitiano se e solo se

$$\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_A. \quad (4.6)$$

Si dice invece che A è **autoaggiunto** se $A = A^*$, ovvero se A è hermitiano e $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$.

Dalla (4.6) segue un criterio di hermitianità: A su \mathcal{H} complesso è hermitiano se e solo se $\langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Si noti che se A, B sono hermitiani, il loro prodotto è hermitiano se e solo se $[A, B] = 0$. La definizione va letta con cautela: ha il pregio di evidenziare il legame tra autoaggiuntezza ed hermitianità, ma non ne giustifica esplicitamente la natura. In prima analisi occorre dimostrare il seguente

TEOREMA (PROPRIETÀ DELL'OPERATORE HERMITIANO) - A è hermitiano se e solo se $A \subseteq A^*$.

Dimostrazione. Il dominio dell'aggiunto si identifica equivalentemente come l'insieme di *tutti* gli $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ per i quali $\exists \mathbf{y}^* = A^* \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ tale che $\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ può essere rappresentato come $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, ovvero

$$\mathcal{D}_{A^*} = \{ \mathbf{y} \in \mathcal{H} : \exists \mathbf{y}^* \in \mathcal{H} \text{ con } \langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \}.$$

Ciò detto, sia A hermitiano ed $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_A$: allora $\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, dove $\mathbf{y}' \equiv A \mathbf{y}$; dunque $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ ed $A \mathbf{y} = A^* \mathbf{y} \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_A$, ovvero $A \subseteq A^*$. Viceversa, sia $A \subseteq A^*$: allora $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{A^*}$ ed $A \mathbf{y} = A^* \mathbf{y} \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_A$; quindi $\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^* \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A \mathbf{y} \rangle \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, ovvero A è hermitiano. \square

La dimostrazione prescinde dalla limitatezza dell'operatore: quest'ultima, infatti, è una proprietà generale dell'operatore hermitiano ed è soddisfatta se e solo se l'aggiunto esiste ed è ben definito.

Va inoltre osservato che *autoaggiuntezza* \Rightarrow *hermitianità*, ma non è necessariamente vero il contrario. Solo in spazi *finito dimensionali* le due definizioni, in generale, coincidono: infatti, se $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, l'esistenza dell'aggiunto è garantita per qualsiasi operatore lineare definito su \mathcal{H} e vale la corrispondenza $A \in \text{End}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Sicché, munito \mathbb{C}^n del prodotto scalare $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{\mathbf{z}}^T \mathbf{w}$, si ha che

$$\langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \mapsto \langle A \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{\mathbf{x}}^T \overline{A}^T \mathbf{y}, \quad \langle \mathbf{x}, A^* \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \mapsto \langle \mathbf{x}, A^* \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{\mathbf{x}}^T A^* \mathbf{y},$$

dove $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è la matrice rappresentativa di A^* . Dalla definizione (4.2) segue allora che $A^* = \overline{A}^T$ e per costruzione $\mathcal{D}_{A^*} = \mathbb{C}^n = \mathcal{D}_A$: quindi se A è hermitiano ($A = \overline{A}^T$) è anche autoaggiunto.

Per spazi di Hilbert di dimensione arbitraria, invece, l'unica possibilità è la seguente:

TEOREMA (HERMITIANO VS AUTOAGGIUNTO) - A hermitiano ed ovunque definito $\Rightarrow A$ è autoaggiunto.

Dimostrazione. Sia $A : \mathcal{D}_A = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ hermitiano, allora $A^* \supseteq A$ ovvero $\mathcal{D}_{A^*} \supseteq \mathcal{D}_A$ ed $A^* \mathbf{x} = A \mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. D'altra parte $\mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{H}$ e di conseguenza $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{D}_{A^*} \supseteq \mathcal{D}_A = \mathcal{H}$ da cui segue che $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{H} = \mathcal{D}_A$. In definitiva $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A$ ed $A \mathbf{x} = A^* \mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$ e cioè $A = A^*$. \square

Quindi in spazi infinito dimensionali (hermitianità \Rightarrow autoaggiuntezza) $\Leftrightarrow (A \text{ è limitato e } \overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H})$.

Concludiamo con un teorema di grande importanza nelle applicazioni della Teoria degli Operatori Lineari alla Meccanica Quantistica. Occorre prima introdurre la definizione di grafico di un operatore.

DEFINIZIONE (GRAFICO DI UN OPERATORE) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineare, \mathcal{H} di Hilbert. Si definisce **grafico**⁴³ di A l'insieme $\Gamma_A := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}$.

TEOREMA (GRAFICO CHIUSO I) - Sia A come prima e $\mathcal{D}_A = \mathcal{H}$. Allora A è limitato $\Leftrightarrow \Gamma_A$ è chiuso.⁴⁴

Il seguente corollario del teorema del grafico chiuso ha importanti conseguenze in Fisica Matematica.

TEOREMA (HELLINGER–TOEPLITZ) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineare, \mathcal{H} di Hilbert. Se A è hermitiano ed ovunque definito, allora A è limitato.

Dimostrazione. Va provato che Γ_A è chiuso. \mathcal{H} è completo, dunque $\exists (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di \mathcal{H} tale che $(\mathbf{x}_n, A\mathbf{x}_n) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})$; basta allora verificare che $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Ma A è hermitiano e quindi $\forall \mathbf{z} \in \mathcal{H}$,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{z}, A\mathbf{x}_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A\mathbf{z}, \mathbf{x}_n \rangle = \langle A\mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z}, A\mathbf{x} \rangle \iff \mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

Pertanto Γ_A è chiuso in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e per il teorema del grafico chiuso A è limitato. \square

Nel seguito vedremo che gran parte degli operatori della Meccanica Quantistica sono *non-limitati* ma soddisfano la condizione di hermitianità. Il teorema precedente suggerisce che essi *non possono essere ovunque definiti* e dovranno essere ristretti al più a sottospazi densi nello spazio di definizione originario.

Esempi

o PROIETTORE ORTOGONALE

Sia \mathcal{H} di Hilbert ed \mathcal{Y} un suo sottospazio chiuso. Per il teorema della proiezione ortogonale, $\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$ e quindi ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ammette la decomposizione ortogonale $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{Y}$ e $\mathbf{z} \in \mathcal{Y}^\perp$. Alla luce di tanto, la mappa $\mathcal{P}_\mathcal{Y} : \mathbf{x} \in \mathcal{H} \mapsto \mathcal{P}_\mathcal{Y}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{Y}$ individua un operatore *lineare, limitato, autoaggiunto* ed *idempotente* da \mathcal{H} in \mathcal{Y} . Un operatore siffatto prende il nome di *proiettore ortogonale* su \mathcal{Y} . Dimostriamo le proprietà elencate: la linearità è evidente, mentre per le altre proprietà occorre osservare che $\mathcal{P}_\mathcal{Y}$ agisce come l'operatore identità su \mathcal{Y} (in quanto $\mathcal{P}_\mathcal{Y}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{Y}$) e come l'operatore nullo su \mathcal{Y}^\perp (in quanto $\mathcal{P}_\mathcal{Y}\mathbf{z} = \mathbf{0} \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Y}^\perp$). *i) Idempotenza:* $\mathcal{P}_\mathcal{Y}^2\mathbf{x} = \mathcal{P}_\mathcal{Y}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. *ii) Limitatezza:* $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$ essendo $\mathbf{z} \perp \tilde{\mathbf{x}}$ e quindi $\|\mathcal{P}_\mathcal{Y}\mathbf{x}\| = \|\tilde{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2} \leq \|\mathbf{x}\|$, ovvero $\mathcal{P}_\mathcal{Y}$ è limitato. Inoltre, essendo idempotente, $\|\mathcal{P}_\mathcal{Y}\| = \|\mathcal{P}_\mathcal{Y}^2\| \leq \|\mathcal{P}_\mathcal{Y}\| \|\mathcal{P}_\mathcal{Y}\| = \|\mathcal{P}_\mathcal{Y}\|^2$ (grazie alla limitatezza) e quindi $\|\mathcal{P}_\mathcal{Y}\| = 1$. *iii) Autoaggiuntezza:* è banale poiché $\mathcal{P}_\mathcal{Y}$ è ovunque definito ed hermitiano (infatti $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ è $\langle \mathbf{x}, \mathcal{P}_\mathcal{Y}\mathbf{x} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{z}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle = \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 \in \mathbb{R}$). Viceversa, se $\mathcal{P}_\mathcal{Y} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ è limitato, autoaggiunto e tale per cui $\mathcal{P}_\mathcal{Y}^2 = \mathcal{P}_\mathcal{Y}$, allora $\mathcal{P}_\mathcal{Y}$ è un proiettore ortogonale su \mathcal{Y} ed $\mathcal{Y} := \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H} : \mathcal{P}_\mathcal{Y}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathcal{H}\}$ è un sottospazio chiuso di \mathcal{H} .

o OPERATORE DI POSIZIONE IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖDINGER

Sia $\mathbf{q} : \psi(x) \in \mathcal{D}_\mathbf{q} \subseteq L_2([a, b]) \rightarrow (\mathbf{q}\psi)(x) = x\psi(x) \in L_2([a, b])$ e $\mathcal{D}_\mathbf{q} = L_2([a, b])$ ⁴⁵. Per come definito, \mathbf{q} è lineare ed hermitiano, infatti $\forall \psi, \phi \in L_2([a, b])$ risulta essere

$$\langle \psi, \mathbf{q}\phi \rangle_{L_2([a, b])} = \int_a^b \bar{\psi}(x)x\phi(x) dx = \int_a^b x\bar{\psi}(x)\phi(x) dx = \langle \mathbf{q}\psi, \phi \rangle_{L_2([a, b])}.$$

Per il teorema di Hellinger–Toeplitz \mathbf{q} è limitato su $L_2([a, b])$. Per verificarlo, osserviamo che

$$\int_a^b x^2|\psi(x)|^2 dx \leq M^2 \int_a^b |\psi(x)|^2 dx < \infty, \quad M \equiv \max\{a^2, b^2\};$$

⁴³Tale definizione si estende a qualsiasi mappa $A : \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow Y$, con X, Y spazi normati.

⁴⁴Per la dimostrazione, si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 1, pg. 49*.

⁴⁵A rigore $\mathcal{D}_\mathbf{q} = \{\psi \in L_2([a, b]) : \mathbf{q}\psi \in L_2([a, b])\}$ ed $\overline{\mathcal{D}_\mathbf{q}} = L_2([a, b])$; tuttavia, vedremo tra breve che $(\mathbf{q}, \mathcal{D}_\mathbf{q})$ è limitato.

preso quindi $b^2 > a^2$ si ha che

$$\|\mathbf{q}\psi\|_{L_2([a,b])}^2 = \int_a^b x^2 |\psi(x)|^2 dx \leq b^2 \int_a^b |\psi(x)|^2 dx = b^2 \|\psi\|_{L_2([a,b])}^2.$$

Scelta in $L_2([a,b])$ una funzione di norma unitaria, si ha che $\|\mathbf{q}\|_{L_2([a,b])} \leq b$ per cui \mathbf{q} è limitato su $L_2([a,b])$. Inoltre, essendo hermitiano ed ovunque definito, \mathbf{q} è autoaggiunto su $L_2([a,b])$.

La situazione cambia drasticamente nel caso in cui $\mathbf{q} : \mathcal{D}_{\mathbf{q}} \subseteq L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. L'hermitianità resta conservata; tuttavia, se per assurdo $\mathcal{D}_{\mathbf{q}} = L_2(\mathbb{R})$, dal teorema di Hellinger–Toeplitz seguirebbe che \mathbf{q} è limitato su $L_2(\mathbb{R})$ e ciò è falso! Difatti, presa $\psi(x) = (\sigma\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \in L_2(\mathbb{R})$ con varianza $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ e costante di normalizzazione fissata di modo che $\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = 1$, si trova

$$\|\mathbf{q}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{2} \implies \|\mathbf{q}\| = \sup_{\substack{\psi \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1}} \|\mathbf{q}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ può essere arbitrariamente grande, \mathbf{q} non è limitato. Dunque $\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \subset L_2(\mathbb{R})$.

o OPERATORE IMPULSO IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖDINGER

Sia $\mathbf{p} : \psi(x) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subseteq L_2(\mathbb{R}) \mapsto (\mathbf{p}\psi)(x) = -i\partial_x \psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ l'operatore impulso in rappresentazione di posizione. Non è necessario ricorrere al teorema di Hellinger–Toeplitz per accorgersi che \mathbf{p} non è ovunque definito in $L_2(\mathbb{R})$: infatti, la sola richiesta che $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ non è sufficiente a garantire che anche $\partial_x \psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ e quindi la scrittura $\langle \psi, \mathbf{p}\psi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = -i \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi} \partial_x \psi(x) dx$ potrebbe non aver senso. Inoltre, per provare che \mathbf{p} è hermitiano su $L_2(\mathbb{R})$, occorre richiedere che

$$\langle \mathbf{p}\psi, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = i \bar{\psi}(x)\phi(x) \Big|_{\mathbb{R}} - i \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x) \partial_x \phi(x) dx \stackrel{!}{=} \langle \psi, \mathbf{p}\phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \iff \bar{\psi}(x)\phi(x) \Big|_{\mathbb{R}} = 0,$$

e non tutte le funzioni di $L_2(\mathbb{R})$ si annullano all'infinito, come ad esempio $\psi(x) = e^{-x^4 \sin^2 x}$. D'altra parte, si può dimostrare che $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ (vedi nota 12, pg. 7) è denso in $L_2(\mathbb{R})$ ed è tale per cui $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0 \forall \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. Dunque, posto $\mathcal{D}_{\mathbf{p}} = \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ si ha che \mathbf{p} è hermitiano, *densamente definito* in $L_2(\mathbb{R})$ e *non limitato*. Per convincersi della non limitatezza, sia $\psi(x) = (\sigma\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$: per assurdo, $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|\mathbf{p}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq K^2 \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2$, ma

$$\|\mathbf{p}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\sigma^2},$$

e quindi, data l'arbitrarietà di $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$, basterà scegliere $\sigma^2 < \frac{1}{2K^2}$ per trovare l'assurdo. Una strategia alternativa alla precedente è quella di adoperare il *principio di indeterminazione*: infatti, per pacchetti d'onda gaussiani $\Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{q} = \frac{1}{2}$ (si ha, cioè, minima indeterminazione), pertanto

$$\|\mathbf{p}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \Delta \mathbf{p}^2 = \frac{1}{4\|\mathbf{q}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2} = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

La situazione non cambia molto se $\mathbf{p} : \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subseteq L_2([a,b]) \rightarrow L_2([a,b])$: anche in questo caso $\mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset L_2([a,b])$. Ora però la scelta $\mathcal{D}_{\mathbf{p}} = \mathbb{H}^1([a,b])$ fa sí che \mathbf{p} non sia più hermitiano, non essendo garantita la condizione $\bar{\psi}(x)\phi(x) \Big|_a^b = 0$; l'hermitianità può essere ripristinata scegliendo

$$\mathcal{D}_{\mathbf{p}} = \mathbb{H}_0^1([a,b]) = \{\psi \in \mathbb{H}^1([a,b]) : \psi(a) = 0 = \psi(b)\}.$$

Anche rispetto ad $\mathbb{H}_0^1([a,b])$ l'operatore \mathbf{p} è *non limitato*: infatti, preso come intervallo $[-\pi, \pi]$ e $\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n^\alpha} \in \mathbb{H}_0^1([-\pi, \pi])$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ed $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\|\psi_n\|_{L_2([-\pi, \pi])}^2 = \frac{\pi}{n^{2\alpha}}, \quad \|\mathbf{p}\psi_n\|_{L_2([-\pi, \pi])}^2 = \frac{\pi}{n^{2(\alpha-1)}} \implies \frac{\|\mathbf{p}\psi_n\|_{L_2([-\pi, \pi])}}{\|\psi_n\|_{L_2([-\pi, \pi])}} = n.$$

Dall'arbitrarietà di $n \in \mathbb{N}$ segue che \mathbf{p} è non limitato. Nel prossimo paragrafo vedremo che rispetto a $\mathbb{H}_0^1([a,b])$ l'operatore \mathbf{p} (pur essendo hermitiano) non è autoaggiunto.

4.3 Aggiunto di Hilbert di operatori lineari non limitati

Introdurremo ora le principali proprietà relative ad operatori lineari non limitati in spazi di Hilbert.

Il problema principale da affrontare è legato alla *definizione di aggiunto*: per operatori non limitati la forma $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ non è più limitata ($\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}$) e dunque non è più possibile invocare il *teorema di Riesz*. Inoltre è necessario prestare attenzione ai domini di definizione degli operatori, la cui scelta può incidere drasticamente sulle proprietà degli operatori stessi⁴⁶.

Le difficoltà vengono superate nell'ipotesi che A sia **densamente definito** in \mathcal{H} : in tal caso l'operatore aggiunto esiste ed è ben definito. Per la sua costruzione si può procedere nel modo seguente: si consideri l'applicazione che ad ogni fissato $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ associa un $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}$ tale che

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A. \quad (4.7)$$

Poiché il prodotto scalare è lineare, l'insieme \mathcal{D}_{A^*} degli $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ siffatti identifica un sottospazio di \mathcal{H} . D'altra parte, ciascun \mathbf{y}^* , se esiste, è *univocamente determinato*, in quanto \mathcal{D}_A è *denso* in \mathcal{H} (se \mathcal{D}_A non fosse denso, si avrebbe che $(\overline{\mathcal{D}_A})^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$ ⁴⁷ e quindi esisterebbe un $\mathbf{y}_1 \perp \mathcal{D}_A$ sicché anche $\mathbf{y}^* + \mathbf{y}_1$ sarebbe soluzione della (4.7)). Pertanto, l'applicazione $A^* : \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} \mapsto A^*\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}^* \in \mathcal{H}$ individua un operatore (come tale grazie all'unicità) lineare (\mathbf{y}^* dipende linearmente da \mathbf{y}) da \mathcal{D}_{A^*} in \mathcal{H} , dove

$$\mathcal{D}_{A^*} := \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : \exists \mathbf{y}^* \in \mathcal{H} \text{ con } \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}.$$

In altre parole, l'insieme \mathcal{D}_{A^*} è individuato dagli elementi $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ per i quali il prodotto scalare $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, pensato come funzionale su \mathcal{D}_A , può essere *rappresentato* nella forma $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. In quest'ottica "rappresentativa", è possibile intendere $f_{\mathbf{y}}(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \mapsto f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{C}$ come un funzionale lineare e limitato su \mathcal{D}_A , di modo che \mathcal{D}_{A^*} possa essere espresso nella forma equivalente

$$\mathcal{D}_{A^*} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitato, } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}.$$

Si noti che se A^* esiste, è unico (vista l'unicità di \mathbf{y}^*). Possiamo allora riassumere il tutto nella seguente

DEFINIZIONE (AGGIUNTO DI OPERATORI NON LIMITATI) - Sia (A, \mathcal{D}_A) lineare, non limitato e densamente definito in \mathcal{H} . Si definisce **aggiunto** di (A, \mathcal{D}_A) l'operatore lineare (A^*, \mathcal{D}_{A^*}) tale che $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, dove $\mathcal{D}_{A^*} := \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \equiv \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitato, } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}$.

Si osservi che, diversamente dal caso di operatori limitati, non si può dire nulla a priori sul dominio dell'aggiunto: certamente il vettore nullo vi appartiene, ma può anche accadere che $\mathcal{D}_{A^*} = \{\mathbf{0}\}$. Come prevedibile, questo fatto ha notevoli conseguenze sulle proprietà di A^* , riassunte nel seguente

TEOREMA (PROPRIETÀ DELL'AGGIUNTO) - Siano A, B densamente definiti in \mathcal{H} . Allora:

$$\alpha) \quad \text{se } A \supseteq B \quad \Rightarrow \quad B^* \supseteq A^*; \quad (4.8)$$

$$\beta) \quad \text{se } \overline{\mathcal{D}_{A+B}} = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad (A+B)^* \supseteq A^* + B^*; \quad (4.9)$$

$$\gamma) \quad \text{se } \overline{\mathcal{D}_{AB}} = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad (AB)^* \supseteq B^*A^*; \quad (4.10)$$

$$\delta) \quad \text{se } \overline{\mathcal{D}_{A^*}} = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^* \supseteq A. \quad (4.11)$$

Dimostrazione. $\alpha)$ Sia $A \supseteq B$, allora $\mathcal{D}_A \supseteq \mathcal{D}_B$ ed $A\mathbf{x} = B\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{D}_{B^*} \supseteq \mathcal{D}_{A^*}$ e che $B^*\mathbf{y} = A^*\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$. Partiamo dalla prima: si tratta di verificare che ciascun elemento di \mathcal{D}_{A^*} è anche elemento di \mathcal{D}_{B^*} , tenendo presenti le rispettive definizioni dei domini. Sia quindi $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, allora $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ è limitato $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$; ma $A \supseteq B$ e quindi $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ è limitato $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B$, per cui $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{B^*}$. Passiamo alla seconda parte: sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, allora $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$; ma $A \supseteq B$ e quindi $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle$. D'altra parte, abbiamo dimostrato che $\mathcal{D}_{B^*} \supseteq \mathcal{D}_{A^*}$,

⁴⁶Spesso per tener conto di quest'osservazione si usa identificare l'operatore A come la coppia (A, \mathcal{D}_A) .

⁴⁷Si ricordi che un sottospazio \mathcal{K} di \mathcal{H} è denso in \mathcal{H} se e solo se $\overline{\mathcal{K}}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

quindi se \mathbf{y} è un elemento di \mathcal{D}_{A^*} è anche un elemento di \mathcal{D}_{B^*} e cioè $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, B^*\mathbf{y} \rangle$. Dal confronto con la precedente si trova che $\langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, B^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ ovvero $A^*\mathbf{y} = B^*\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$.

β) Sia $\overline{\mathcal{D}}_{A+B} = \mathcal{H}$, dunque $(A+B)^*$ è ben definito. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{D}_{(A+B)^*} \supseteq \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*}$ ed $(A+B)^*\mathbf{y} = (A^* + B^*)\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*}$ ⁴⁸. Si procede come prima, tenendo presente che

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{(A+B)^*} &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \equiv \langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitato}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A+B} = \mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B\}, \\ \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*} &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \equiv \langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitato}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B\}. \end{aligned}$$

Prima parte: sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*}$, allora $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \equiv \langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ è limitato $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B$; ma $\mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$ e quindi $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A+B)^*}$. Seconda parte: sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*}$, allora $\langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (A^* + B^*)\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B$ e dunque anche $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$; ma abbiamo dimostrato che $\mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*} \subseteq \mathcal{D}_{(A+B)^*}$ e quindi \mathbf{y} è anche elemento di $\mathcal{D}_{(A+B)^*}$, per cui $\langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (A+B)^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$. Confrontando con la precedente si trova che $\langle \mathbf{x}, (A+B)^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (A^* + B^*)\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*}$, ovvero $(A+B)^*\mathbf{y} = (A^* + B^*)\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_{B^*}$.

γ) Sia $\overline{\mathcal{D}}_{AB} = \mathcal{H}$, allora $(AB)^*$ è ben definito. Dimostriamo che $\mathcal{D}_{(AB)^*} \supseteq \mathcal{D}_{B^*A^*}$ ed $(AB)^*\mathbf{y} = (B^*A^*)\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{B^*A^*}$. Come prima, tenendo ora presente che $\mathcal{D}_{AB} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_B : B\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\} \subseteq \mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B$ e che

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{(AB)^*} &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \equiv \langle (AB)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitato}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{AB}\}, \\ \mathcal{D}_{B^*A^*} &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} : A^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{B^*}\} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*} : f_{A\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \equiv \langle B\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle \text{ è limitato}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle (AB)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ è limitato}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \cup \mathcal{D}_B\} \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che se $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_A \Rightarrow f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ è limitato $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$).

δ) Sia $\overline{\mathcal{D}}_{A^*} = \mathcal{H}$, allora $A^{**} \equiv (A^*)^*$ è ben definito. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{D}_{A^{**}} \supseteq \mathcal{D}_A$ e che $A^{**}\mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Adoperiamo una strategia diversa dalle precedenti⁴⁹: per definizione di aggiunto, l'insieme $\mathcal{D}_{A^{**}}$ consiste di *tutti* gli $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ che soddisfano la rappresentazione $\langle A^*\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, A^{**}\mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$. D'altra parte $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ si ha che $\langle A^*\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, A\mathbf{x} \rangle$ (avendo considerato la complessa coniugata dell'identità usuale). Di conseguenza, ciascun $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ è anche elemento di $\mathcal{D}_{A^{**}}$, ovvero $\mathcal{D}_{A^{**}} \supseteq \mathcal{D}_A$ e, per confronto delle due rappresentazioni, si ha che $A\mathbf{x} = A^{**}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. \square

Se però almeno uno tra A e B è limitato, allora le proprietà β) e γ) valgono identicamente, ovvero:

TEOREMA (ALMENO UN OPERATORE LIMITATO) - A, B densamente definiti in \mathcal{H} e B limitato. Allora

$$\beta') \quad \text{se } \overline{\mathcal{D}}_{A+B} = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad (A+B)^* = A^* + B^*; \quad (4.12)$$

$$\gamma') \quad \text{se } \overline{\mathcal{D}}_{BA} = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad (BA)^* = A^*B^*. \quad (4.13)$$

Dimostrazione. Essendo B limitato e densamente definito, si ha che $\mathcal{D}_B = \mathcal{H} = \mathcal{D}_{B^*}$.

$\beta')$ In virtù della (4.9), è sufficiente dimostrare che $\mathcal{D}_{(A+B)^*} \subseteq \mathcal{D}_{A^*}$. Sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A+B)^*}$, allora $\exists \mathbf{y}^* = (A+B)^*\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ tale che $\langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$; d'altronde $\mathcal{D}_{B^*} = \mathcal{H}$ e quindi $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle (A+B)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, B^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle$ dove $\mathbf{y}^* \equiv \mathbf{y}^* - B^*\mathbf{y} \in \mathcal{H}$. Pertanto, se $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A+B)^*}$, allora $\exists \mathbf{y}^* \in \mathcal{H}$ tale che $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, ovvero $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ ed $A^*\mathbf{y} = \mathbf{y}^* = (A+B)^*\mathbf{y} - B^*\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A+B)^*}$.

$\gamma')$ In virtù della (4.10), va dimostrato che $\mathcal{D}_{(BA)^*} \subseteq \mathcal{D}_{A^*B^*}$. Sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(BA)^*}$, allora $\exists \mathbf{y}^* = (BA)^*\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ t.c. $\langle (BA)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{BA} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A : A\mathbf{x} \in \mathcal{H}\} = \mathcal{D}_A$; ma $\mathcal{D}_{B^*} = \mathcal{H}$ e quindi $\langle (BA)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x}, B^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Dunque, se $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(BA)^*}$, allora $\langle A\mathbf{x}, B^*\mathbf{y} \rangle = \langle (BA)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, ovvero $B^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ e cioè $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*B^*} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : B^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}\}$ ed $A^*B^*\mathbf{y} = (BA)^*\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(BA)^*}$. \square

⁴⁸Si osservi che, in generale, se $A : \mathcal{D}_A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $B : \mathcal{D}_B \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, allora l'operatore somma $A+B$ è un operatore lineare con dominio $\mathcal{D}_{A+B} = \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$ ed $(A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A+B}$; \mathcal{D}_{A+B} è un sottospazio di \mathcal{H} .

⁴⁹Equivalentemente, si può adoperare tale strategia per dimostrare le proprietà α), β) e γ).

Sorprendentemente, la commutatività delle operazioni di inverso e di aggiunto per operatori limitati, resta immutata in presenza di operatori densamente definiti; tuttavia, la dimostrazione si complica.

TEOREMA (INVERSO DELL'AGGIUNTO) - Sia (A, \mathcal{D}_A) densamente definito in \mathcal{H} , iniettivo e tale che $\overline{\mathcal{R}_A} = \mathcal{H}$. Allora anche (A^*, \mathcal{D}_{A^*}) è iniettivo e soddisfa la relazione di commutatività

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*. \quad (4.14)$$

Dimostrazione. Essendo iniettivo, A è invertibile su $\mathcal{R}_A = \mathcal{D}_{A^{-1}}$ ed (A^{-1}, \mathcal{R}_A) è densamente definito: dunque $((A^{-1})^*, \mathcal{D}_{(A^{-1})^*})$ esiste. Vogliamo provare che anche $((A^*)^{-1}, \mathcal{D}_{(A^*)^{-1}})$ esiste e soddisfa la (4.14).

Sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$: evidentemente $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}_A$ si ha che $A^{-1}\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ e quindi $\langle A^{-1}\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle = \langle AA^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. D'altra parte $(A^{-1})^*$ esiste e quindi $\langle A^{-1}\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (A^{-1})^*A^*\mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A^{-1}} = \mathcal{R}_A$; ne segue che $A^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}$ e, dal confronto con la precedente, che $(A^{-1})^*A^*\mathbf{y} = \mathbf{y} \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$. Pertanto $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0} \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, ovvero A^* è invertibile su \mathcal{R}_{A^*} ed $(A^*)^{-1}A^* = \mathbb{1}$ su \mathcal{D}_{A^*} , allora $(A^*)^{-1} \subseteq (A^{-1})^*$. Per completare la dimostrazione occorre verificare che $(A^*)^{-1} \supseteq (A^{-1})^*$. Sia quindi $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}$: evidentemente $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ si ha che $A\mathbf{x} \in \mathcal{R}_A = \mathcal{D}_{A^{-1}}$ e quindi $\langle A\mathbf{x}, (A^{-1})^*\mathbf{y} \rangle = \langle A^{-1}A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. D'altronde A^* esiste e quindi $\langle A\mathbf{x}, (A^{-1})^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*(A^{-1})^*\mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$; ne segue che $(A^{-1})^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ e, dal confronto con la precedente, che $A^*(A^{-1})^*\mathbf{y} = \mathbf{y} \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}$. Ma A^* è invertibile, dunque $A^*(A^*)^{-1} = \mathbb{1}$ su $\mathcal{D}_{(A^*)^{-1}} = \mathcal{R}_{A^*}$ e quindi $(A^*)^{-1} : \mathcal{R}_{A^*} \rightarrow \mathcal{D}_{A^*}$ è suriettivo ed $(A^*)^{-1} \supseteq (A^{-1})^*$. \square

L'assenza della proprietà di limitatezza non garantisce più la continuità di un operatore densamente definito. Tuttavia, un nuovo concetto, quello di *chiusura*, affianca ora quello di continuità.

DEFINIZIONE (OPERATORE CHIUSO) - Sia $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. L'operatore A si dice **chiuso** se una delle tre condizioni equivalenti enunciate di seguito risulta soddisfatta⁵⁰:

- (1) $\Gamma_A : \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$;
- (2) per ogni successione $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ esistono $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ tali che

$$\left(\mathbf{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{x} \text{ ed } A\mathbf{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{y} \right) \implies \left(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \text{ ed } \mathbf{y} = A\mathbf{x} \right).$$

- (3) il dominio \mathcal{D}_A è completo rispetto al cosiddetto "prodotto scalare del grafico"

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle_{\Gamma_A} \equiv \langle (\mathbf{x}, A\mathbf{x}), (\mathbf{x}', A\mathbf{x}') \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle_{\mathcal{H}} + \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}' \rangle_{\mathcal{H}} \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{D}_A. \quad (4.15)$$

Si noti subito la differenza tra le proprietà di chiusura e continuità: per la chiusura l'esistenza del limite $A\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$ è *assunta*, mentre per la continuità $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ *implica* che $A\mathbf{x}_n \rightarrow A\mathbf{x}$. Ciò non deve trarre in inganno: in generale, *limitatezza e chiusura non corrispondono*⁵¹, a meno che gli operatori non siano ovunque definiti (teorema del grafico chiuso, §4.2). Poiché tale richiesta non è necessariamente soddisfatta per operatori non limitati, vogliamo dimostrarne una variante più generale.

TEOREMA (GRAFICO CHIUSO II) - (A, \mathcal{D}_A) lineare, $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{H}$ chiuso. Allora A è chiuso $\Leftrightarrow A$ è limitato.

Dimostrazione. \mathcal{H} è di Hilbert, dunque $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ è completo rispetto al prodotto scalare $\langle (\cdot, \star), (\cdot, \star) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}$. Se A è chiuso, Γ_A è chiuso in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e per ipotesi \mathcal{D}_A è chiuso in \mathcal{H} : allora Γ_A e \mathcal{D}_A sono completi (vedi teorema del sottospazio §2.1). Sia quindi $P(\cdot, \cdot) : (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \in \Gamma_A \mapsto P(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$: per come definito, P è lineare, limitato e biiettivo. La linearità è banale; per la limitatezza, invece, è sufficiente osservare che $\forall (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \in \Gamma_A$ risulta essere $\|P(\mathbf{x}, A\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} + \|A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \|(\mathbf{x}, A\mathbf{x})\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}$,

⁵⁰Per la dimostrazione dell'equivalenza si veda *Y. M. Berezansky et al., FUNCTIONAL ANALYSIS, Vol. II, Ch. 12, pg.5.*

⁵¹Esistono, infatti, esempi di operatori lineari per i quali chiusura non implica limitatezza e limitatezza non implica chiusura; si veda a.e. *E. Kreyszig, INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS WITH APPLICATIONS, Ch. 4, pgg. 294-295.*

essendo $\|(\cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}$ la norma di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ indotta dal prodotto scalare; la biettività, infine, segue dal fatto che la mappa inversa è data dall'operatore $P^{-1}(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \mapsto P^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \in \Gamma_A$. Ma Γ_A, \mathcal{D}_A sono completi, dunque P^{-1} è limitato⁵², ovvero $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|(\mathbf{x}, A\mathbf{x})\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \leq \delta \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}$ e quindi $\|A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} + \|A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \|(\mathbf{x}, A\mathbf{x})\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \leq \delta \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ e cioè A è limitato. Viceversa, sia A limitato ed $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ tale che, per $n \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ e $T\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{H}$; allora $\mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{D}_A$ (essendo \mathcal{D}_A chiuso) ed $A\mathbf{x}_n \rightarrow A\mathbf{x}$ (essendo A continuo). Dunque Γ_A è chiuso, ovvero A è chiuso. \square

Non sempre un operatore è chiuso: spesso ammette una o più estensioni chiuse.

DEFINIZIONE (OPERATORE CHIUDIBILE) - (A, \mathcal{D}_A) si dice **chiudibile** se ammette almeno un'estensione chiusa, equiv. se $\forall (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$, esiste $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ tale che, per $n \rightarrow \infty$ ($\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ ed $A\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$) $\Rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{0})$. Ogni operatore chiudibile ammette un'estensione minimale⁵³ \overline{A} , detta **chiusura** di A .

Naturalmente la chiusura, se esiste, è *unica*. Inoltre se A è limitato valgono le seguenti proprietà.

TEOREMA (CHIUDIBILITÀ DI OPERATORI LIMITATI) - (A, \mathcal{D}_A) limitato $\Rightarrow A$ chiudibile e $\mathcal{D}_{\overline{A}} = \overline{\mathcal{D}_A}$.

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ ed $A\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{H}$; A è limitato, quindi $\|A\mathbf{x}_n\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}_n\| \rightarrow 0$, ovvero $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ed A è chiudibile. La seconda parte di dimostra banalmente osservando che $\mathcal{D}_{\overline{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} : \exists (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A, \text{ con } \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \text{ e tale per cui } A\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{H}, \text{ dove } \mathbf{y} = \overline{A\mathbf{x}}\}$. \square

Quindi, se A è limitato, \overline{A} è proprio l'estensione prevista dal teorema dell'estensione lineare limitata. Una proprietà simile a quella dimostrata nel teorema precedente è soddisfatta dal grafico di operatori chiudibili: si può infatti dimostrare che *se A è chiudibile, allora $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A}$* ⁵⁴.

Nel caso di operatori non limitati e non chiusi, un problema matematico non banale incorre nel momento in cui non esistono estensioni chiuse. Ciò, tuttavia, non è d'interesse per le applicazioni in Fisica, dal momento che gli operatori non limitati d'interesse sono per la maggior parte chiudibili.

Rispetto alla chiusura, l'aggiunto di operatori densamente definiti soddisfa importanti proprietà.

TEOREMA (PROPRIETÀ DI CHIUSURA DELL'AGGIUNTO) - Sia (A, \mathcal{D}_A) densamente definito in \mathcal{H} . Allora:

- (a) A^* è chiuso; (b) A è chiudibile $\Leftrightarrow \overline{\mathcal{D}_{A^*}} = \mathcal{H}$ ed in tal caso $(A^*)^* = \overline{A}$;
- (c) se A è chiudibile $\Rightarrow (\overline{A})^* = A^*$; (d) se A è chiuso $\Rightarrow (A^*)^* = A$.

Dimostrazione. (a) Sia $\mathcal{J}(\cdot, \cdot) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\imath\mathbf{y}, -\imath\mathbf{x}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ un operatore; la restrizione di \mathcal{J} a Γ_A identifica l'insieme $\mathcal{J}\Gamma_A$, del quale prendiamo il complemento ortogonale:

$$(\mathcal{J}\Gamma_A)^\perp = \{(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \langle \mathcal{J}(\mathbf{x}, A\mathbf{x}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}.$$

Ma $\langle \mathcal{J}(\mathbf{x}, A\mathbf{x}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle (\imath A\mathbf{x}, -\imath\mathbf{x}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = -\imath \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle_{\mathcal{H}} + \imath \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}}$ e quindi la richiesta di ortogonalità diventa $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, ovvero $\mathbf{x}' \in \mathcal{D}_{A^*}$. Dunque $(\mathcal{J}\Gamma_A)^\perp = \Gamma_{A^*}$ e quindi Γ_{A^*} è chiuso in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, essendo il complemento ortogonale di un sottospazio non vuoto di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

(b) Per costruzione, l'operatore $\mathcal{J} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ è unitario, ovvero soddisfa l'identità $\mathcal{J}^2 = \mathbb{1}$; inoltre, essendo Γ_A un sottospazio dell'Hilbert $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, vale la relazione $\overline{\Gamma_A} = (\Gamma_A^\perp)^\perp$. Si ha quindi che

$$\overline{\Gamma_A} = (\Gamma_A^\perp)^\perp = ((\mathcal{J}^2\Gamma_A)^\perp)^\perp = (\mathcal{J}(\mathcal{J}\Gamma_A)^\perp)^\perp = (\mathcal{J}\Gamma_{A^*})^\perp.$$

Inoltre, per definizione A è chiudibile $\Leftrightarrow \overline{\Gamma_A}$ è il grafico di un operatore (la chiusura di A) e $\overline{\Gamma_A}$ non può contenere elementi del tipo $(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ con $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Vale allora la seguente catena logica: $\overline{\Gamma_A}$ è il grafico di un

⁵²Nel §4.1 abbiamo visto che se $A \in B(X, Y)$ è biiettivo ed X, Y sono di Banach, allora $A^{-1} \in B(Y, X)$. Ciò segue dal teorema della mappa aperta (vedi *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 1, pgg. 82-83.*)

⁵³L'estensione A' di A è detta **minimale** se qualsiasi altra estensione di A è a sua volta un'estensione di A' .

⁵⁴Si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 1, pg. 250.*

operatore $\Leftrightarrow \nexists \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ t.c. $(\mathbf{0}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{J}\Gamma_{A^*})^\perp \Leftrightarrow \langle (\mathbf{0}, \mathbf{z}), \mathcal{J}(y, A^*y) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle (\mathbf{0}, \mathbf{z}), (\iota A^*y, -\iota y) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = 0$
 $\forall y \in \mathcal{D}_{A^*} \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}, y \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \forall y \in \mathcal{D}_{A^*} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathcal{D}_{A^*}^\perp \Leftrightarrow \mathcal{D}_{A^*}$ è denso in \mathcal{H} . Allora, se $\overline{\mathcal{D}_{A^*}} = \mathcal{H}$, $(A^*)^*$ esiste, $(\mathcal{J}\Gamma_{A^*})^\perp = \Gamma_{(A^*)^*}$ e $\overline{\Gamma_A} = \Gamma_{\overline{A}}$ (essendo A chiudibile), per cui $\Gamma_{(A^*)^*} = \Gamma_{\overline{A}}$, ovvero $(A^*)^* = \overline{A}$.

(c) Per via delle proprietà (a) e (b) si ha che se A è chiudibile, allora $A^* = \overline{(A^*)^*} = ((A^*)^*)^* = (\overline{A})^*$.

(d) Se A è chiuso, Γ_A è chiuso ed $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \Gamma_A \oplus \Gamma_A^\perp$ (teorema della proiezione ortogonale, §2.2). Si prova facilmente che $\Gamma_A^\perp = \mathcal{J}\Gamma_{A^*}$ e quindi $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \Gamma_A \oplus \mathcal{J}\Gamma_{A^*}$. D'altra parte A^* è chiuso, dunque Γ_{A^*} è chiuso e così $\mathcal{J}\Gamma_{A^*}$ (essendo \mathcal{J} unitario); quindi $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \mathcal{J}\Gamma_{A^*} \oplus \Gamma_{(A^*)^*}$. In definitiva

$$\Gamma_A \oplus \mathcal{J}\Gamma_{A^*} = \mathcal{H} \times \mathcal{H} = \Gamma_{(A^*)^*} \oplus \mathcal{J}\Gamma_{A^*}.$$

Imponendo l'unicità della decomposizione ortogonale di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ si ottiene quanto cercato: $(A^*)^* = A$. In alternativa, se A è chiuso allora è anche chiudibile ed $\overline{A} = A$; invocando b) si trova che $(A^*)^* = A$. \square

Esempi

- AGGIUNTO NON DENSAMENTE DEFINITO.

Si è detto che per operatori non limitati il dominio dell'aggiunto non è necessariamente denso nello spazio di partenza; ne vediamo ora un esempio. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e misurabile tale che $f \notin L_2(\mathbb{R})$. Per fissata $\psi_0 \in L_2(\mathbb{R})$, si consideri l'operatore $A : \mathcal{D}_A \subseteq L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ tale che $(A\psi)(x) = \langle f, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \psi_0(x)$ dove $\psi \in \mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_A = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \int |\psi(x)f(x)| dx < \infty\}$; si dimostra che \mathcal{D}_A è denso in $L_2(\mathbb{R})$ e quindi A^* esiste. Sia ϕ un elemento di \mathcal{D}_{A^*} : allora $\forall \psi \in \mathcal{D}_A$

$$\langle \psi, A^*\phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle A\psi, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \overline{\langle f, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R})}} \langle \psi_0, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \psi, \langle \psi_0, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} f \rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Dunque $A^*\phi = \langle \psi_0, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} f$, ma $f \notin L_2(\mathbb{R})$ e quindi $\langle \psi_0, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \forall \phi \in \mathcal{D}_{A^*}$, ovvero $\psi_0 \in \mathcal{D}_{A^*}^\perp \Leftrightarrow \overline{\mathcal{D}_{A^*}} \neq L_2(\mathbb{R})$. Si noti che A^* agisce su \mathcal{D}_{A^*} come l'operatore nullo essendo $\phi \perp \psi_0 \forall \phi \in \mathcal{D}_{A^*}$.

- PROPRIETÀ DI CHIUSURA DELL'INVERSO DI UN OPERATORE CHIUSO ED INIETTIVO

Sia (A, \mathcal{D}_A) chiuso ed iniettivo. Allora (A^{-1}, \mathcal{R}_A) è un operatore chiuso. Il perché è semplice: (A^{-1}, \mathcal{R}_A) esiste grazie all'iniettività di A ed è chiuso se $\Gamma_{A^{-1}} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \mathbf{y} \in \mathcal{R}_A \text{ ed } A^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}\}$ è chiuso in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$; d'altra parte, la mappa di scambio $\mathcal{I}(\cdot, \cdot) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ è unitaria e quindi $\mathcal{I}\Gamma_A = \Gamma_{A^{-1}}$ è chiuso essendo Γ_A chiuso per ipotesi.

- UN ESEMPIO DI OPERATORE CHIUDIBILE

Sia $\mathcal{D}_A = C^1([0, 1]) \subset L_2([0, 1])$ ed $A(\cdot) : \psi \in C^1([0, 1]) \mapsto (A\psi)(x) = \iota \frac{d\psi(x)}{dx} \in L_2([0, 1])$. Si dimostra che $C^1([0, 1])$ è denso in $L_2([0, 1])$ e quindi A è densamente definito, tuttavia non è chiuso. Infatti, data la successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali di Fourier tendente in $L_2([0, 1])$ ad $u(x) = |x - 1/2|$, la successione delle derivate $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tende in $L_2([0, 1])$ a $v(x) = \theta(x - 1/2) - \theta(x + 1/2)$, dove θ è la funzione gradino. Ne segue che $v = Au$ ma $u \notin \mathcal{D}_A$, essendo u' discontinua. Quindi A non è chiuso su $C^1([0, 1])$; ciononostante, è chiudibile. Si può pensare, ad esempio, di estendere il dominio di A all'insieme $\mathcal{D}'_A = \{u \in \mathcal{D}_A : u(0) = 0 = u(1)\}$ oppure all'insieme⁵⁵ $\mathcal{D}''_A = \{u \in L_2([0, 1]), \text{ assolutamente continue e con } u' \in L_2([0, 1])\}$, rispetto ai quali A a è chiuso.

- UN ESEMPIO DI OPERATORE NON CHIUDIBILE

Sia $\mathcal{D}_A = C^0([a, b]) \subset L_2([a, b])$ ed $A(\cdot) : \psi \in C^0([a, b]) \mapsto (A\psi)(x) = \psi(a) \in L_2([a, b])$. È possibile costruire una successione $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([a, b])$ tale che $\psi_n(a) = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e, nel limite per $n \rightarrow \infty$, $\|\psi_n\|_{L_2([a, b])} \rightarrow 0$, ovvero $\psi_n \rightarrow 0$. Ma $(A\psi_n)(a) = 1 \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), quindi A non è chiudibile.

⁵⁵Ricordiamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *assolutamente continua* se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni insieme di intervalli disgiunti $\{(x_i, x'_i)\}_{i=1, \dots, n}$ di $[a, b]$ con $\sum_i |x_i - x'_i| < \delta_\varepsilon$ è $\sum_i |f(x_i) - f(x'_i)| < \varepsilon$. Equivalentemente, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua $\Leftrightarrow \exists g \in L_1([a, b])$ tale che $f(x) = f(a) + \int_a^x g(y) dy$, $x \in [a, b]$. Questa proprietà è alla base della teoria d'integrazione secondo Lebesgue ed è noto come *teorema fondamentale del calcolo integrale secondo Lebesgue*.

4.4 Simmetria, autoaggiuntezza ed essenziale autoaggiuntezza.

Introdotta le proprietà dell'aggiunto di operatori densamente definiti, possiamo passare ai concetti di simmetria ed autoaggiuntezza ed allo studio dei criteri di base per l'autoaggiuntezza.

DEFINIZIONE (OPERATORE SIMMETRICO ED AUTOAGGIUNTO) - (A, \mathcal{D}_A) densamente definito in \mathcal{H} . Diremo che A è **simmetrico** (o **hermitiano**⁵⁶) se e solo se $A \subseteq A^*$, ovvero se $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \forall x, y \in \mathcal{D}_A$. Si dice invece che A è **autoaggiunto** se $A = A^*$, ovvero se è simmetrico e $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$.

Dalle proprietà di chiusura dell'aggiunto segue che un operatore simmetrico è sempre chiudibile, dal momento che $\mathcal{D}_{A^*} \supseteq \mathcal{D}_A$ e \mathcal{D}_A è denso in \mathcal{H} , ha chiusura $\overline{A} = (A^*)^*$ ed $(\overline{A})^* = A^*$. Inoltre, A^* è un'estensione chiusa di A e, di conseguenza, della sua chiusura. In definitiva, appare evidente che

$$\circ A \text{ simmetrico} \iff A \subseteq (A^*)^* \subseteq A^*, \quad (4.16)$$

$$\circ A \text{ simmetrico e chiuso} \iff A = (A^*)^* \subseteq A^*, \quad (4.17)$$

$$\circ A \text{ autoaggiunto} \iff A = (A^*)^* = A^*. \quad (4.18)$$

Dunque $(A \text{ simmetrico} \Rightarrow A \text{ autoaggiunto}) \Leftrightarrow (A \text{ chiuso } ((A^*)^* = A) \text{ ed } A^* \text{ simmetrico } ((A^*)^* \supseteq A^*))$. Si noti che un operatore autoaggiunto è *massimalmente simmetrico*, ovvero non ammette estensioni simmetriche proprie: infatti, se $A = A^*$, $B \subseteq B^*$ ed $A \subseteq B$ si ha che $A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^* = A$ ed $A = B$.

La distinzione tra operatori simmetrici chiusi ed operatori autoaggiunti è molto importante: solo gli operatori autoaggiunti soddisfano le richieste del *teorema spettrale* e sono gli unici che, una volta esponenziati, forniscono i *gruppi unitari ad un parametro* governanti la dinamica in Meccanica Quantistica.

Diventa necessario capire quando un operatore simmetrico ammette *estensioni autoaggiunte*⁵⁷ e, nell'eventualità che tali estensioni esistano, come costruirle. Un primo criterio è il seguente

TEOREMA (SIMMETRICO VS AUTOAGGIUNTO) - (A, \mathcal{D}_A) simmetrico. Le seguenti aff. sono equivalenti:

$$(i) A \text{ è autoaggiunto}; \quad (ii) A \text{ è chiuso ed } \mathcal{N}_{A^* \mp i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}, \quad (iii) \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}.$$

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii). $A = A^*$ quindi A è chiuso (essendo A^* chiuso). Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_{A \pm i\mathbb{1}}$, allora

$$0 = \|(A \pm i\mathbb{1})\mathbf{x}\|^2 = \|A\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 \pm i\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mp i\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \|A\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2;$$

dunque $(A \pm i\mathbb{1})\mathbf{x} = 0$ implica che $\mathbf{x} = 0$, ovvero $\mathcal{N}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{N}_{A^* \pm i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) \Rightarrow (iii). Proviamo prima che se A simmetrico e chiuso, allora $\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}$ è chiuso. Sia $\mathbf{y} \in \overline{\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}}$: è possibile trovare una successione $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ per cui $(A \pm i\mathbb{1})\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$; quindi $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\varepsilon > \|(A \pm i\mathbb{1})(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)\| \geq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|$, ovvero $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy ed esiste $\mathbf{x} = \lim_n \mathbf{x}_n$. Ma A è chiuso e pertanto lo è anche $(A \pm i\mathbb{1})$, di conseguenza $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ ed $(A \pm i\mathbb{1})\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$ implicano che $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A \pm i\mathbb{1}}$ ed $\mathbf{y} = (A \pm i\mathbb{1})\mathbf{x}$, ovvero $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}$, per cui $\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}$ è chiuso. A questo punto va notato che dalla definizione di aggiunto segue che $\mathcal{N}_{A^*} = \mathcal{R}_A^\perp$ e che, se anche \mathcal{D}_{A^*} è denso in \mathcal{H} , $\mathcal{N}_A = \mathcal{R}_{A^*}^\perp$. In definitiva

$$\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}} = (\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}^\perp)^\perp = (\mathcal{N}_{A^* \mp i\mathbb{1}})^\perp = \{\mathbf{0}\}^\perp = \mathcal{H}.$$

(iii) \Rightarrow (i). A è simmetrico, quindi $A \subseteq A^*$; è sufficiente dimostrare che $\mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{D}_A$. Sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$: dato che $\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}$, esiste $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ tale che $(A \pm i\mathbb{1})\mathbf{x} = (A^* \pm i\mathbb{1})\mathbf{y}$. D'altra parte $A\mathbf{x} = A^*\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, per cui la precedente diventa ora $(A^* \pm i\mathbb{1})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, ovvero $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \mathcal{N}_{A^* \pm i\mathbb{1}}$. Ma \mathcal{D}_{A^*} è denso in \mathcal{H} e quindi $\mathcal{N}_{A^* \mp i\mathbb{1}} = \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Quindi $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ed $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_A$, da cui $A = A^*$. \square

⁵⁶Un purista distinguerebbe tra operatori simmetrici ed hermitiani, osservando che simmetria implica hermitianità, ma che non è necessariamente vero il contrario. Tuttavia, perché tale distinzione sia coerente è necessario affermare quanto segue: sia (A, \mathcal{D}_A) lineare, $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$; A si dice *hermitiano* se e solo se $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \forall x, y \in \mathcal{D}_A$, mentre A è *simmetrico* se e solo se $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ ed $A \subseteq A^*$, ovvero se è densamente definito ed hermitiano. Quindi, se la richiesta di densità è imposta da principio, simmetria è sinonimo di hermitianità. Tenendo conto di quest'osservazione, adopereremo da qui in avanti il termine "simmetrico" per evidenziare il fatto che la teoria vale per operatori densamente definiti.

⁵⁷Si noti che se A e B sono hermitiani ed $A \subseteq B$, allora $A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*$; dunque "estendere" A equivale a "ridurre la distanza" tra A ed A^* . In questo senso pare ovvio il fatto che un operatore autoaggiunto è massimalmente simmetrico.

Introduciamo ora una nuova nozione, necessaria per i criteri e le proprietà che vedremo nel seguito.

DEFINIZIONE (ESSENZIALE AUTOAGGIUNTEZZA) - (A, \mathcal{D}_A) *simmetrico*⁵⁸ è detto **essenzialmente autoaggiunto** se e solo se $\bar{A} = (\bar{A})^*$ (la sua chiusura è autoaggiunto), equivalentemente se $A^* = (A^*)^*$.

Delle definizioni date finora, quella di essenziale autoaggiuntezza è probabilmente la più utile ai fini pratici. Il motivo è che, come vedremo tra breve, gli operatori essenzialmente autoaggiunti ammettono una sola estensione autoaggiunta e quindi contengono in sé tutta l'informazione di un operatore autoaggiunto. Inoltre, sono molto comuni in Fisica Matematica ed, in particolare, in Meccanica Quantistica. Per queste ragioni ci soffermiamo sulle principali proprietà connesse all'essenziale autoaggiuntezza.

TEOREMA (ESTENSIONI AUTOAGGIUNTE DI OPERATORI ESSENZIALMENTE AUTOAGGIUNTI) - (A, \mathcal{D}_A) è essenzialmente autoaggiunto se e solo se ammette un'unica estensione autoaggiunta (la chiusura \bar{A}).

Dimostrazione. A essenzialmente autoaggiunto, dunque $A^* = (\bar{A})^* = \bar{A} = (A^*)^*$. Sia quindi $B \supseteq A$ t.c. $B = B^*$, allora $A \subseteq B^* \subseteq A^* = \bar{A}$; ma B^* è chiuso, per cui $\bar{A} \subseteq \bar{B} = B$, ovvero $B = \bar{A}$. Per il viceversa si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 2, § X.I.* \square

Dal teorema si deduce che l'essenziale autoaggiuntezza può essere caratterizzata nel modo seguente:

$$\circ \quad A \text{ essenzialmente autoaggiunto} \quad \iff \quad A \subseteq (A^*)^* = A^*. \quad (4.19)$$

Il confronto di quest'ultima con la (4.17) permette di apprezzare l'importanza del concetto di essenziale autoaggiuntezza: si è detto che un operatore simmetrico chiuso è autoaggiunto se e solo se A^* è simmetrico. Tuttavia, la proprietà di chiusura non è sempre garantita ed il più delle volte si ha a che fare con operatori simmetrici non chiusi: in questo caso, riuscire a dimostrare che l'operatore è essenzialmente autoaggiunto garantisce l'esistenza e l'unicità di un'estensione autoaggiunta.

Un criterio di essenziale autoaggiuntezza segue dal teorema "simmetrico vs autoaggiunto".

COROLLARIO (SIMMETRICO VS ESSENZIALMENTE AUTOAGGIUNTO) - (A, \mathcal{D}_A) *simmetrico*. *Aff. equiv.:*

$$(i') \quad A \text{ è essenzialmente autoaggiunto}; \quad (ii') \quad \mathcal{N}_{A^* \pm i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}, \quad (iii') \quad \bar{\mathcal{R}}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}.$$

Dimostrazione. $(i') \Rightarrow (ii')$. A ess. autoaggiunto $\Rightarrow \bar{A}$ autoaggiunto $\Rightarrow \mathcal{N}_{(\bar{A})^* \pm i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}$. Ma A è simmetrico e quindi $(\bar{A})^* = A^*$, per cui $\mathcal{N}_{A^* \pm i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}$. $(ii') \Rightarrow (iii')$. A simmetrico, quindi $\bar{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$, ovvero A^* esiste. Ma $\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}$ è sottospazio di un Hilbert, quindi $\bar{\mathcal{R}}_{A \pm i\mathbb{1}} = (\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}^\perp)^\perp = (\mathcal{N}_{A^* \mp i\mathbb{1}})^\perp = \mathcal{H}$. $(iii') \Rightarrow (i')$. Si noti che $\bar{\mathcal{R}}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \{\mathbf{0}\} = \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}^\perp = \mathcal{N}_{A^* \mp i\mathbb{1}}$, dunque (ii') e (iii') sono equivalenti. Proviamo che $(ii') \Rightarrow (i')$. A simmetrico ed $\mathcal{N}_{A^* \pm i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}$, quindi $A^* = (\bar{A})^*$ ed $\mathcal{N}_{(\bar{A})^* \pm i\mathbb{1}} = \{\mathbf{0}\}$. Naturalmente \bar{A} è chiuso, allora \bar{A} è autoaggiunto, per cui A è essenzialmente autoaggiunto. \square

Un ultimo concetto di utilità nelle applicazioni è quello di *core* di un operatore.

DEFINIZIONE (CORE DI UN OPERATORE) - (A, \mathcal{D}_A) *densamente definito e chiudibile* ed $S = A|_{\mathcal{D}_S}$ dove $\mathcal{D}_S \subseteq \mathcal{D}_A$ *denso*. Diremo che (S, \mathcal{D}_S) è un **core** di (A, \mathcal{D}_A) se e solo se $\bar{S} = \bar{A}$.

Si noti che S è per costruzione chiudibile (\bar{A} è una sua estensione chiusa) ed A è un core di \bar{A} .

In un certo senso, il core condensa in sé tutte le informazioni sulla chiudibilità di un operatore. Sebbene possa sembrare un concetto artificioso, il core è di grande utilità, specialmente in riferimento ad operatori autoaggiunti. In questo caso, esso consente di definire univocamente l'operatore individuandone un core e non il suo esatto dominio di definizione (il che è spesso difficile). In altre parole, invece di dimostrare l'autoaggiuntezza di A su \mathcal{D}_A è sufficiente dimostrarne l'essenziale autoaggiuntezza su un core. Quest'osservazione, sebbene banale, è importante e la riassumiamo nel seguente

⁵⁸Ricordiamo che, nella convenzione adoperata, il termine "simmetrico" contiene la richiesta di densità di \mathcal{D}_A in \mathcal{H} .

TEOREMA (CORE ESSENZIALMENTE AUTOAGGIUNTO) - (A, \mathcal{D}_A) autoaggiunto, $S = A|_{\mathcal{D}_S}$ ed $\mathcal{D}_S \subseteq \mathcal{D}_A$ denso. Allora (S, \mathcal{D}_S) è un core di (A, \mathcal{D}_A) se e solo se S è essenzialmente autoaggiunto.

Dimostrazione. (S, \mathcal{D}_S) un core di (A, \mathcal{D}_A) , quindi $\overline{S} = \overline{A}$; ma A è autoaggiunto, dunque chiuso, ovvero $A = \overline{A}$, per cui \overline{A} è autoaggiunto e quindi anche \overline{S} . Allora S è essenzialmente autoaggiunto. Viceversa, sia S essenzialmente autoaggiunto, quindi ammette un'unica estensione autoaggiunta, la chiusura \overline{S} ; d'altronde $S \subseteq A$ ed A è autoaggiunto, dunque $\overline{S} = A = \overline{A}$, ovvero (S, \mathcal{D}_S) è un core di (A, \mathcal{D}_A) . \square

Bisogna tener presente che i criteri analizzati in questa sezione costituiscono solo degli indizi sull'esistenza di estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici, ma non ne garantiscono in generale l'unicità (fatta eccezione per l'essenziale autoaggiuntezza). Esistono, infatti, esempi di operatori simmetrici che ammettono infinite estensioni autoaggiunte, così come esempi che non ne ammettono alcuna.

A completamento della sezione, riportiamo le proprietà di autoaggiuntezza dell'operatore A^*A . Sia (A, \mathcal{D}_A) densamente definito: se A è limitato è immediato dimostrare che A^*A è autoaggiunto, ma se A è non-limitato non è neanche evidente che \mathcal{D}_A sia denso in \mathcal{H} . La situazione si chiarisce nell'ipotesi in cui A sia chiuso, grazie ad un importante risultato dovuto a von Neumann. Premettiamo il seguente

LEMMA (INVERSO VS AUTOAGGIUNTO) - Sia (A, \mathcal{D}_A) densamente definito, iniettivo ed autoaggiunto. Allora $(A^{-1}, \mathcal{D}_{A^{-1}})$ è densamente definito ed autoaggiunto.

Dimostrazione. Naturalmente $\mathcal{D}_{A^{-1}} = \mathcal{R}_A$; proviamo che $\overline{\mathcal{R}_A} = \mathcal{H}$. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbe $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, t.c. $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$; ciò implica che $\mathbf{z} \in \mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A$ ed $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{z} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Pertanto $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e, dato che A è iniettivo, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, il che è assurdo. L'autoaggiuntezza di A^{-1} è banale dal momento che $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$ (teorema "inverso dell'aggiunto", §4.3). \square

Grazie al precedente lemma, possiamo ora dimostrare il seguente teorema, dovuto a von Neumann.

TEOREMA (AUTOAGGIUNTEZZA DI A^*A) - (A, \mathcal{D}_A) densamente definito e chiuso. Allora $(A^*A, \mathcal{D}_{A^*A})$ è densamente definito ed autoaggiunto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} \equiv \mathbf{1} + A^*A$, allora $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \mathcal{D}_{A^*A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A : A\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A^*}\}$. Preso $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ si ha che

$$\langle \mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, A^*A\mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|A\mathbf{x}\|^2,$$

per cui $\langle \mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R} \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$: $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ è simmetrico. Inoltre, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}\| \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, dunque \mathcal{B} ammette inverso limitato su $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ (teorema dell'inverso limitato, §4.1). Occorre dimostrare che $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \mathcal{H}$. Sfruttiamo la chiusura di A : Γ_A è chiuso in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, per cui $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \Gamma_A \oplus \Gamma_A^\perp = \Gamma_A \oplus \mathcal{J}\Gamma_A^*$ ⁵⁹ ed una generica coppia $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ si scriverà come

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (iA^*\mathbf{y}, -i\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \ \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}.$$

In particolare, posto $\mathbf{z}' = \mathbf{0}$ si ha che $\mathbf{z} = \mathbf{x} + iA^*\mathbf{y}$ ed $A\mathbf{x} = i\mathbf{y}$, per cui $A\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A^*}$ e $\mathbf{z} = \mathcal{B}\mathbf{x}$. Essendo $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ arbitrario, $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \mathcal{H}$. Ora, preso $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ si ha che $\mathbf{h} = \mathcal{B}\mathbf{x}$ per un certo $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ e quindi

$$\langle \mathcal{B}^{-1}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \langle \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \langle \mathcal{B}^{-1}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}}.$$

Dunque $(\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}})$ è simmetrico ed ovunque definito, ovvero è autoaggiunto, e quindi, per il precedente lemma, $(A^*A = \mathcal{B} - \mathbf{1}, \mathcal{D}_{A^*A} = \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ è densamente definito in \mathcal{H} ed autoaggiunto. \square

Un utile corollario del teorema di von Neumann è il seguente: A autoaggiunto $\implies A^2$ autoaggiunto. Naturalmente, se (A, \mathcal{D}_A) è densamente definito e chiuso, anche (A^*, \mathcal{D}_{A^*}) lo è e quindi ha senso definire AA^* il quale, sotto l'ipotesi di chiusura di A , è anch'esso autoaggiunto; ciononostante, in generale $A^*A \neq AA^*$. Un operatore (A, \mathcal{D}_A) chiuso e densamente definito tale che $A^*A = AA^*$ è detto **normale**.

⁵⁹ A è densamente definito, quindi A^* esiste. Occorre tener presente che A^* è chiuso e che \mathcal{J} è unitario, quindi se Γ_A è chiuso lo è anche $\mathcal{J}\Gamma_A$. Avevamo visto che $\Gamma_{A^*} = (\mathcal{J}\Gamma_A)^\perp$, quindi $\Gamma_{A^*}^\perp = \mathcal{J}\Gamma_A \implies \mathcal{J}\Gamma_{A^*}^\perp = \Gamma_A \implies \Gamma_A^\perp = \mathcal{J}\Gamma_{A^*}$.

Esempi

- UN ESEMPIO DI OPERATORE SIMMETRICO PRIVO DI ESTENSIONI AUTOAGGIUNTE
L'esempio è tratto dal problema 4, capitolo VIII, volume 1 del *M. Reed, B. Simon*.

- a) Sia $A \supseteq B$, con $\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} = \mathcal{R}_{B+i\mathbb{1}}$: allora $A = B$;
- b) A simmetrico e t.c. $\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} = \mathcal{H}$, $\mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}} \neq \mathcal{H}$: A non ammette estensioni autoaggiunte.

a) Per ipotesi $A \supseteq B$, ovvero $\mathcal{D}_A \supseteq \mathcal{D}_B$ ed $A\mathbf{x} = B\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B$. Sia $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_A$, dunque $A\mathbf{a} + i\mathbf{a} \in \mathcal{H}$; d'altra parte $\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} = \mathcal{R}_{B+i\mathbb{1}}$, quindi $\exists \mathbf{y} \in \mathcal{H} : \mathbf{y} = A\mathbf{a} + i\mathbb{1}\mathbf{a} = B\mathbf{a} + i\mathbb{1}\mathbf{a}$. Per cui $B\mathbf{a} + i\mathbf{a} \in \mathcal{H}$, cioè \mathbf{a} è anche un elemento di \mathcal{D}_B ; pertanto $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_B$, da cui segue che $A = B$.

b) Per assurdo sia $B \supseteq A$ tale che $B = B^*$. Essendo B autoaggiunto, $\mathcal{R}_{B\pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}$ e quindi $\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} = \mathcal{R}_{B+i\mathbb{1}}$; per via di a) $A = B$. Ma se A è autoaggiunto allora $\mathcal{R}_{A\pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}$ e ciò è assurdo, essendo $\mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}} \neq \mathcal{H}$ per ipotesi. A non ammette estensioni autoaggiunte.

- PROPRIETÀ DI AUTOAGGIUNTEZZA DELL'OPERATORE DI POSIZIONE

Negli esempi del §4.2 si è visto che $\mathfrak{q}(\cdot) : \psi \in \mathcal{D}_q \subseteq L_2(\mathbb{R}) \mapsto (\mathfrak{q}\psi)(x) = x\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ è hermitiano e non limitato, da cui si era concluso che $\mathcal{D}_q \neq L_2(\mathbb{R})$ (teorema di Hellinger–Toeplitz). Si vuole ora dimostrare che \mathfrak{q} è autoaggiunto rispetto a \mathcal{D}_q . Per cominciare, si osservi che

$$\mathcal{D}_q = \{ \psi \in L_2(\mathbb{R}) : (\mathfrak{q}\psi)(x) = x\psi(x) \in L_2(\mathbb{R}) \}$$

è denso in $L_2(\mathbb{R})$ in quanto contiene lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ delle *funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto*⁶⁰ su \mathbb{R} , che è denso in $L_2(\mathbb{R})$. Quindi $(\mathfrak{q}^*, \mathcal{D}_{\mathfrak{q}^*})$ esiste e \mathfrak{q} è simmetrico ($\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}^*$). Occorre dimostrare che $\mathcal{D}_{\mathfrak{q}^*} \subseteq \mathcal{D}_q$: sia $\xi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}^*}$, allora $\exists \xi^* \in L_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} x\bar{\psi}(x)\xi(x) dx = \langle \mathfrak{q}\psi, \xi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \psi, \xi^* \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)\xi^*(x) dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_q,$$

ovvero

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)[x\xi(x) - \xi^*(x)] dx = \langle \psi, \mathfrak{q}\xi - \xi^* \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_q.$$

Quindi se $\xi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}^*}$ si ha che $\mathfrak{q}\xi - \xi^* \in \mathcal{D}_q^\perp = \{0\}$, essendo \mathcal{D}_q denso in $L_2(\mathbb{R})$. Pertanto $\mathfrak{q}\xi \in L_2(\mathbb{R})$, ovvero $\xi \in \mathcal{D}_q$ e quindi $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*$. Una strategia alternativa è la seguente: presa la funzione $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, costruiamo le funzioni $(x \pm i)^{-1}\psi(x)$: evidentemente $(x \pm i)^{-1}\psi(x) \in \mathcal{D}_q$, quindi

$$\frac{1}{x \pm i} [(\mathfrak{q} \pm i)\psi](x) = \psi(x) \quad \forall \psi \in L_2(\mathbb{R}).$$

Dunque $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}\pm i} = L_2(\mathbb{R})$ e quindi, per il teorema “simmetrico vs autoaggiunto”, si ha che $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*$. Per concludere, sia $\mathfrak{q}_d \equiv \mathfrak{q}|_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$: mostriamo che $(\mathfrak{q}_d, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ è un *core* di $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_q)$. \mathfrak{q}_d è ancora simmetrico ma non più autoaggiunto; inoltre $\mathfrak{q}_d^* = \mathfrak{q}^*$ poiché nella costruzione di \mathfrak{q}^* si è sfruttata la sola ipotesi $\overline{\mathcal{D}_q} = \mathcal{H}$. Dobbiamo provare che \mathfrak{q}_d è essenzialmente autoaggiunto. Ciò è immediato: \mathfrak{q} è autoaggiunto, quindi $\mathcal{N}_{\mathfrak{q}^*\pm i} = \{\mathbf{0}\}$ (teorema “simm. vs autoag.”), dunque $\mathcal{N}_{\mathfrak{q}_d^*\pm i} = \{\mathbf{0}\}$, per cui \mathfrak{q}_d è essenzialmente autoaggiunto (teorema “simm. vs ess. autoag.”). Pertanto $(\mathfrak{q}_d, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ è un core di $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_q)$. Si dimostra analogamente che la restrizione di \mathfrak{q} allo spazio $\mathcal{S}(R)$ delle *funzioni di Schwartz*⁶¹ (anch'esso contenuto in \mathcal{D}_q e denso in $L_2(R)$) è un core di \mathfrak{q} . In definitiva

$$\mathfrak{q} = \overline{\mathfrak{q}_d} = \overline{\mathfrak{q}_s}.$$

⁶⁰Spesso $C_0^\infty(\mathbb{R})$ viene indicato come $C_c^\infty(\mathbb{R})$ o semplicemente $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si può dimostrare che $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L_p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ ed Ω è un aperto di \mathbb{R}^n . (vedi, a.e. *T. Susslina, SOBOLEV SPACES AND EMBEDDING THEOREMS*, §3, pg. 9.).

⁶¹ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle *funzioni di Schwartz* che si annullano all'infinito, insieme a tutte le loro derivate, più rapidamente dell'inverso di ogni polinomio. Una definizione più rigorosa di $\mathcal{S}(R)$ verrà data nel capitolo sulle distribuzioni.

◦ PROPRIETÀ DI AUTOAGGIUNTEZZA DELL'OPERATORE IMPULSO IN $L_2([a, b])$

Si è visto in precedenza che $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}_0^1([a, b]))$ è non limitato, hermitiano e densamente definito. Si vuole ora mostrare che $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}_0^1([a, b]))$ non è autoaggiunto. Per provarlo conviene osservare che $\mathbb{H}^1([a, b]) = \{\psi \in L_2([a, b]) : \psi'(x) \in L_2([a, b])\}$ può essere equivalentemente definito come

$$\mathbb{H}^1([a, b]) = \left\{ \psi \in L_2([a, b]) : \psi(x) = \psi(a) + \int_a^x \xi(y) dy \quad \forall x \in [a, b], \xi(x) \in L_2([a, b]) \right\}. \quad (4.20)$$

Spiegheremo questo fatto nel prossimo esempio; per il momento si può notare che la richiesta $\psi'(x) \in L_2([a, b])$ sembra implicare che $\exists \xi \in L_2([a, b])$ t.c. $\psi(x) = \psi(a) + \int_a^x \xi(x) dx \quad \forall x \in [a, b]$, ovvero che ψ è *assolutamente continua* (vedi nota 54, pg. 38). Quindi $\mathbb{H}_0^1([a, b])$ diventa ora

$$\mathbb{H}_0^1([a, b]) = \left\{ \psi \in L_2([a, b]) : \psi(x) = \int_a^x \xi(x) dx \quad \forall x \in [a, b], \xi(x) \in L_2([a, b]), \psi(a) = 0 = \psi(b) \right\}.$$

Essendo $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0 \equiv \mathbb{H}_0^1([a, b]))$ simmetrico, si ha che $\mathcal{D}_\mathfrak{p}^0 \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^0$. Vediamo com'è fatto $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^0$: sia $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^0$, allora $\exists \psi^* \in L_2([a, b])$ t.c. $\langle \psi, \mathfrak{p}\phi \rangle_{L_2([a, b])} = \langle \psi^*, \phi \rangle_{L_2([a, b])} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0$, esplicitamente

$$-i \int_a^b \overline{\psi(x)} \phi'(x) dx = \int_a^b \overline{\psi^*(x)} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0. \quad (4.21)$$

Il membro di destra si integra per parti: detta $\Psi(x) = \int_a^x \overline{\psi^*(y)} dy$ la primitiva di $\overline{\psi^*}$ ed osservando che $\phi'(x) = \xi(x)$ con $\xi \in L_2([a, b])$ (essendo $\phi \in \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0$), si ottiene che

$$\int_a^b \overline{\psi^*(x)} \phi(x) dx = \Psi(x) \phi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \Psi(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b \Psi(x) \xi(x) dx$$

(si noti che, per definizione, $\phi(a) = 0 = \phi(b)$). In questo modo la (4.21) diventa

$$\int_a^b [\overline{\psi(x)} - \Psi(x)] \xi(x) dx = \langle -i\psi - \overline{\Psi}, \xi \rangle_{L_2([a, b])} = 0.$$

L'insieme delle $\xi \in L_2([a, b])$ soddisfacenti la precedente relazione non individua un sottospazio denso e quindi il suo complemento ortogonale contiene almeno la funzione costante; essendo arbitraria, quest'ultima può essere scelta uguale a $-i\psi(a)$ di modo che $-i\psi - \overline{\Psi} = -i\psi(a)$, ovvero

$$\psi(x) = \psi(a) + i \int_a^x \psi^*(y) dy, \quad \psi^* \in L_2([a, b]).$$

Sicché se $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^0$ esiste $\psi^* \in L_2([a, b])$ tale che $\psi(x) = \psi(a) + \int_a^x \psi^*(y) dy \quad \forall x \in [a, b]$, quindi il dominio dell'aggiunto contiene almeno $\mathbb{H}^1([a, b])$ e non prevede le condizioni al contorno caratterizzanti $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0)$, per cui $\mathcal{D}_\mathfrak{p}^0 \subset \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^0$. Di conseguenza $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0)$ è *simmetrico ma non autoaggiunto*. Tuttavia, $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0)$ ammette *infinite estensioni autoaggiunte*. Si può infatti sostituire la condizione $\psi(a) = 0 = \psi(b)$ con quella più debole $\psi(b) = e^{i\theta} \psi(a)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ e definire \mathfrak{p} sul dominio

$$\mathcal{D}_\mathfrak{p}^\theta \equiv \{ \psi \in \mathbb{H}^1([a, b]) : \psi(b) = e^{i\theta} \psi(a), \theta \in [0, 2\pi) \}.$$

In questo modo $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_\mathfrak{p}^\theta) \supseteq (\mathfrak{p}, \mathcal{D}_\mathfrak{p}^0)$ ed identifica al variare di $\theta \in [0, 2\pi)$ una famiglia di operatori simmetrici ed autoaggiunti. La proprietà di simmetria è immediata: infatti $\forall \psi, \phi \in \mathcal{D}_\mathfrak{p}^\theta$ si ha che

$$\overline{\psi(x)} \phi(x) \Big|_a^b = \overline{\psi(b)} \phi(b) - \overline{\psi(a)} \phi(a) = \overline{\psi(a)} e^{-i\theta} \phi(a) e^{i\theta} - \overline{\psi(a)} \phi(a) = 0.$$

Invece per l'autoaggiuntezza occorre osservare che $(\mathfrak{p}^*, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^\theta) \subseteq (\mathfrak{p}^*, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^0)$, quindi se $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^\theta$ certamente $\psi \in \mathbb{H}^1([a, b])$. Pertanto basta verificare che le condizioni al contorno di $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^\theta$ sono le stesse

di $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{\theta}$. Sia $\psi \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}^*}^{\theta}$ allora $\exists \psi^* \in L_2([a, b])$ tale che $\langle \psi, \mathbf{p}\phi \rangle_{L_2([a, b])} = \langle \psi^*, \phi \rangle_{L_2([a, b])} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{\theta}$; d'altronde, integrando per parti e tenendo presenti le condizioni al contorno di ϕ , si ha che

$$\langle \psi, \mathbf{p}\phi \rangle_{L_2([a, b])} = \iota \int_a^b \overline{\psi'}(x)\phi(x) dx - \iota \overline{\psi}(x)\phi(x) \Big|_a^b = \langle -\iota\psi', \phi \rangle_{L_2([a, b])} - \iota\phi(a)(\overline{\psi}(b)e^{i\theta} - \overline{\psi}(a)).$$

Ponendo $\psi^* \equiv -\iota\psi'$ (il che è lecito essendo $\psi \in \mathbb{H}^1([a, b])$), dev'essere $\overline{\psi}(b)e^{i\theta} = \overline{\psi}(a)$. In definitiva, se $\psi \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}^*}^{\theta}$ si ha che $\psi \in \mathbb{H}^1([a, b])$ e $\psi(b) = e^{i\theta}\psi(a)$, per cui $\psi \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{\theta}$ e $(\mathbf{p}, \mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{\theta})$ è autoaggiunto.

o PROPRIETÀ DI AUTOAGGIUNTEZZA DELL'OPERATORE IMPULSO IN $L_2(\mathbb{R})$

Si è visto in precedenza che $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ è non limitato, hermitiano e densamente definito in $L_2(\mathbb{R})$. Per studiarne le proprietà di autoaggiuntezza dobbiamo introdurre qualche nuova definizione. Cominciamo ricordando che una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è **localmente sommabile** in Ω se e solo se $f \cdot g \in L_1(\Omega) \quad \forall g \in C_0^{\infty}(\Omega)$; scriveremo quindi $f \in L_{1,loc}(\Omega)$. Si noti ora che se $g \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $f \cdot g' \in L_1(\Omega)$ per cui $\int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x) dx$ è ben definito; integrando per parti si trova che

$$\int_{\Omega} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} f'(x)g(x) dx = - \int_{\Omega} f'(x)g(x) dx.$$

Ciò suggerisce una nuova definizione di derivata ed, in particolare, di funzione derivata.

DEFINIZIONE (DERIVATA DEBOLE) - $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ ammette **derivata debole**⁶² in Ω se e solo se

$$\exists h \in L_{1,loc}(\Omega) \quad t.c. \quad \int_{\Omega} f(x)g'(x) dx = - \int_{\Omega} h(x)g(x) dx, \quad \forall g \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (4.22)$$

In tal caso porremo $h =: Df$ e diremo che h è la (funzione) derivata debole di f in Ω .

Si noti che se $f \in C^1(\Omega)$, la derivata debole di f esiste ed $Df = f'$ quasi ovunque in Ω ; naturalmente, esistono funzioni derivabili debolmente ma non nel senso classico⁶³. Prima di procedere, completiamo il discorso con alcune osservazioni sulle proprietà della derivata debole.

1. Se esiste, la derivata debole è *unica*. Ciò segue dal lemma di DU BOIS-REYMOND⁶⁴:

$$\left(f \in L_{1,loc}(\Omega) \quad \text{ed} \quad \int_{\Omega} f(x)g(x) dx = 0, \quad \forall g \in C_0^{\infty}(\Omega) \right) \implies \left(f(x) = 0 \quad \text{q.o. in} \quad \Omega \right).$$

Si noti la stretta analogia del precedente con il lemma fondamentale del calcolo variazionale.

2. La derivata debole è *lineare*. Infatti, date $f_1, f_2 \in L_{1,loc}(\Omega)$ e dette $h_1, h_2 \in L_{1,loc}(\Omega)$ le rispettive derivate deboli in Ω , si ha che $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $\forall g \in C_0^{\infty}(\Omega)$ risulta essere

$$\int_{\Omega} D(c_1f_1 + c_2f_2)(x)g(x) dx = - \int_{\Omega} (c_1f_1 + c_2f_2)(x)g'(x) dx = \int_{\Omega} (c_1 Df_1 + c_2 Df_2)(x)g(x) dx.$$

3. *Regola di Leibnitz*. Date $u, u' \in L_{1,loc}(\Omega)$ e $v, v' \in C(\Omega)$ si ha che $D(uv) = (Du)v + u(Dv)$.
4. Se $f \in L_2(\Omega)$ allora $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, dal momento che $C_0^{\infty}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ ed il prodotto di due funzioni di $L_2(\Omega)$ è una funzione di $L_1(\Omega)$. Pertanto, l'introduzione del concetto di derivata debole consente di dare una definizione più rigorosa di $\mathbb{H}^1(\Omega)$ (ed in generale di $\mathbb{H}^p(\Omega)$ considerando derivate deboli di ordine superiore). Diremo quindi che

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \{ f \in L_2(\Omega) : Df \in L_2(\Omega) \}. \quad (4.23)$$

Ciò non inficia la generalità dei precedenti discorsi, dal momento che, per quanto detto prima, se f è derivabile classicamente in Ω ed $f' \in L_2(\mathbb{R})$, allora $Df = f'$ quasi ovunque in Ω .

⁶²Nota anche come *derivata generalizzata nel senso di Sobolev* o *derivata distribuzionale* (vedi §6.5).

⁶³Un tipico esempio è dato dalla funzione $f = \{1 - |x| \text{ se } -1 < x < 1; 0 \text{ altrove}\}$, la quale non è derivabile su tutto \mathbb{R} , ma ammette in \mathbb{R} la derivata debole $h(x) = \{1 \text{ se } -1 < x < 0; -1 \text{ se } 0 < x < 1; 0 \text{ altrove}\}$.

⁶⁴Per la dimostrazione si veda §6.3 oppure *T. Suslina, SOBOLEV SPACES AND EMBEDDING THEOREMS, § 3, pg. 9-10*.

5. Infine, consideriamo le proprietà di *assoluta continuità* della derivata debole. Ricordiamo che

- a) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è ass. continua $\Leftrightarrow \exists g \in L_1([a, b])$ t.c. $f(x) = f(a) + \int_a^x g(y) \, dy$, $x \in [a, b]$.
- b) se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è ass. continua, allora esiste $f' \in L_1([a, b])$ quasi ovunque in $[a, b]$.

Pertanto, il fatto che $f' \in L_1([a, b])$ non garantisce necessariamente l'assoluta continuità di f . Per la derivata debole in \mathbb{R} , invece, si dimostra valido il seguente teorema [Sus004]

TEOREMA (DERIVATA DEBOLE VS ASSOLUTA CONTINUITÀ) - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile⁶⁵. Allora f è ass. continua su $[a, b] \Leftrightarrow \exists Df \in L_1([a, b])$; in tal caso $f' = Df$ q.o. in $[a, b]$.

Pertanto, se $f \in \mathbb{H}^1([a, b])$, allora $Df \in L_2([a, b])$, ma $L_2 \subset L_1$ e quindi f è ass. continua su $[a, b]$ e $Df = f'$ quasi ovunque. Si spiega così perché la (4.20) sia equivalente alla (4.23).

Ora, la derivata debole in $L_2(\mathbb{R})$ altro non è che l'operatore lineare $(D, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ ed è immediato dimostrarne l'*anti-autoaggiuntezza*, ovvero $D^* = -D$. Occorre identificare il dominio dell'aggiunto: una funzione $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ appartiene a \mathcal{D}_{D^*} se e solo se $\exists \psi^* \in L_2(\mathbb{R})$ tale che $\langle \psi, D\phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \psi^*, \phi \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \quad \forall \phi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. In particolare $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(x) \phi'(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(x) (D\phi)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^*}(x) \phi(x) \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

avendo sfruttato il fatto che $D\psi = \psi'$ q.o. in \mathbb{R} , $\forall \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. Dalla relazione precedente segue che $D\overline{\psi} = -\overline{\psi^*}$ e quindi $\overline{\psi} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ (essendo $\psi^* \in L_2(\mathbb{R})$). Di conseguenza $\mathcal{D}_{D^*} = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_D$ e $D\psi = -D^*\psi \quad \forall \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$, ovvero $D^* = -D$. Quindi, poiché $\mathfrak{p} = -\imath D$ q.o. in \mathbb{R} ed essendo l'aggiunto una mappa antilineare, si ha che $\mathfrak{p}^* = (-\imath D)^* = \imath D^* = -\imath D = \mathfrak{p}$ e cioè $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ è autoaggiunto. Vedremo in seguito un modo più rapido per provare l'autoaggiuntezza di $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ basato sulla *trasformata di Fourier-Plancherel*.

◦ **AUTOAGGIUNTEZZA DELL'OPERATORE \mathfrak{p}^2 IN $L_2(\mathbb{R})$ ED $L_2([a, b])$**

Sia $\mathfrak{p}^2(\cdot) : \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2} \subset L_2(\mathbb{R}) \mapsto (\mathfrak{p}^2\psi)(x) = -\psi''(x) \in L_2(\mathbb{R})$: è evidente che $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}$ è caratterizzato da tutte quelle funzioni di $L_2(\mathbb{R})$ tali che $\psi' \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$, ovvero $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2} = \mathbb{H}^2(\mathbb{R})$. Inoltre $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ e si può dimostrare che $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ e quindi \mathfrak{p}^2 è densamente definito in $L_2(\mathbb{R})$. D'altra parte, se A è autoaggiunto, allora anche A^2 è autoaggiunto, per cui $(\mathfrak{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}))$ è autoaggiunto. Nel caso $L_2([a, b])$, le proprietà di autoaggiuntezza di \mathfrak{p}^2 richiamano grossomodo quelle di \mathfrak{p} in $L_2([a, b])$. Per cominciare, conviene notare che $D^2\psi = \psi''$ quasi ovunque in $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$, essendo $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$; inoltre, per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2([a, b])$ si scrive equivalentemente come

$$\mathbb{H}^2([a, b]) = \left\{ \psi \in L_2([a, b]) : \psi(x) = \alpha + \beta x + \int_a^x (x-y)\xi(y) \, dy, \quad x \in [a, b], \quad \xi \in L_2([a, b]) \right\},$$

ovvero come lo spazio delle funzioni di $L_2([a, b])$ ass. continue e con derivata prima ass. continua (teorema "derivata debole vs ass. continuità"). Infine, definiamo $\mathbb{H}_0^2([a, b]) = \{\psi \in \mathbb{H}^2([a, b]) : \psi(a) = 0 = \psi(b), \psi'(a) = 0 = \psi'(b)\}$. $(\mathfrak{p}^2, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^0 \equiv \mathbb{H}_0^2([a, b]))$ è *simmetrico ma non autoaggiunto*. La simmetria è banale: si integra due volte per parti e si impongono le condizioni al contorno. Per la non autoaggiuntezza, basta far vedere che per il dominio dell'aggiunto non sono necessarie le condizioni al contorno di $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^0$. Procedendo come nel terzo esempio di questa sezione, si trova che

$$\int_a^b \left[\overline{\psi}(x) + \int_a^x (y-x)\psi^*(y) \, dy \right] \xi(x) \, dx = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}, \quad \psi^* \equiv (\mathfrak{p}^2)^*\psi \in L_2([a, b]).$$

⁶⁵Ricordiamo che se (X, \mathcal{F}) è uno spazio misurabile (\mathcal{F} una σ -algebra di X), allora $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione misurabile se e solo se $\{x \in X : f(x) < \alpha, \alpha \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{F}$.

L'insieme delle $\xi \in L_2([a, b])$ soddisfacenti la precedente non è denso, per cui se $\psi \in \mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^0$, allora

$$\psi(x) = \alpha + \beta x + \int_a^x (x-y)\xi(y) dy \quad \implies \quad \psi \in \mathbb{H}^2([a, b]).$$

Di conseguenza $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^0 \subset \mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^0$ ovvero $(\mathfrak{p}^2, \mathbb{H}_0^2([a, b]))$ è simmetrico ma non autoaggiunto. Tuttavia $(\mathfrak{p}^2, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^0)$ ammette *infinite estensioni autoaggiunte*. Come nel caso di $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$, anche qui è necessario indebolire le condizioni al contorno. Consideriamo ad esempio la famiglia $(\mathfrak{p}^2, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^{c.c.})$, dove

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^{c.c.} \equiv \left\{ \psi \in \mathbb{H}^2([a, b]) : \begin{cases} \alpha_1 \psi(a) + \alpha_2 \psi(b) + \alpha_3 \psi'(a) + \alpha_4 \psi'(b) = 0 \\ \beta_1 \psi(a) + \beta_2 \psi(b) + \beta_3 \psi'(a) + \beta_4 \psi'(b) = 0 \end{cases} \right\}.$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ per $i = 1, \dots, 4$. Essendo $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^{c.c.} \supseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^0$, dev'essere $\mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^{c.c.} \subseteq \mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^0$; quindi se $\psi \in \mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^{c.c.}$, certamente $\psi \in \mathbb{H}^2([a, b])$. In definitiva, occorre dimostrare che le condizioni al contorno per $\mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^{c.c.}$ siano le stesse di $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^{c.c.}$. Sia dunque $\psi \in \mathcal{D}_{(\mathfrak{p}^2)^*}^{c.c.}$, allora $\exists \psi^* \in L_2([a, b])$ tale che $\langle \psi, \mathfrak{p}^2 \phi \rangle_{L_2([a, b])} = \langle \psi^*, \phi \rangle_{L_2([a, b])} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^{c.c.}$. D'altronde, integrando due volte per parti

$$\langle \psi, \mathfrak{p}^2 \phi \rangle_{L_2([a, b])} = [\bar{\psi}'(x)\phi(x) - \bar{\psi}(x)\phi'(x)]_a^b + \langle -\psi'', \phi \rangle_{L_2([a, b])}.$$

Pertanto, posto $\psi^* = -\psi''$ (il che è lecito essendo $\psi \in \mathbb{H}^2([a, b])$), dev'essere necessariamente

$$\bar{\psi}(b)\phi'(b) - \bar{\psi}'(b)\phi(b) = \bar{\psi}(a)\phi'(a) - \bar{\psi}'(a)\phi(a).$$

Occorre allora determinare la matrice $\mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 4}$ in modo che le condizioni

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(a) \\ \phi(b) \\ \phi'(a) \\ \phi'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}'(x)\phi(x)|_a^b = \bar{\psi}(x)\phi'(x)|_a^b, \quad (4.24)$$

implichino su ψ la medesima condizione, ovvero

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(a) \\ \psi(b) \\ \psi'(a) \\ \psi'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Affinché le condizioni al contorno siano due equazioni linearmente indipendenti, \mathcal{Q} dev'essere di rango due. Di conseguenza, individuare i minori 2×2 di \mathcal{Q} non singolari equivale a determinare condizioni al contorno che rendono $(\mathfrak{p}^2, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^2}^{c.c.})$ autoaggiunto. Ad esempio, se il minore definito dalle prime due colonne di \mathcal{Q} è non singolare, le condizioni al contorno si riducono alla forma

$$\begin{cases} \phi(a) + \alpha_3 \phi'(a) + \alpha_4 \phi'(b) = 0 \\ \phi(b) + \beta_3 \phi'(a) + \beta_4 \phi'(b) = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

le quali, combinate con le (4.24), implicano le condizioni

$$\begin{cases} \psi(a) + \bar{\alpha}_3 \psi'(a) - \bar{\beta}_3 \psi'(b) = 0 \\ \psi(b) - \bar{\alpha}_4 \psi'(a) + \bar{\beta}_4 \psi'(b) = 0. \end{cases}$$

Perciò, un'estensione autoaggiunta è caratterizzata da condizioni al contorno date dalla (4.25) con $\alpha_3, \beta_4 \in \mathbb{R}$ ed $\alpha_4 = -\beta_3$ (quattro parametri reali). Ulteriori esempi di "condizioni al contorno autoaggiunte" sono le seguenti: 1) *condizioni di annullamento o di Dirichlet*, $\psi(a) = 0 = \psi(b)$; 2) *condizioni di Neumann*, $\psi'(a) = 0 = \psi'(b)$; 3) *condizioni periodiche con sfasamento*, $\psi(b) = e^{i\theta} \psi(a)$, $\psi'(b) = e^{i\theta} \psi'(a)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$; 4) *condizioni a canna d'organo*, $\psi(a) = 0 = \psi'(b)$.

4.5 Estendibilità di operatori simmetrici

Vedremo ora alcuni criteri che consentono di stabilire l'esistenza e l'unicità di estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici. Preliminarmente occorre richiamare le proprietà di isometria ed unitarietà.

DEFINIZIONE (OPERATORE ISOMETRICO) - Un operatore (A, \mathcal{D}_A) è detto *isometrico* se

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_A. \quad (4.26)$$

Dalla definizione segue che un operatore isometrico è *limitato*, ha norma unitaria, ammette aggiunto e soddisfa l'identità $A^*A = \mathbb{1}$. Inoltre è evidente che la (4.26) equivale a richiedere che $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$: quindi un operatore isometrico è necessariamente *iniettivo* (ammette inverso limitato su \mathcal{R}_A). Naturalmente se $\overline{\mathcal{R}}_A \neq \mathcal{H}$ si ha che $A^*A \neq AA^*$, mentre se \mathcal{R}_A è denso in \mathcal{H} , allora A^{-1} è estendibile a tutto \mathcal{H} ed A è anche suriettivo. In quest'ultimo caso si usa dare la seguente

DEFINIZIONE (OPERATORE UNITARIO) - Un operatore (A, \mathcal{D}_A) è *unitario* se è isometrico e suriettivo.

In definitiva, un operatore (A, \mathcal{D}_A) unitario⁶⁶ ammette inverso densamente definito e limitato ed è semplice verificare che $A^{-1} = A^*$, $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$ (ovvero A è normale) ed A^* è esso stesso isometrico.

I criteri studiati nella sezione precedente risaltano il ruolo che i sottospazi $\mathcal{N}_{A^* \pm \mathbb{1}}$ hanno nella determinazione delle proprietà di autoaggiuntezza di un operatore simmetrico. In effetti, essi forniscono tutte le informazioni utili per stabilire l'esistenza di estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici.

DEFINIZIONE (SPAZI ED INDICI DI DIFETTO) - $A \subseteq A^*$, $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$. Si dicono *sottospazi di difetto* di A i sottospazi $\mathcal{M}_\pm \equiv \mathcal{N}_{A^* \pm \mathbb{1}}$ ed *indici di difetto* di A le rispettive dimensioni di Hilbert⁶⁷ $n_\pm \equiv \dim \mathcal{M}_\pm$.

Una prima osservazione: se $A = \overline{A} \subseteq A^*$ (simmetrico e chiuso) e $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$, allora $A = A^* \Leftrightarrow n_\pm = 0$ (teorema "simmetrico vs autoaggiunto"); se invece $A \subseteq A^*$ e $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$, allora $\overline{A} = (\overline{A})^* \Leftrightarrow n_\pm = 0$ (teorema "simmetrico vs ess. autoaggiunto"). Ciò appare ancor più evidente alla luce del seguente

TEOREMA (DECOMPOSIZIONE DI \mathcal{D}_{A^*}) - Sia $A = \overline{A} \subseteq A^*$ e $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$. Allora

$$\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-. \quad (4.27)$$

Dimostrazione. Essendo A^* chiuso, \mathcal{D}_{A^*} è di Hilbert rispetto al prodotto scalare del grafico (vedi (4.15)); inoltre, i sottospazi \mathcal{D}_A ed \mathcal{M}_\pm sono chiusi in \mathcal{D}_{A^*} rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare e sono a due a due ortogonali. Infatti, se $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_+$ ed $\mathbf{y} \in \mathcal{M}_-$, allora

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\Gamma_{A^*}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} + \langle A^*\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} + \langle -i\mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = 0;$$

inoltre, \mathbf{y} appartiene al complemento ortogonale di \mathcal{D}_A in \mathcal{D}_{A^*} se e solo se

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\Gamma_{A^*}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} + \langle A^*\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} + \langle A\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A,$$

cioè se e solo se $A^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, $(A^*)^2\mathbf{y} = -\mathbf{y}$ ed è facile far vedere che \mathcal{M}_\pm soddisfano tali richieste. Per provare la (4.27) basta verificare che $\nexists \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{y} \perp \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$. Supponiamo per assurdo che un simile \mathbf{y} esista: per quanto appena detto, essendo $\mathbf{y} \perp \mathcal{D}_A$, risulta che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ e quindi $A^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*}$ ed $(A^2)^*\mathbf{y} = -\mathbf{y}$. Pertanto

$$(A^* + i\mathbb{1})(A^* - i\mathbb{1})\mathbf{y} = [(A^*)^2 + \mathbb{1}]\mathbf{y} = 0,$$

e cioè $(A^* - i\mathbb{1})\mathbf{y} \in \mathcal{M}_+$. Ma se $\mathbf{z} \in \mathcal{M}_+$, allora $\langle (A^* - i\mathbb{1})\mathbf{y}, -i\mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\Gamma_{A^*}} = 0$ essendo $\mathbf{y} \perp \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$, perciò $(A^* - i\mathbb{1})\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e cioè $\mathbf{y} \in \mathcal{M}_-$, il che è assurdo, essendo $\mathbf{y} \perp \mathcal{M}_-$. \square

⁶⁶Come vedremo nel §6.8, un tipico esempio di operatore unitario in $\mathcal{H} = L_2$ è la trasformata di Fourier-Plancherel.

⁶⁷Si tenga presente che la dimensione di Hilbert di \mathcal{H} corrisponde alla cardinalità di una sua base ortonormale.

Nel dimostrare il teorema “simmetrico vs autoaggiunto” si era visto che se $A \subseteq A^*$, allora

$$\|(A + i\mathbb{1})\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{Ax}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 = \|(A - i\mathbb{1})\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A.$$

Esiste quindi un’isometria $U_A : \mathcal{D}_{U_A} = \mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} \rightarrow \mathcal{R}_{U_A} = \mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}}$ tale che $U_A(\mathbf{Ax} + i\mathbb{1}\mathbf{x}) = (A - i\mathbb{1})\mathbf{x}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Tenendo presente che $(A + i\mathbb{1})^{-1}$ mappa \mathcal{D}_{U_A} su \mathcal{D}_A , l’operatore U_A si riscrive nella forma

$$U_A = (A - i\mathbb{1})(A + i\mathbb{1})^{-1}, \quad (4.28)$$

e prende il nome di **trasformata di Cayley di A** . La (4.28) è una generalizzazione operatoriale della trasformazione di Möebius $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, che definisce una corrispondenza biunivoca tra la retta reale ed il cerchio di raggio unitario centrato nell’origine e privato del punto 1. Naturalmente la (4.28) individua la corrispondenza biunivoca *isometrico* \leftrightarrow *simmetrico*. Si noti inoltre che $\mathcal{D}_A = \mathcal{R}_{\mathbb{1}-U_A}$ ed $(\mathbb{1} - U_A)$ è iniettivo, per cui (A, \mathcal{D}_A) si riscrive in funzione della sua trasformata di Cayley secondo l’espressione

$$A = i(\mathbb{1} + U_A)(\mathbb{1} - U_A)^{-1}. \quad (4.29)$$

La trasformata di Cayley è lo strumento tecnico di base per i criteri che ci accingiamo a presentare. La ragione della sua importanza risiede nelle proprietà spettrali di operatori unitari ed autoaggiunti: lo spettro della prima classe giace sulla circonferenza di raggio unitario, mentre quello della seconda è contenuto nella retta reale. Sembra allora possibile che la (4.28) individui una qualche corrispondenza tra operatori unitari ed autoaggiunti. Ciò che si scopre è contenuto nel seguente⁶⁸

TEOREMA (TRASF. DI CAYLEY UNITARIA) - $A \subseteq A^*$, $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$. Allora $A = A^* \Leftrightarrow U_A$ è unitario in \mathcal{H} .

Dimostrazione. $A = A^* \Leftrightarrow \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{U_A} = \mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} = \mathcal{H} = \mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}} = \mathcal{R}_{U_A} \Leftrightarrow U_A$ è unitario. \square

Oltre ad essere un’isometria, la trasformata di Cayley *preserva l’ordine*: infatti, se $U_A, U_{A'}$ sono le trasformate di Cayley di due operatori simmetrici A, A' , è chiaro che $A \subseteq A' \Leftrightarrow U_A \subseteq U_{A'}$. Pertanto, alla luce della (4.29), *studiare le estensioni simmetriche di operatori simmetrici equivale a studiare le estensioni isometriche dei corrispondenti operatori di Cayley*; ciò è vantaggioso, dal momento che gli operatori isometrici sono limitati. Il prossimo teorema (dimostrato da von Neumann) stabilisce un criterio di esistenza per le estensioni isometriche di U_A fornendo, inoltre, una procedura esplicita per la loro costruzione. Senza perdere in generalità, supporremo per semplicità $A = \overline{A}$.

TEOREMA (ESTENSIONI ISOMETRICHE DI U_A) - Sia $A = \overline{A} \subseteq A^*$, $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$ ed U_A come in (4.28). Allora:

(i) $U_{A'} \supseteq U_A$ isometrico \Leftrightarrow esistono $F_{\pm} \subseteq \mathcal{M}_{\pm}$ ed un’isometria suriettiva $\tilde{U}_A : F_+ \rightarrow F_-$ tale che

$$U_{A'} : \mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} \oplus F_+ \rightarrow \mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}} \oplus F_- \quad \text{ed} \quad U_{A'}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = U_A\mathbf{x} + \tilde{U}_A\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{U_A}, \mathbf{y} \in F_+,$$

equivalentemente, tale che per $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ ed $\mathbf{y} \in F_+$ risultano essere

$$\mathcal{D}_{A'} = \mathcal{D}_A \oplus \{\mathbf{y} + \tilde{U}_A\mathbf{y}, \mathbf{y} \in F_+\} \quad \text{ed} \quad A'(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \tilde{U}_A\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + i\mathbf{y} - i\tilde{U}_A\mathbf{y} = A^*(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \tilde{U}_A\mathbf{y}).$$

(ii) $U_{A'}$ di parte (i) è unitario (ovvero $A' = A'^*$) $\Leftrightarrow F_{\pm} = \mathcal{M}_{\pm}$ rispettivamente.

Dimostrazione. (i') Se $U_{A'}$ è della forma data, allora è un’isometria da $\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} \oplus F_+$ su $\mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}} \oplus F_-$; inoltre $\mathcal{R}_{\mathbb{1}-U_{A'}} \supseteq \mathcal{R}_{\mathbb{1}-U_A} = \mathcal{D}_A$ e $\overline{\mathcal{D}}_{A'} = \mathcal{H}$, quindi $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{1}-U_{A'}} = \mathcal{H}$ ed è (per definizione) la trasformata di Cayley di $A' \supseteq A$. Viceversa, se $U_{A'} \supseteq U_A$ è la trasformata di Cayley di $A' \supseteq A$, allora $F_- = \mathcal{R}_{A'+i\mathbb{1}} \ominus \mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}}$, $F_+ = \mathcal{R}_{A'-i\mathbb{1}} \ominus \mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}}$ ed $\tilde{U}_A = U_{A'}|_{F_+}$. (ii'') Segue da (i'), osservando che A' si scrive come sopra: infatti $\mathcal{D}_{A'} = \mathcal{R}_{\mathbb{1}-U_{A'}} = (\mathbb{1} - U_{A'})\mathcal{D}_{U_{A'}} = (\mathbb{1} - U_{A'}) (\mathcal{D}_{U_A} \oplus F_+) = (\mathbb{1} - U_A)\mathcal{D}_{U_A} \oplus (\mathbb{1} - \tilde{U}_A)F_+ = \mathcal{D}_A \oplus \{\mathbf{y} - \tilde{U}_A\mathbf{y}, \mathbf{y} \in F_+\}$. D'altronde $\{\mathbf{y} - \tilde{U}_A\mathbf{y}, \mathbf{y} \in F_+\} \subseteq F_+ \oplus F_- \subset \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$ ed essendo $A' \subset A^*$ è $A'(\mathbf{x} + \mathbf{y} - \tilde{U}_A\mathbf{y}) = A^*(\mathbf{x} + \mathbf{y} - \tilde{U}_A\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + i\mathbf{y} + i\tilde{U}_A\mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \mathbf{y} \in F_+$. Si ponga $\tilde{U}'_A = -\tilde{U}_A$. (ii) $U_{A'}$ è unitario $\Leftrightarrow \mathcal{D}_{U_{A'}} = \mathcal{H} = \mathcal{R}_{U_{A'}} \Leftrightarrow \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}} \oplus F_{\mp} = \mathcal{H} \Leftrightarrow F_{\mp} = (\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}})^{\perp} = \mathcal{N}_{A^* \mp i\mathbb{1}} = \mathcal{M}_{\mp}$. \square

⁶⁸Per approfondimenti: *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 2, pgg. 135 e seguenti.*

Dal teorema discendono due osservazioni: l'esistenza dei sottospazi $F_{\pm} \subseteq \mathcal{M}_{\pm}$ è condizione necessaria per l'esistenza di estensioni isometriche di U_A , dunque se almeno uno tra $\mathcal{M}_{\pm} = \{\mathbf{0}\}$ (ovvero se $n_+n_- = 0$) non esistono estensioni simmetriche di A . Inoltre, essendo $\tilde{U}_A : F_+ \rightarrow F_-$ un'isometria suriettiva, si ha che $\dim(F_+) = \dim(F_-)$ e quindi, se un'estensione simmetrica di A esiste, essa è autoaggiunta se e solo se $n_+ = n_-$. Quanto appena osservato rappresenta grossomodo il contenuto del seguente corollario (dovuto anch'esso a von Neumann), che per ragioni storiche riportiamo come teorema.

TEOREMA (VON NEUMANN – INDICI DI DIFETTO) - Sia $A \subseteq A^*$ e $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$. Allora:

- (a) A è massimalmente simmetrico⁶⁹ (cioè inestendibile) $\Leftrightarrow A = \overline{A}$ ed $n_+n_- = 0$;
- (b) A ammette $n \equiv n_{\pm}$ estensioni autoaggiunte $\Leftrightarrow n_+ = n_-$.

Sulla numerosità delle estensioni di A , occorre osservare che il numero di estensioni isometriche di U_A corrisponde proprio a $\dim(F_+)$; pertanto, tenendo presente la corrispondenza biunivoca *isometrico* \leftrightarrow *simmetrico* posta dalla trasformata di Cayley, ne deduciamo che esistono tante estensioni simmetriche di A quant'è $\dim(F_+)$. Allora, se $n_+ = n_-$ esisteranno $n \equiv n_{\pm}$ estensioni autoaggiunte di A .

Il prossimo teorema individua un semplice ed utile criterio per stabilire quando gli indici di difetto di un operatore simmetrico sono uguali. Preliminarmente, occorre dare la seguente

DEFINIZIONE (OPERATORE ANTIUNITARIO E DI CONIUGAZIONE) - (K, \mathcal{D}_K) antilineare è **antiunitario** se è antiisometrico⁷⁰ e suriettivo. Diremo che: K è una **coniugazione** se è antiunitario e $K^2 = \mathbb{1}$; (A, \mathcal{D}_A) è **B -reale** se esiste un operatore B tale che $B\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_A$ e $[B, A]\mathbf{x} = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$.

(CRITERIO DI VON NEUMANN) - $A \subseteq A^*$, $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$ e K -reale, K una coniugazione. Allora $n_+ = n_-$.

Dimostrazione. (A, \mathcal{D}_A) è K -reale e K è involutivo, quindi $\mathcal{D}_A \subseteq K\mathcal{D}_A \subseteq K^2\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_A$, ovvero $K\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_A$; d'altronde $[K, A]\mathbf{x} = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, per cui preso $\mathbf{y}_+ \in \mathcal{M}_+ = (\mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}})^{\perp}$ si ha che

$$0 = \langle (A - i\mathbb{1})\mathbf{x}, \mathbf{y}_+ \rangle = \langle K\mathbf{y}_+, K(A - i\mathbb{1})\mathbf{x} \rangle = \langle K\mathbf{y}_+, (A + i\mathbb{1})K\mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A.$$

Ma $K\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, quindi $K\mathbf{y}_+ \in (\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}})^{\perp} = \mathcal{M}_-$, ovvero $K : \mathcal{M}_+ \rightarrow \mathcal{M}_-$. In modo analogo si dimostra che $K : \mathcal{M}_- \rightarrow \mathcal{M}_+$. Ma K conserva l'ortonormalità e quindi mappa biettivamente basi hilbertiane di \mathcal{M}_+ in basi hilbertiane di \mathcal{M}_- e viceversa. Perciò, le cardinalità delle basi si conservano: $n_+ = n_-$. \square

Prima di passare agli esempi, riportiamo per completezza un secondo importante criterio di autoaggiuntezza (dovuto, questa volta ad E. Nelson). Introduciamo il seguente concetto: sia (A, \mathcal{D}_A) un operatore di \mathcal{H} ed $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ tale che $A^n\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \forall n \in \mathbb{N}$ ($A^0 := \mathbb{1}$), allora \mathbf{x} è detto *vettore C^∞ per A* . Indichiamo, inoltre, il sottospazio vettoriale di \mathcal{H} dei vettori C^∞ per A con $C^\infty(A)$.

DEFINIZIONE (VETTORE ANALITICO E DI UNICITÀ) - $\mathbf{x}_0 \in C^\infty(A)$ è un **vettore analitico** per A se

$$\exists t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tale che} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|A^n \mathbf{x}_0\|}{n!} t^n < +\infty.$$

Diremo invece che $\mathbf{x}_0 \in C^\infty(A)$ è un **vettore di unicità** per $A \subseteq A^*$ se $A_{\mathbf{x}_0} := A|_{\mathcal{D}_{\mathbf{x}_0}}$ è un operatore essenzialmente autoaggiunto in $\mathcal{H}_{\mathbf{x}_0} := \overline{\mathcal{D}_{\mathbf{x}_0}}$, dove $\mathcal{D}_{\mathbf{x}_0}$ è il sottospazio di \mathcal{H} generato da $\{A^n \mathbf{x}_0\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Si noti che se $\mathbf{x}_0 \in C^\infty(A)$ è un vettore analitico per A , allora la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|A^n \mathbf{x}_0\|}{n!} z^n$ converge uniformemente ed assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| < t$; inoltre, convergeranno con egual raggio anche le serie delle derivate di ogni ordine. Questo fatto è di grande importanza, in quanto consente di affermare che se $\mathbf{x}_0 \in C^\infty(A)$ è un vettore analitico per A , allora tutti i vettori di $\mathcal{D}_{\mathbf{x}_0}$ sono analitici per A .

⁶⁹Se A massimalmente simmetrico, allora non ammette estensioni simmetriche proprie; d'altronde, ogni simmetrico è chiudibile e la chiusura di un simmetrico è simmetrico, quindi un operatore massimalmente simmetrico è chiuso.

⁷⁰ (K, \mathcal{D}_K) è antiisometrico se $\langle K\mathbf{x}, K\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_K$; naturalmente, anche un'antiisometria conserva la norma.

LEMMA (NUSSBAUM) - Sia $A \subseteq A^*$ e $\overline{D}_A = \mathcal{H}$. Se \mathcal{D}_A contiene un insieme di vettori di unicità che genera un sottospazio denso di \mathcal{H} , allora A è essenzialmente autoaggiunto.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}_0 \in C^\infty(A)$ di unicità per A . Perché $\overline{A} = (\overline{A})^*$ dev'essere $\overline{\mathcal{R}}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}$; d'altra parte ciò accade se esiste in \mathcal{H} un insieme di elementi che generano $\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}$ e tali che quest'ultimo sia denso. Basta dimostrare che $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}}$: infatti $\overline{\mathcal{R}}_{A \pm i\mathbb{1}} \supset \overline{\mathcal{R}}_{A_{\mathbf{x}_0} \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{H}$, essendo $A_{\mathbf{x}_0}$ ess. autoaggiunto. \square

Il precedente lemma consente di dimostrare parte del criterio di Nelson: una dimostrazione completa richiede la conoscenza di alcune proprietà spettrali degli operatori simmetrici, che vedremo nel prossimo capitolo. Al momento, quindi, la dimostrazione dovrà essere letta come tale.

(CRITERIO DI NELSON) - $A \subseteq A^*$, $\overline{D}_A = \mathcal{H}$. Se \mathcal{D}_A contiene un insieme di vettori analitici per A che genera un sottospazio denso di \mathcal{H} , allora A è essenzialmente autoaggiunto.

Dimostrazione. Si veda *J. Weidmann, LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACES, cap. 8, pg. 261.* \square

Esempi

o OPERATORE DI SHIFT DESTRO E DECOMPOSIZIONE DI WOLD-VON NEUMANN

Nel §4.1 abbiamo introdotto l'operatore $S_n : \ell_2 \rightarrow \ell_2$: esso è lineare, limitato ed ha norma unitaria. Sia ora $S \equiv S_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, \mathcal{H} un generico spazio di Hilbert separabile, ed $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale di \mathcal{H} ; evidentemente $S\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Determiniamo \mathcal{R}_S , \mathcal{N}_S ed S^* . Sia $\mathcal{H} \ni \mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{e}_n$, allora $S\mathbf{x} = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, per cui $\mathcal{N}_S = \{\mathbf{0}\}$ (S è iniettivo). Sia ora $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_S$, allora $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ (per un certo $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$) e ciò è soddisfatto da tutti gli $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ tali che $\mathbf{y} = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ e cioè $\mathcal{R}_S = \{\mathbf{e}_1\}^\perp$ (S non è suriettivo). D'altra parte $\|S\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m \langle S\mathbf{e}_n, S\mathbf{e}_m \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_n |a_n|^2 = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, quindi S è isometrico ma non unitario. Per l'aggiunto di S occorre risolvere l'identità $\langle S\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, S^*\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$: sfruttando l'ortonormalità degli elementi di base, si trova che

$$\sum_{n,m} \overline{a_n} b_m \delta_{n+1,m} = \sum_{n,m} \overline{a_n} b_m \langle \mathbf{e}_n, S^* \mathbf{e}_m \rangle_{\mathcal{H}} \iff \langle \mathbf{e}_n, S^* \mathbf{e}_m \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n+1,m},$$

ovvero $\langle \mathbf{e}_n, S^* \mathbf{e}_{n+1} \rangle_{\mathcal{H}} = 1 \iff S^* \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n-1}$ per $n = 1, 2, \dots$ ($\mathbf{e}_0 := \mathbf{0}$). Pertanto, l'aggiunto dell'operatore di shift destro è l'operatore di shift sinistro e viceversa ($S = S^{**}$, essendo S limitato). L'operatore S è la trasformata di Cayley di un operatore simmetrico: infatti è isometrico ed $\mathcal{R}_{\mathbb{1}-S}$ è denso in \mathcal{H} . Per verificare la proprietà di densità, si noti che $S^*\mathbf{y} = \mathbf{y} \iff \mathbf{y} = \mathbf{0}$ in quanto se $\mathbf{y} \in \mathcal{N}_{\mathbb{1}-S^*}$, allora $\mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ ed $\mathbf{y} \in \mathcal{H} \iff \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{H}} < \infty$; pertanto $(\mathcal{R}_{\mathbb{1}-S})^\perp = \mathcal{N}_{\mathbb{1}-S^*} = \{\mathbf{0}\}$. Tuttavia, S non ammette estensioni isometriche: infatti, indicando con A l'operatore simmetrico associato ad S , si ha che $\mathcal{R}_{A+i\mathbb{1}} = \mathcal{D}_S = \mathcal{H}$ ed $\mathcal{R}_{A-i\mathbb{1}} = \mathcal{R}_S = \{\mathbf{e}_1\}^\perp$, quindi $\mathcal{M}_- = \{\mathbf{0}\}$ (e cioè $n_- = 0$) ed $\mathcal{M}_+ = \{\mathbf{e}_1\}$ (e cioè $n_+ = 1$), per cui $n_+ \neq n_-$. A discapito della sua semplicità, l'operatore di shift ha un ruolo rilevante, come rivela il seguente⁷¹

TEOREMA (DECOMPOSIZIONE DI WOLD-VON NEUMANN) - Sia (S, \mathcal{H}) l'operatore di shift ed (U, \mathcal{H}) un operatore unitario. Qualsiasi isometria $\mathcal{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ può essere decomposta nella forma

$$\mathcal{I} = U \oplus (S \oplus S \oplus S \oplus \dots). \quad (4.30)$$

Inoltre \mathcal{H} si decompone nella somma diretta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus (\mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S \oplus \dots)$, dove $\mathcal{I}|_{\mathcal{H}_U}$ è un operatore unitario di $B(\mathcal{H}_U, \mathcal{H}_U)$, gli \mathcal{H}_S sono isomorfi ad $\ell_2(\mathbb{N})$ e le restrizioni $\mathcal{I}|_{\mathcal{H}_S}$ sono operatori di shift.

o ESTENSIONI AUTOAGGIUNTE DI \mathbf{p} IN $L_2([a, b])$, $L_2(\mathbb{R})$ ED $L_2(\mathbb{R}_0^+)$

(i) Si è visto che $(\mathbf{p}, \mathcal{D}_{\mathbf{p}}^0)$ è simmetrico, non autoaggiunto ed ammette la famiglia di estensioni autoaggiunte $(\mathbf{p}, \mathcal{D}_{\mathbf{p}}^\theta)$, dove $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}^\theta = \{\psi \in \mathbb{H}^1([a, b]) : \psi(b) = e^{i\theta} \psi(a), \theta \in [0, 2\pi)\}$. Vogliamo ora

⁷¹Per la dimostrazione, si veda *P. Caresa, METODI MATEMATICI PER LA MECCANICA QUANTISTICA, pgg. 493.*

ritrovare gli stessi risultati con gli strumenti esposti in questa sezione. Tutte le informazioni sulle estensioni di $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$ sono contenute in n_{\pm} . Evidentemente $\mathcal{M}_{\pm} = \{\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*} : \mathfrak{p}^* \psi = \pm \iota \mathbb{1} \psi\}$; d'altra parte $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}$ contiene almeno $\mathbb{H}^1([a, b])$ e $\mathfrak{p}^* \psi \equiv \psi^* = -\iota \psi'$, per cui

$$\mathcal{M}_{\pm} = \{\psi \in \mathbb{H}^1([a, b]) : \psi(x) = ce^{\pm x}, c \in \mathbb{C}\}.$$

Allora $n_{\pm} = 1$ e $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$ non è ess. autoaggiunto, ma ammette un'estensione autoaggiunta. Per costruire tale estensione ricorriamo al teorema "estensioni isometriche di U_A " (si noti che qui $F_{\pm} = \mathcal{M}_{\pm}$). Siano $\psi_{\pm} \in \mathcal{M}_{\pm}$ di norma unitaria in $L_2([0, 1])$ (per semplicità $[a, b] = [0, 1]$):

$$\psi_+(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} e^x, \quad \psi_-(x) = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2 - 1}} e^{-x}, \quad x \in [0, 1].$$

Naturalmente, le uniche isometrie $\tilde{U}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{M}_+ \rightarrow \mathcal{M}_-$ sono le mappe $\psi_+ \mapsto \gamma \psi_-$ con $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. Dunque le estensioni autoaggiunte di $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$ sono $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\gamma})$, dove $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\gamma} = \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0 \oplus \{\psi_+ + \gamma \psi_-\}$, ovvero

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\gamma} = \{\phi \in L_2([0, 1]) : \phi(x) = \psi(x) + \beta \psi_+(x) + \beta \gamma \psi_-(x), \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0, \psi_{\pm} \in \mathcal{M}_{\pm}, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}.$$

Il dominio individuato corrisponde esattamente a $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\theta}$: infatti, se $\phi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\gamma}$, allora

$$\phi(0) = \frac{\sqrt{2}\beta(1 + \gamma e)}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad \phi(1) = \frac{\sqrt{2}\beta(\gamma + e)}{\sqrt{e^2 - 1}} \implies \phi(1) = \frac{\gamma + e}{1 + \gamma e} \phi(0) \equiv \alpha \phi(0), \quad |\alpha| = 1.$$

Viceversa, se $\phi(1) = \alpha \phi(0)$, allora $\phi(x) = \psi(x) + \beta \psi_+(x) + \beta \gamma \psi_-(x)$ dove $\beta \in \mathbb{C}$ e $\gamma = \frac{\alpha - e}{1 - \alpha e}$. Abbiamo quindi ritrovato le condizioni al contorno di $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\theta}$, per cui $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\gamma}) = (\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\theta})$.

(ii) Passiamo a $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$: in precedenza abbiamo dimostrato che $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$ ricorrendo all'anti-autoaggiuntezza di $(\mathbb{D}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$. Un'alternativa è adoperare il teorema "simmetrico vs autoaggiunto": infatti, $\mathcal{M}_{\pm} = \{\mathbf{0}\}$, in quanto $\psi(x) = ce^{\pm x} \notin L_2(\mathbb{R})$; se $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ fosse chiuso in $L_2(\mathbb{R})$, avremmo concluso. Dimostriamo che $(\mathbb{D}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ è chiuso in $L_2(\mathbb{R})$: sia $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ tale che, per $n \rightarrow \infty$, $\psi_n \rightarrow \psi \in L_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{D} \psi_n \rightarrow \xi \in L_2(\mathbb{R})$; allora

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{D} \psi_n)(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Essendo entrambi prodotti scalari in \mathbb{R} , al passaggio al limite si trova che $\forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \implies \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \xi = \mathbb{D} \psi.$$

(iii) Concludiamo col caso \mathfrak{p} su $L_2(\mathbb{R}_0^+)$: consideriamo come dominio di definizione lo spazio

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+ \equiv \{\psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}_0^+) : \psi(0) = 0\} = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}_0^+) : \psi(x) = \int_0^x \xi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_0^+, \xi \in L_2(\mathbb{R}_0^+)\};$$

$\overline{\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+} = L_2(\mathbb{R}_0^+)$. Sicché $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+)$ è *simmetrico ma non autoaggiunto*. La simmetria è banale; per l'autoaggiuntezza si procede come per $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$: se $\psi \in L_2(\mathbb{R}_0^+) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^+$, allora $\exists \psi^* \in L_2(\mathbb{R}_0^+)$ t.c.

$$-\iota \int_{\mathbb{R}_0^+} \overline{\psi}(x) \phi'(x) dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} \overline{\psi^*}(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+.$$

Tenendo presente che $\phi'(x) = \xi(x)$, indicando con $\Psi(x) \equiv \int_0^x \overline{\psi^*}(y) dy$ la primitiva di $\overline{\psi^*}$ ed integrando per parti il secondo membro dell'espressione precedente, si trova che

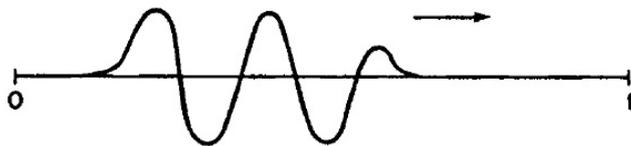
$$\int_{\mathbb{R}_0^+} [\Psi(x) - \overline{\psi}(x)] \xi(x) dx = \langle \overline{\Psi} + \iota \psi, \xi \rangle_{L_2(\mathbb{R}_0^+)} = 0.$$

L'insieme delle $\xi \in L_2(\mathbb{R}_0^+)$ soddisfacenti tale relazione non è denso, quindi esisterà almeno la funzione costante $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tale che $\bar{\Psi} + \nu\psi = \alpha$. Essendo arbitraria, sia $\alpha = \nu\psi(0)$, sicché

$$\psi(x) = \psi(0) + \nu \int_{\mathbb{R}_0^+} \psi^*(y) \, dy, \quad \psi^* \in L_2(\mathbb{R}_0^+), \quad x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Dunque $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}^*}^+ \supset \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+$ e contiene almeno $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}_0^+)$. $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+)$ non ammette estensioni autoaggiunte. Difatti, gli spazi \mathcal{M}_{\pm} sono costituiti rispettivamente dalle $\psi_{\pm} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}_0^+)$ tali che $\psi'_{\pm}(x) = \pm\psi_{\pm}(x)$, ovvero $\psi_{\pm}(x) = ce^{\pm x}$, $c \in \mathbb{C}$; è evidente che $\psi_- \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}_0^+)$, mentre $\psi_+ \notin L_2(\mathbb{R}_0^+)$, per cui $\mathcal{M}_- \neq \{0\}$ ed $\mathcal{M}_+ = \{0\}$. Di conseguenza $n_+n_- = 0$, ovvero $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^+)$ è mass. simmetrico.

OSSERVAZIONE – Esaminiamo brevemente il problema dell'autoaggiuntezza di \mathfrak{p} su $L_2([0, 1])$ da un punto di vista fisico. Sia $\psi(x)$ un pacchetto d'onde sufficientemente liscio a valori in $[0, 1]$ e nullo sui bordi dell'intervallo; supponiamo che $\psi(x)$ venga traslato verso destra di una quantità y piccola al punto che $\psi(x)$ non raggiunga gli estremi dell'intervallo (vedi Figura di seguito).



La traslazione compiuta sarà allora dovuta all'azione dalla famiglia di operatori $U(y) : \phi(x) \mapsto \phi(x - y)$; in Meccanica Quantistica, simili operatori sono rappresentati da un gruppo unitario ad un parametro il cui generatore è l'operatore impulso. Il caso del pacchetto d'onda è paradigmatico in quanto

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{U(y)\psi(x) - \psi(x)}{\nu y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\psi(x - y) - \psi(x)}{\nu y} = \nu\psi'(x).$$

Quindi il generatore delle traslazioni agisce come l'operatore impulso sullo spazio delle funzioni di supporto sufficientemente distante dagli estremi dell'intervallo; possiamo assumere tale spazio come $C_0^1((0, 1))$. Su tale dominio, la chiusura di \mathfrak{p} corrisponde proprio a $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$; inoltre è simmetrico ma non autoaggiunto: infatti, non abbiamo specificato quale sia l'azione di U nel momento in cui ψ raggiunge gli estremi dell'intervallo. Naturalmente, se vogliamo che le traslazioni siano rappresentate da gruppi unitari (quindi continui), dobbiamo richiedere condizioni al contorno periodiche sulle ψ , di modo che

$$\int_0^1 |\psi(x - y)|^2 \, dx = \int_0^1 |\psi(x)|^2 \, dx.$$

Tuttavia, c'è ancora un grado di libertà, dato dalla scelta della fase che il pacchetto d'onda acquisisce ritornando sul primo estremo: per via del principio di sovrapposizione, tale fase dovrà essere la stessa per ciascuna funzione d'onda. Quindi, ciascuna traslazione sarà assegnata specificando il valore di $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ e richiedendo che $\psi_y \equiv \psi(\cdot + y)$ soddisfi la condizione $\psi_y(1) = \alpha\psi_y(0)$, per ogni tempo y . Per cui la dinamica è descritta $e^{\nu\mathfrak{p}y}$, dove \mathfrak{p} è proprio $(\mathfrak{p}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^0)$. Ciò mostra come, anche per sistemi fisici molto semplici, diverse estensioni autoaggiunte corrispondono a diverse situazioni fisiche.

4.6 Cenni sulla teoria delle perturbazioni di operatori simmetrici

Il seguente paragrafo non ha alcuna pretesa di completezza e vuole solo avere l'intento di erudire il lettore sulla conoscenza di alcune tecniche di indiscutibile utilità in Fisica che garantiscono l'autoaggiuntezza o l'essenziale autoaggiuntezza di particolari operatori simmetrici "perturbati"⁷². I principali risultati che

⁷²Per approfondimenti, si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 2, pgg. 146–162.*

discuteremo sono il criterio del *cerchio limite-punto limite di Weyl* ed il *teorema di Kato-Rellich*.

Per il primo argomento occorre introdurre alcuni concetti preliminari. Sia $H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$ l'hamiltoniana di una particella classica in moto sulla semiretta $(0, \infty)$ e soggetta ad un potenziale $V \in C^1((0, \infty))$ uniformemente lipshitziano in ogni su ciascun sottoinsieme compatto di $(0, \infty)$; come sappiamo le equazioni del moto sono $\dot{q}(t) = \frac{1}{m}p(t)$, $\dot{p}(t) = -V'(x(t))$.

DEFINIZIONE (POTENZIALE CLASSICO COMPLETO) - *Il moto classico generato da V (più semplicemente, V) si dice **completo** in 0 (risp. ∞) se non esiste alcuna coppia di condizioni iniziali $(q_0, p_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ tali che la soluzione $q(t)$ converge a 0 (risp. ∞) in un intervallo di tempo finito.*

Il seguente criterio consente di stabilire quanto $V(q)$ genera un moto classico completo.

TEOREMA (POTENZIALE CLASSICO COMPLETO) - $V \in C^1(0, \infty)$, *unif. lipsh. su ogni compatto. Allora*

- $V(q)$ è non completo in 0 $\Leftrightarrow V(q)$ è superiormente limitata in un intorno di 0;
- $V(q)$ è non completo in $\infty \Leftrightarrow V(q)$ è superiormente limitata $\forall q \geq 1$ e se

$$\int_1^\infty \frac{dq}{\sqrt{K - V(q)}} < \infty \quad \text{per un certo} \quad K > \sup_{q \geq 1} V(q).$$

Sia ora $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q})$ (omettiamo per semplicità $(2m)^{-1}$) l'hamiltoniano di una particella quantistica in moto su $(0, \infty)$ e soggetta ad un potenziale *reale* $V \in C^0((0, \infty))$; sia inoltre $\mathcal{D}_H = C_0^\infty((0, \infty))$. Essendo V reale, (H, \mathcal{D}_H) è simmetrico: infatti, $\forall \psi, \phi \in C_0^\infty((0, \infty))$ si ha che

$$\langle \phi, H\psi \rangle_{L_2} = \int_0^\infty \bar{\phi}(x) [-\psi''(x) + V(x)\psi(x)] dx = \int_0^\infty [V(x)\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}''(x)]\psi(x) dx = \langle H\phi, \psi \rangle_{L_2}.$$

Sia ora $\psi \in \mathcal{D}_{H^*}$, quindi $\langle \mathbf{p}^2 \phi, \psi \rangle_{L_2} = \langle \phi, (H^* - V)\psi \rangle_{L_2}$ (V è reale, quindi simmetrico): allora $\psi'' \in L_{2,loc}((0, \infty))$, cioè ψ' è assolutamente continua e $-\psi'' - V\psi \in L_2((0, \infty))$. Inoltre, l'operatore antilineare $C(\cdot) : \psi \in L_2((0, \infty)) \mapsto (C\psi)(x) = \bar{\psi}(x) \in L_2((0, \infty))$ è anti-isometrico, suriettivo ed è tale per cui $(CH)\psi = (HC)\psi \forall \psi \in C_0^\infty((0, \infty))$: pertanto $n_+ = n_-$ (gli indici di difetto di H sono eguali, criterio di von Neumann). In definitiva, abbiamo succintamente provato quanto segue

TEOREMA (PROPRIETÀ DI $H = \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q})$) - *Sia H come prima e $\mathcal{D}_H = C_0^\infty((0, \infty))$. Allora: $H \subseteq H^*$, $n_+ = n_-$; inoltre, se $\psi \in \mathcal{D}_{H^*}$, allora $\psi'' \in L_{2,loc}((0, \infty))$, $-\psi'' + V\psi \in L_2((0, \infty))$ ed $H^*\psi = -\psi'' + V\psi$.*

Il teorema evidenzia l'esistenza di un legame tra *proprietà degli indici di difetto* di un operatore e *proprietà di equazioni alle derivate ordinarie*. Vogliamo indagare meglio questa connessione ed, in particolare, stabilire le proprietà degli indici di difetto di H a partire dalle soluzioni di

$$-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.31)$$

TEOREMA (SOLUZIONI DI $\psi'' = V\psi - \lambda\psi$) - *Sia $V \in C^0((0, \infty))$ a valori reali. Allora:*

- (a) se $\Im(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \exists$ almeno una soluzione della (4.31) in L_2 vicino a 0 ed una in L_2 vicino ad ∞ ;
- (b) se esiste almeno un $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che le due soluzioni della (4.31) sono entrambe in L_2 vicino a 0 (risp. ∞), allora $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ le due soluzioni sono in L_2 vicino a 0 (risp. ∞).

Si noti che $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è in L_2 vicino ad ∞ se $_{[c,x]} \|u\|_{L_2}^2 \equiv \int_c^x |u(y)|^2 dy < \infty \forall x \geq c$ ($c \in \mathbb{R}$), viceversa è in L_2 vicino a 0 se $_{[x,c]} \|u\|_{L_2}^2 < \infty \forall x \in [0, c]$. Introduciamo un'importante definizione.

DEFINIZIONE (CASI CERCHIO LIMITE E PUNTO LIMITE) - $V \in C^0((0, \infty))$ reale. *Diremo che V è nel **caso cerchio limite** ad ∞ (risp. a 0) se per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$, ogni soluzione della (4.31) è in L_2 vicino ad ∞ (risp. a 0). Se V non è nel caso cerchio limite ad ∞ (risp. a 0), allora è nel **caso punto limite**.*

Se V è nel caso punto limite sia a 0 che ad ∞ , si hanno notevoli effetti sugli indici di difetto.

(CRITERIO DI WEYL DEL PUNTO LIMITE-CERCHIO LIMITE) - $V \in C^0((0, \infty))$ reale, $(H, C_0^\infty((0, \infty)))$. Allora H è essenzialmente autoaggiunto se e solo se V è nel caso punto limite a 0 ed ∞ .

Dimostrazione. Per cominciare si noti che $n_\pm = \dim\{\psi \in \mathcal{D}_{H^*} : H^*\psi = \lambda\psi, \Im(\lambda) \leq 0\}$ rispettivamente. Quindi, se V è nel caso cerchio limite a 0 ed ∞ , allora gli indici di difetto di H sono $n_+ = 2 = n_-$; se invece V è nel caso cerchio limite ad un estremo e nel caso punto limite all'altro, allora $n_+ = 1 = n_-$. Pertanto $\overline{H} \neq (\overline{H})^*$ se V non è nel caso punto limite ad entrambi gli estremi. Supponiamo ora che V sia nel caso punto limite ad entrambi gli estremi: dunque, per $f, g \in \mathcal{D}_{H^*}$ poniamo $\mathfrak{W}_x(f, g) = \overline{f}(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ (un analogo del Wronskiano di f, g). \mathfrak{W}_x è continuo ed integrando per parti

$$\mathfrak{W}_b(f, g) - \mathfrak{W}_a(f, g) = \int_a^b \overline{[(H^*f)(x)g(x) - f(x)(H^*g)(x)]} dx.$$

Poiché l'integrando nel membro a sinistra è in $L_1((0, \infty))$, i limiti $\mathfrak{W}_\infty(f, g) = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathfrak{W}_b(f, g)$ ed $\mathfrak{W}_0(f, g) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathfrak{W}_a(f, g)$ esistono ed inoltre

$$\mathfrak{W}_\infty(f, g) - \mathfrak{W}_0(f, g) = \langle H^*f, g \rangle_{L_2} - \langle f, H^*g \rangle_{L_2}.$$

Se riusciamo a dimostrare che il membro di sinistra della precedente è zero, avremo provato che $H^* \subseteq H^*$, ovvero che H^* è simmetrico e quindi che H è ess. autoaggiunto. Sia quindi $c \in (0, \infty)$, $B = H|_{C_0^\infty((0, c))}$ (si noti che $C_0^\infty((0, c)) \subset L_2((0, c))$) ed A l'operatore H definito su

$$\mathcal{D}_{H'} = \{\psi \in C^\infty((0, c)) : \psi = 0 \text{ vicino a } 0, \psi(c) = 0\}.$$

Essendo $B \subset A$, è $\overline{B} \subset \overline{A}$; d'altra parte in $\mathcal{D}_{\overline{A}}$ esistono funzioni tali che $\psi'(c) \neq 0$ e simili funzioni non appartengono a $\mathcal{D}_{\overline{B}}$, quindi \overline{A} è un'estensione propria, chiusa e simmetrica di \overline{B} . Inoltre, entrambe le soluzioni di $\psi'' = V\psi \mp v\psi$ sono in L_2 vicino c , ma solo una di esse è in L_2 vicino 0: allora, gli indici di difetto di B sono $n'_+ = 1 = n'_-$ e quindi gli indici di difetto di \overline{A} sono $n''_+ = 0 = n''_-$, ovvero \overline{A} è ess. autoaggiunto. A questo punto, sia $f \in \mathcal{D}_{H^*}$ e siano $f_1, g_1 \in C_0^\infty((0, \infty))$ tali che $f(c) + f_1(c) = 0$, $g(c) + g_1(c) = 0$; posto $f_2 = f + f_1$ e $g_2 = g + g_1$, si ha che $f_2, g_2 \in \mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_{\overline{A}}$ e quindi

$$-\mathfrak{W}_0(f, g) = \mathfrak{W}_c(f_2, g_2) - \mathfrak{W}_0(f_2, g_2) = \langle \overline{A}f_2, g_2 \rangle_{L_2} - \langle f_2, \overline{A}g_2 \rangle_{L_2} = 0.$$

Dunque $\mathfrak{W}_0(f, g) = 0$ ed una simile prova mostra che $\mathfrak{W}_\infty(f, g) = 0$. □

Resta allora da stabilire sotto quali ipotesi un potenziale a valori reali $V \in C^0((0, \infty))$ è nel caso limite ad entrambi gli estremi. A tal proposito occorre dare la seguente

DEFINIZIONE (POTENZIALE QUANTISTICAMENTE COMPLETO) - $V \in C^0((0, \infty))$ reale è **quantisticamente completo** se $(H, C_0^\infty((0, \infty)))$ è essenzialmente autoaggiunto. Inoltre, V è detto **completo** a 0 (risp. ad ∞) se almeno una delle soluzioni di $\psi'' = V\psi$ non è in L_2 vicino ad ∞ (risp. a 0).

Naturalmente, come per il moto classico, esistono anche qui degli utili criteri di completezza.

TEOREMA (POT. QUANT. COMPLETO AD ∞) - $V \in C^0((0, \infty))$ reale ed M differenziabile t.c.

$$(i) \quad V(x) \geq -M(x), \quad (ii) \quad \int_1^\infty M^{-1/2}(x) dx = \infty, \quad (iii) \quad \frac{M'(x)}{M^{3/2}(x)} \text{ è limitato vicino } \infty,$$

allora V è quantisticamente completo nel caso punto limite ad ∞ .

Si evince che se V è classicamente completo ad ∞ non necessariamente è quantisticamente completo; esistono infatti esempi di potenziali classicamente completi ma che non lo sono quantisticamente e viceversa⁷³. Per la completezza quantistica a 0, invece, vale il seguente

⁷³Si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 2, pgg. 155-158.*

TEOREMA (POTENZIALE QUANTISTICAMENTE COMPLETO A 0) - $V \in C^0((0, \infty))$, $V(x) > 0$ in un intorno dello zero. Se $V(x) \geq \frac{3}{4}x^{-2}$ in un intorno dello zero, allora H è nel caso punto limite a 0. Inoltre, se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $V(x) \leq (\frac{3}{4} - \varepsilon)x^{-2}$ in un intorno dello zero, allora H è nel caso cerchio limite.

La teoria discussa finora permette di ottenere delle importanti conclusioni in merito alla classe dei **potenziali a simmetria sferica** in \mathbb{R}^n . Ricordiamo che un potenziale V in \mathbb{R}^n è detto a simmetria sferica se dipende esclusivamente da $r \equiv (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$; sia quindi (H, \mathcal{D}_H) , dove

$$H \equiv -\nabla^2 + V(r) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(r) \quad \mathcal{D}_H \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Si può dimostrare che H è essenzialmente autoaggiunto su tale dominio, come afferma il seguente

TEOREMA (POTENZIALE SFERICO ED ESSENZIALE AUTOAGGIUNTEZZA) - Sia (H, \mathcal{D}_H) come prima e $V(r)$ un potenziale a simmetria sferica su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se $V(r)$ soddisfa la condizione

$$V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \geq \frac{3}{4r^2},$$

allora (H, \mathcal{D}_H) è essenzialmente autoaggiunto, mentre non lo è se $V(r)$ è tale per cui

$$0 \leq V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \leq \frac{c}{r^2}, \quad c < \frac{3}{4}.$$

4.6.1 Teoremi di Kato–Rellich, di Wüst e KLMN

Determiniamo ora, in forma più generale rispetto alla precedente trattazione, sotto quali ipotesi l'autoaggiuntezza di un operatore resta conservata a seguito di una *perturbazione "sufficientemente piccola"*.

DEFINIZIONE (OPERATORE RELATIVAMENTE LIMITATO) - (A, \mathcal{D}_A) , (B, \mathcal{D}_B) con $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}_B}$. Se

$$\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A \quad \text{e se} \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{tali che} \quad \|B\mathbf{x}\| \leq \alpha\|\mathbf{x}\| + \beta\|A\mathbf{x}\|, \quad (4.32)$$

allora B è *A-limitato*. Inoltre $\inf\{\beta : \exists \alpha_\beta \in \mathbb{R}_0^+ \text{ con } \|B\mathbf{x}\| \leq \alpha_\beta\|\mathbf{x}\| + \beta\|A\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A\}$ è detto *A-limite* di B e se esso è zero, B è *infinitesimamente piccolo* rispetto ad A e si scrive $B \ll A$.

Si noti che se $B \ll A$, allora B è limitato. Va inoltre osservato che nella (4.32) è possibile equivalentemente richiedere che esistano $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}_0^+$ tali che $\|B\mathbf{x}\|^2 \leq \alpha'^2\|\mathbf{x}\|^2 + \beta'^2\|A\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Un primo risultato generale che andiamo a dimostrare riguarda la perturbazione di operatori chiusi ed aggiunti.

TEOREMA (PERTURBAZIONE DI OPERATORI CHIUSI ED AGGIUNTI) - Sia (A, \mathcal{D}_A) , $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ e (B, \mathcal{D}_B) un operatore *A-limitato* tale che (B^*, \mathcal{D}_{B^*}) è *A*-limitato*. Siano inoltre

$$\Omega \equiv \{z \in \mathbb{C} : A + zB = \overline{A + zB}, \quad A^* + z^*B^* = \overline{A^* + z^*B^*}\}, \quad (4.33)$$

ed Ω_0 la componente connessa di Ω contenente lo zero. Allora $(A + zB)^* = A^* + z^*B^*$, $\forall z \in \Omega_0$.

Dimostrazione. P_z e P'_z i proiettori ortogonali (in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) rispettivamente su Γ_{A+zB} e $\mathcal{J}^{-1}\Gamma_{A^*+z^*B^*}$. Si dimostra che P_z, P'_z dipendono con continuità da z , $\forall z \in \Omega$ [Wei980], per cui $P_0 + P'_0 = \mathbf{1}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \equiv I$. D'altra parte, sappiamo che $\forall z \in \mathbb{C}$ risulta essere $(A + zB)^* \supseteq A^* + z^*B^*$, ovvero

$$\mathcal{J}^{-1}\Gamma_{A^*+z^*B^*} \subseteq \mathcal{J}^{-1}\Gamma_{(A+zB)^*} = (\Gamma_{A+zB})^\perp,$$

essendo \mathcal{J} unitario; inoltre, P_z e P'_z sono proiettori ortogonali, per cui $P_z P'_z = P'_z P_z = \mathbf{0} \Rightarrow I - P_z - P'_z$ è un proiettore ortogonale $\forall z \in \Omega$ e cioè $\|I - P_z - P'_z\| = \{0, 1\}$. Ma $\|I - P_z - P'_z\|$ dipende da $z \in \Omega$ con continuità, per cui $\forall z \in \Omega_0$ abbiamo che $\|I - P_z - P'_z\| = \|I - P_0 - P'_0\| = 0$. In definitiva si ha che $\Gamma_{A^*+z^*B^*} = (\mathcal{J}\Gamma_{A+zB})^\perp = \Gamma_{(A+zB)^*}$, ovvero $A^* + z^*B^* = (A + zB)^* \quad \forall z \in \Omega_0$. \square

In particolare, per A e B come prima, con B, B^* aventi rispettivamente A, A^* -limite < 1 , si dimostra che $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset \Omega_0$ e quindi $(A+B)^* = A^* + B^*$ [Wei980]. Questo risultato, noto come **teorema di Hess–Kato** permette di dimostrare (senza ricorrere alla teoria spettrale) il seguente, fondamentale

TEOREMA (KATO–RELLICH) - Sia (A, \mathcal{D}_A) autoaggiunto (essenzialmente autoaggiunto) e $B \subseteq B^*$, A -limitato con A -limite < 1 . Allora $A + B$ è autoaggiunto (essenzialmente autoaggiunto).

Dimostrazione. (a) Per costruzione $(A + B) \subseteq (A + B)^*$ e $\mathcal{D}_{A+B} = \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B = \mathcal{D}_A$ essendo $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$ (B è A -limitato): quindi $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{(A+B)^*}$. Ma B^* è A^* -limitato, infatti $\mathcal{D}_{B^*} \supseteq \mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$ ed

$$\exists \alpha', \beta' \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{tali che} \quad \|B^* \mathbf{x}\|^2 = \|B \mathbf{x}\|^2 \leq \alpha'^2 \|\mathbf{x}\|^2 + \beta'^2 \|A \mathbf{x}\|^2 = \alpha'^2 \|\mathbf{x}\|^2 + \beta'^2 \|A^* \mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A,$$

essendo $A^* A = A A^*$; dalla precedente, segue inoltre che B^* deve avere A^* -limite $\leq A$ -limite di $B < 1$. Dunque $(A + B)^* = A^* + B^*$ (teorema di Hess–Kato) e $\mathcal{D}_{(A+B)^*} = \mathcal{D}_{A^* + B^*} = \mathcal{D}_A$, essendo $\mathcal{D}_{B^*} \supseteq \mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A$. Pertanto $A + B \subseteq A^* + B^*$ e $\mathcal{D}_{A+B} = \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^* + B^*}$, ovvero $A + B = (A + B)^*$.

(b) $\overline{A} = (\overline{A})^*$: allora \overline{B} è \overline{A} -limitato con \overline{A} -limite < 1 . Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\overline{A}}$ ed $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ t.c., per $n \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ ed $A \mathbf{x}_n \rightarrow \overline{A} \mathbf{x}$. B è A -limitato, quindi $(B \mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, per cui $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\overline{B}}$, $B \mathbf{x}_n \rightarrow \overline{B} \mathbf{x}$ e

$$\|\overline{B} \mathbf{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|B \mathbf{x}_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \|\mathbf{x}_n\| + \beta \|A \mathbf{x}_n\|) = \alpha \|\mathbf{x}\| + \beta \|\overline{A} \mathbf{x}\|.$$

Dal punto (a) segue che $\overline{A} + \overline{B}$ è autoaggiunto. D'altra parte $A + B \subseteq \overline{A} + \overline{B}$ e, per la proprietà di chiusura di $\overline{A} + \overline{B}$, è $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A} + \overline{B}$. Ma $\mathcal{D}_{\overline{A} + \overline{B}} = \mathcal{D}_{\overline{A}} = \mathcal{D}_{\overline{A} + \overline{B}}$ e dunque $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$. \square

Ricorrendo alla teoria spettrale, si dimostra inoltre che se A è *inferiormente limitato*, allora lo è anche $(A + B)$ [ReS975]; ciò ha grande utilità in Meccanica Quantistica, dove gli hamiltoniani “fisici” devono essere inferiormente limitati, così da garantire uno stato fondamentale finito. Esistono alcune varianti “simmetriche” del teorema di Kato–Rellich; ne presentiamo qui le due principali.

- **TEOREMA (KATO–RELLICH SIMMETRICO I)** Sia $A \subseteq A^*$, $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$ e $B \subseteq B^*$, A -limitato con A -limite < 1 ; allora $n_{\pm}(A + B) = n_{\pm}(A)$ (per la dimostrazione si veda [Car993]);
- **TEOREMA (KATO–RELLICH SIMMETRICO II)** Sia $A \subseteq A^*$, $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$ e $B \subseteq B^*$, $\overline{\mathcal{D}}_B = \mathcal{H}$; sia inoltre $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B$ tale che $\|(A - B)\mathbf{x}\| \leq \alpha(\|A \mathbf{x}\| + \|B \mathbf{x}\|) + \beta \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, con $\alpha < 1$. Allora $\overline{A} = (\overline{A})^*$ su $\mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{B} = (\overline{B})^*$ su \mathcal{D} ; inoltre, $\mathcal{D}_{\overline{A} + \overline{B}} = \mathcal{D}_{\overline{B}}$ (per la dimostrazione si veda [ReS975]).

Nel caso di operatori autoaggiunti, la richiesta di limite relativo minore di 1 non può essere indebolita. Ciò è evidente se si considera ad esempio un operatore $B = B^*$ non limitato tale che $A = -B$: qui A è B -limitato con B -limite = 1, ma $A + B$ è una restrizione propria dell'operatore nullo e non è autoaggiunto. Tuttavia, per limiti relativi unitari vale il seguente

TEOREMA (WÜST) - Sia $\overline{A} = (\overline{A})^*$ e $B \subseteq B^*$, A -limitato con $\beta = 1$ in (4.33). Allora $\overline{A + B} = (\overline{A + B})^*$.

Dimostrazione. Sia $C \equiv A + B$: dimostriamo che $\mathcal{N}_{C^* \mp \mathbb{1}} = (\mathcal{R}_{C \pm \mathbb{1}})^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Sia $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}$ tale che, per $n \rightarrow \infty$, $t_n \rightarrow 1$. Evidentemente $C_n \equiv A + t_n B$ è essenzialmente autoaggiunto $\forall n \in \mathbb{N}$ su \mathcal{D}_A (teorema di Kato–Rellich) e, per costruzione, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+$ tale che

$$\|(C_n - C)\mathbf{x}\| = (1 - t_n)\|B \mathbf{x}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}\| + \|A \mathbf{x}\| - t_n \|B \mathbf{x}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}\| + \|C_n \mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A. \quad (4.34)$$

Si prenda ora $\mathbf{h} \in (\mathcal{R}_{C \pm \mathbb{1}})^{\perp}$: poiché $\overline{C}_n = (\overline{C}_n)^*$, $\overline{\mathcal{R}}_{C_n \pm \mathbb{1}} = \mathcal{H}$ e quindi $\exists \mathbf{x}_n \in \mathcal{D}_{C_n} = \mathcal{D}_C$ tale che

$$\|(A_n \pm \mathbb{1})\mathbf{x}_n - \mathbf{h}\| \leq \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad \mathbf{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_n \pm \mathbb{1})\mathbf{x}_n.$$

Un breve conto permette di dimostrare che $\|(C_n \pm i\mathbb{1})\mathbf{x}_n\| \geq \|\mathbf{x}_n\|$, di conseguenza $\|\mathbf{h}\| \geq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{x}_n\|$, ovvero $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|C_n \mathbf{x}_n\| \leq 2\|\mathbf{h}\|$. Combinando quanto trovato con la (4.34), si trova che

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|(C_n - C)\mathbf{x}_n\| \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha \|\mathbf{x}_n\| + \|C_n \mathbf{x}_n\|) \leq c\|\mathbf{h}\|,$$

dove $c \equiv a + 2$. Ma $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$ per cui $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \mathbf{h}_\varepsilon \in \mathcal{D}_A$ tale che $\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_\varepsilon\| < \varepsilon$ e quindi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{h}, (C_n \pm i\mathbb{1})\mathbf{x}_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle \mathbf{h} - \mathbf{h}_\varepsilon, (C - C_n)\mathbf{x}_n \rangle + \langle \mathbf{h}_\varepsilon, (C - C_n)\mathbf{x}_n \rangle] \\ &\leq \|\mathbf{h} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|(C - C_n)\mathbf{x}_n\| + \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|(C - C_n)\mathbf{h}_\varepsilon\| \|\mathbf{x}_n\| \\ &\leq c\|\mathbf{h}\|\varepsilon + \limsup_{n \in \mathbb{N}} (1 - t_n) \|b\mathbf{h}_\varepsilon\| \|\mathbf{x}_n\| = c\|\mathbf{h}\|\varepsilon, \end{aligned}$$

avendo adoperato il fatto che $\mathbf{h} \in (\mathcal{R}_{C \pm i\mathbb{1}})^\perp$. Poiché la precedente vale $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, dev'essere $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. \square

Si noti che il teorema include anche il caso $A = A^*$ (vedi [ReS975] per una dimostrazione alternativa).

Discutiamo ora alcune applicazioni (esaustivamente indagate da T. Kato, [Kat980]) del teorema di Kato–Rellich al caso di **hamiltoniani atomici**. Preliminarmente, introduciamo la seguente notazione: sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , indicheremo con $L_p(\Omega) + L_q(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $f \equiv f_1 + f_2$, dove $f_1 \in L_p(\Omega)$ ed $f_2 \in L_q(\Omega)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$. Per brevità, sia $\Delta \equiv -\nabla^2$ il laplaciano in \mathbb{R}^n .

TEOREMA (AUTOAGGIUNTEZZA DI $H = -\Delta + V$) - Sia $H = -\Delta + V$ con $V \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty(\mathbb{R}^3)$ reale. Allora H è essenzialmente autoaggiunto su $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ed autoaggiunto su $\mathcal{D}_{-\Delta}$.

Dimostrazione. $(V, L_2(\mathbb{R}^3))$ è simmetrico su $\mathcal{D}_V = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : V\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)\}$. Sia quindi $V = V_1 + V_2$, dove $V_1 \in L_2(\mathbb{R}^3)$ e $V_2 \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$: allora $\|V\psi\|_{L_2} \leq \|V_1\|_{L_2} \|\psi\|_{L_\infty} + \|V_2\|_{L_\infty} \|\psi\|_{L_2}$ e quindi $\mathcal{D}_V \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ricorrendo alla trasformata di Fourier–Plancherel si dimostra che, per come definita, ψ è continua e limitata e $\forall a \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}^+$ (indipendente da ψ) tale che $\|\psi\|_{L_\infty} \leq a\|\Delta\psi\|_{L_2} + b\|\psi\|_{L_2} \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Quest'ultima, combinata con la disuguaglianza precedente, permette di concludere che

$$\|V\psi\|_{L_2} \leq a\|V_1\|_{L_2} \|\psi\|_{L_2} - \Delta\psi\|_{L_2} + (b + \|V_2\|_{L_\infty}) \|\psi\|_{L_2}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Pertanto V è $-\Delta$ -limitato con $-\Delta$ -limite arbitrariamente piccolo su $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ e quindi, per il teorema di Kato–Rellich, $(H, \mathcal{D}_{-\Delta})$ è autoaggiunto mentre $(H, C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$ è essenzialmente autoaggiunto. \square

Il teorema è utile, ad esempio, per l'autoaggiuntezza dell'**hamiltoniano dell'atomo d'idrogeno**: il potenziale coulombiano, infatti, può essere riscritto equivalentemente nella forma

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \equiv \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & \text{se } r > r' \\ 0 & \text{se } r \leq r' \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{se } r > r' \\ -\frac{e^2}{r} & \text{se } r \leq r' \end{cases}$$

per fissato $r' \in \mathbb{R}^3$. Dal momento che $V_1 \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ e $V_2 \in L_2(\mathbb{R}^3)$, vale il precedente teorema e quindi $(-\Delta - e^2 r^{-1}, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3))$ è autoaggiunto, mentre $(-\Delta - e^2 r^{-1}, C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$ è essenzialmente autoaggiunto.

Per potenziali atomici più complessi esiste una generalizzazione del teorema precedente (noto come *teorema di Kato* [ReS975]) che permette di ottenere il medesimo risultato per hamiltoniani del tipo $H = -\Delta + \sum_{k=1}^m V_k$ a patto che $\{V_k\}_{k=1, \dots, m}$ sia una famiglia di potenziali reali di \mathbb{R}^{3n} tali che $V_k \in L_2(\mathbb{R}^{3n}) + L_\infty(\mathbb{R}^{3n})$. In questo contesto rientrano ad esempio gli hamiltoniani atomici del tipo

$$H = -\sum_{k=1}^n \Delta_k - \sum_{k=1}^n \frac{ne^2}{r_k} + \sum_{k < \ell} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|},$$

dove $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$ è un insieme ortogonale di coordinate di \mathbb{R}^{3n} .

La classe dei “*potenziali di Kato*” (ovvero delle funzioni reali di $L_2 + L_\infty$) contiene una buona

percentuale di potenziale d'interesse in Fisica; ciononostante, un'altrettanto ampia percentuale è tagliata fuori. Infatti, è convinzione comune che i potenziali descrittivi dinamiche "fisiche" sono della forma $V_\alpha(r) \propto -r^{-\alpha}$ dove $\alpha < 2$: ma $V_\alpha \in L_2 + L_\infty \Leftrightarrow \alpha < 3/2$! Pertanto, non è possibile applicare il teorema di Kato–Rellich se $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$; esiste però una versione di tale teorema esteso al caso di *forme quadratiche relativamente limitate*, che enunciamo brevemente. Diamo prima la seguente

DEFINIZIONE (FORME QUADRATICHE, SIMMETRICHE E SEMI-LIMITATE) - Una **forma quadratica** è una mappa $q : \mathcal{Q}_q \times \mathcal{Q}_q \rightarrow \mathbb{C}$ con $\overline{\mathcal{Q}_q} = \mathcal{H}$ tale che $q(\cdot, \psi)$ è antilineare e $q(\phi, \cdot)$ è lineare $\forall \psi, \phi \in \mathcal{Q}_q$; \mathcal{Q}_q prende il nome di **dominio della forma**. Diremo che q è **simmetrica** se $q(\psi, \phi) = \overline{q(\phi, \psi)} \forall \psi, \phi \in \mathcal{Q}_q$, **positiva** se $q(\psi, \psi) \geq 0 \forall \psi \in \mathcal{Q}_q$ e **semi-limitata** se $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $q(\psi, \psi) \geq -\delta \|\psi\|^2 \forall \psi \in \mathcal{Q}_q$.

La definizione di forma quadratica positiva discende da quella di *operatore positivo*, ovvero un operatore (A, \mathcal{D}_A) tale che $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Una prima connessione tra operatori e forme l'abbiamo vista col teorema di Riesz per forme sesquilineari: in quel caso, però, gli operatori erano limitati. Nel caso di operatori non limitati, invece, esiste un legame meno ovvio del precedente, coinvolgente ora forme quadratiche, comprensibile solo una volta noti alcuni potenti strumenti di teoria spettrale. Al momento, possiamo al più osservare che se $A = A^*$, passando alla "rappresentazione spettrale" di A su $\bigoplus_{n=1}^N L_2(\mathbb{R}, \mu_n)$ (μ_n la misura di Lebesgue sull' n -esimo $L_2(\mathbb{R})$), è possibile definire la forma

$$\mathcal{Q}_q := \left\{ \{\psi_n\}_{n=1, \dots, N} : \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi_n(x)|^2 d\mu_n < \infty \right\},$$

$$q(\phi, \psi) := \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} x \overline{\phi_n(x)} \psi_n(x) d\mu_n, \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{Q}_q.$$

Si usa dire che $q(\phi, \psi) \equiv \langle \phi, A\psi \rangle$ è la **forma quadratica associata** ad A e $\mathcal{Q}_q = \mathcal{Q}_A$ è il **dominio di forma** dell'operatore A . Per completezza, enunciamo il teorema descrivente il legame tra semi-limitatezza di forme quadratiche ed autoaggiuntezza di operatori. Per farlo, dobbiamo estendere il concetto di chiusura di un operatore al caso di una forma quadratica semi-limitata (q, \mathcal{Q}_q) .

DEFINIZIONE (FORMA CHIUSA) - (q, \mathcal{Q}_q) è **chiusa** se \mathcal{Q}_q è completo rispetto alla norma

$$\|\psi\|_{+1} = \sqrt{q(\psi, \psi) + (\delta + 1)\|\psi\|^2}, \quad \delta \in \mathbb{R}^+. \quad (4.35)$$

TEOREMA (FORMA QUADRATICA SEMI-LIMITATA CHIUSA VS AUTOAGGIUNTEZZA) - Se (q, \mathcal{Q}_q) è una forma quadratica semi-limitata e chiusa, allora q è associata ad uno ed un solo operatore autoaggiunto.

Possiamo ora dimostrare il **teorema KLMN**, un analogo "in forma" del teorema di Kato–Rellich.

TEOREMA (KLMN) - Sia $A = A^*$ positivo e (q, \mathcal{Q}_A) una forma quadratica e simmetrica tale che

$$|q(\phi, \phi)| \leq a\langle \phi, A\phi \rangle + b\|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_A,$$

con $a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora $\exists! C = C^*$ con $\mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_A$ tale che $\langle \phi, C\psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle + q(\phi, \psi) \forall \psi, \phi \in \mathcal{Q}_C$.

Dimostrazione. Sia (γ, \mathcal{Q}_A) tale che $\gamma(\phi, \psi) = \langle \phi, A\psi \rangle + q(\phi, \psi)$. Per ipotesi sappiamo che $-a\langle \phi, A\phi \rangle - b\|\phi\|^2 \leq q(\phi, \phi) \leq a\langle \phi, A\phi \rangle + b\|\phi\|^2$: adoperando la disuguaglianza di sinistra, si trova che

$$\gamma(\phi, \phi) \geq (1 - a)\langle \phi, A\phi \rangle - b\|\phi\|^2 \geq -b\|\phi\|^2,$$

essendo A positivo ed $a < 1$: (γ, \mathcal{Q}_C) è semi-limitata; dalla disuguaglianza di destra, invece, segue che

$$(1 - a)\langle \phi, A\phi \rangle + \|\phi\|^2 \leq \gamma(\phi, \phi) + (b + 1)\|\phi\|^2 \leq (1 + a)\langle \phi, A\phi \rangle + (2b + 1)\|\phi\|^2,$$

ovvero $\exists \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha' \|\phi\|_{+1, A} \leq \|\phi\|_{+1, \gamma} \leq \beta' \|\phi\|_{+1, A} \forall \phi \in \mathcal{Q}_A$: le due norme sono equivalenti su \mathcal{Q}_A . Quindi \mathcal{Q}_A (che è chiuso rispetto a $\|\cdot\|_{+1, A}$) è chiuso rispetto a $\|\cdot\|_{+1, \gamma}$ e allora (γ, \mathcal{Q}_A) è quadratica semi-limitata e chiusa, perciò $\exists! C = C^*$ tale che $\gamma(\phi, \psi) = \langle \phi, C\psi \rangle \forall \psi, \phi \in \mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_A$. \square

Resta da chiarire perché il teorema KLMN abbia successo laddove il teorema di Kato–Rellich fallisce. L'ormai evidente analogia tra proprietà di forme quadratiche ed operatori, suggerisce la seguente

DEFINIZIONE (FORMA RELATIVAMENTE LIMITATA) - $A = A^*$ positivo e $B = B^*$ t.c. $\mathcal{Q}_B \supseteq \mathcal{Q}_A$ e

$$|\langle \phi, B\phi \rangle| \leq a\langle \phi, A\phi \rangle + b\|\phi\|^2, \quad \phi \in \mathcal{Q}_A, \quad (4.36)$$

dove $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora B è **A-forma-limitato**; inoltre, la quantità $\inf\{b : \exists a_b \in \mathbb{R} \text{ con } |\langle \phi, B\phi \rangle| \leq a\langle \phi, A\phi \rangle + b\langle \phi, B\phi \rangle, \phi \in \mathcal{Q}_A\}$ prende il nome di **A-forma-limite** di B e se esso è arbitrariamente piccolo, allora B è **A-infinitesimalmente-forma-limitato** e si scrive $B \prec\prec A$.

Quindi, se $A = A^*$ positivo e $B = B^*$ è A-forma-limitato con $a < 1$, il teorema KLMN dà senso all'operatore somma $A + B$. Attenzione però, questa definizione può differire da quella usuale di $A + B$: esistono, infatti, esempi di operatori di siffatta natura per i quali però $\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B = \{\mathbf{0}\}$ [ReS975].

Resta allora da verificare che $A = -\Delta$ e $B = V_\alpha$ soddisfano le ipotesi del teorema KLMN per $\alpha < 2$: è sufficiente dimostrare che $V_\alpha \prec\prec -\Delta$ per $\alpha < 2$. Per cominciare, proviamo che se $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4r^2} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}.$$

Sia ψ a valori reali: dunque $\nabla(r^{1/2}\psi) = r^{1/2}\nabla\psi + \frac{1}{2}r^{-3/2}\psi\mathbf{r}$. Per cui, se $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$,

$$|\nabla\psi|^2 = \left| r^{-1/2}\nabla(r^{1/2}\psi) - \frac{1}{2}r^{-2}\psi\mathbf{r} \right|^2 \geq -r^{-3/2}\psi \frac{\partial(r^{1/2}\psi)}{\partial r} + \frac{1}{4}r^{-2}|\psi|^2 = -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial(r|\psi|^2)}{\partial r} + \frac{1}{4}r^{-2}|\psi|^2$$

(ricordiamo che $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Dalla precedente segue quanto inizialmente cercato:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4r^2} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_2} r|\psi(\mathbf{r})|^2 d\Omega dr = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4r^2} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}.$$

Siano ora $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $a \in \mathbb{R}^+$ una costante fissata e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $r^{-\alpha} \leq \frac{a}{4}r^{-2}$; allora

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi(\mathbf{r})|^2}{r^\alpha} d\mathbf{r} = \int_{|\mathbf{r}| \leq \varepsilon} \frac{1}{r^\alpha} |\phi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} + \int_{|\mathbf{r}| > \varepsilon} \frac{1}{r^\alpha} |\phi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \leq a \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta\phi(\mathbf{r}))\bar{\phi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}.$$

Vista l'analogia con il teorema di Kato–Rellich, ci si può domandare se esista una classe di potenziali soddisfacenti le ipotesi del teorema KLMN. Ad oggi si sa che la famiglia dei **potenziali di Rollnik** rientra in tal classe: una $V \in L_0(\mathbb{R}^3)$ (dove L_0 è lo spazio delle funzioni misurabili) è di Rollnik se

$$\|V\|_{\mathcal{R}}^2 := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{x} d\mathbf{y} < \infty. \quad (4.37)$$

L'insieme $\mathcal{R} = \{V \in L_0(\mathbb{R}^3) : \|V\|_{\mathcal{R}} < \infty\}$ prende il nome di *spazio di Rollnik* ed è completo rispetto alla norma (4.37). Ciò che conta è che se $V \in \mathcal{R} + L_\infty(\mathbb{R}^3)$, allora $V \prec\prec -\Delta$ e quindi vale il teorema KLMN; un esempio di potenziale soddisfacente tale ipotesi è proprio $r^{-\alpha}$ per $\alpha < 2$.

I teoremi di Kato–Rellich, Wüst e KLMN sono i capisaldi sui quali si basa la teoria delle perturbazioni. Essi hanno un'applicabilità così ampia che generalmente nuovi metodi di autoaggiuntezza vengono testati in quelle situazioni in cui i suddetti non trovano applicazione. Dei criteri perturbativi alternativi, uno degno di nota è il cosiddetto **trucco di Konrady**, un mix dei teoremi di Kato–Rellich e di Wüst che permette di dimostrare l'essenziale autoaggiuntezza di $A + B$ in tre passi: 1) si sceglie (C, \mathcal{D}_C) tale che $A + C$ è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{A+C}$, 2) invocando Kato–Rellich, si dimostra che $A + C + B$ è essenzialmente autoaggiunto su \mathcal{D} , infine 3) si determina $b \in \mathbb{R}$ t.c. $\|C\mathbf{x}\| \leq \|(A + B + C)\mathbf{x}\| + b\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ e si dimostra tramite Wüst l'essenziale autoaggiuntezza di

$A + B = A + B + C - C$ su \mathcal{D} . Questo criterio consente, ad esempio, di dimostrare l'essenziale autoaggiuntezza su $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dell'hamiltoniano dell'**oscillatore anarmonico** unidimensionale $H = H_0 + \mathfrak{q}^4$ dove $H_0 \equiv \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2$. Naturalmente, occorre prima dimostrare che $(H_0, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ è (quanto meno) essenzialmente autoaggiunto e per fa ciò bisogna ricorrere ad alcune importanti tecniche di Teoria spettrale.

4.7 Prodotto tensoriale di operatori

Concludiamo il capitolo con alcuni aspetti del *prodotto tensore di operatori lineari*. Siano (A, \mathcal{D}_A) e (B, \mathcal{D}_B) lineari e densamente definiti in \mathcal{H} ; il sottospazio $\mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B$ è l'insieme delle infinite combinazioni lineari di vettori della forma $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, dove $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ ed $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_B$. Definiamo $(A \otimes B, \mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B)$ come

$$(A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \otimes B\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_B. \quad (4.38)$$

L'operatore $(A \otimes B, \mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B)$ è *lineare e ben definito*⁷⁴; inoltre, se $\mathbf{g} \in \mathcal{D}_{A^*} \otimes \mathcal{D}_{B^*}$, allora $\langle (A \otimes B)\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{x}, (A^* \otimes B^*)\mathbf{g} \rangle \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B$ e quindi $\mathcal{D}_{A^*} \otimes \mathcal{D}_{B^*} \subseteq \mathcal{D}_{(A \otimes B)^*}$. Per cui, se A e B sono *chiudibili*, allora $\overline{\mathcal{D}_{(A \otimes B)^*}} = \mathcal{H}$, ovvero $A \otimes B$ è chiudibile e così anche $(A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes B, \mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B)$.

DEFINIZIONE (PRODOTTO TENSORE DI OPERATORI) - (A, \mathcal{D}_A) e (B, \mathcal{D}_B) *chiudibili*. Si definisce **prodotto tensore** di A e B la chiusura dell'operatore $A \otimes B$ su $\mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B$.

Per semplicità di notazione (e laddove ciò non crei confusione), indicheremo con $A \otimes B$ il prodotto tensore tra A e B e con $A + B$ la chiusura di $A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes B$ su $\mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B$.

TEOREMA (PRODOTTO TENSORE DI OPERATORI LIMITATI) - (A, \mathcal{D}_A) , (B, \mathcal{D}_B) *limitati*. Allora

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|. \quad (4.39)$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{e}_k\}$ una base ortonormale di \mathcal{H} , $\sum_{k,\ell} c_{k,\ell} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell)$ una somma finita di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$:

$$\left\| (A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \sum_{k,\ell} c_{k,\ell} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) \right\|^2 = \sum_{\ell} \left\| \sum_k c_{k,\ell} A \mathbf{e}_k \right\|^2 \leq \sum_{\ell} \|A\|^2 \sum_k |c_{k,\ell}|^2 = \|A\|^2 \left\| \sum_{k,\ell} c_{k,\ell} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) \right\|^2.$$

Si dimostra che l'insieme di tali somme è denso in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ e quindi $\|A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\| \leq \|A\|$, da cui segue che $\|A \otimes B\| \leq \|A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\| \|B\| \leq \|A\| \|B\|$. D'altra parte, preso $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ di norma unitaria tali che $\|A\mathbf{x}\| \geq \|A\| - \varepsilon$ ed $\|B\mathbf{y}\| \geq \|B\| - \varepsilon$: pertanto $\|(A \otimes B)\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\| = \|A\mathbf{x}\| \|B\mathbf{y}\| \geq \|A\| \|B\| - \varepsilon(\|A\| + \|B\|) + \varepsilon^2$. Essendo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, è $\|A \otimes B\| \geq \|A\| \|B\|$. \square

Veniamo all'autoaggiuntezza. Sia $\{(A_k, \mathcal{D}_{A_k})_{k=1}^n$ una famiglia di operatori autoaggiunti (per semplicità A_k è la chiusura di $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes A_k \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ su $\mathcal{D} \equiv \otimes_k \mathcal{D}_{A_k}$) e $P(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n_k in x_k . L'operatore $P(A_1, \dots, A_n)$ ha senso su $\otimes_k \mathcal{D}_{A_k^{n_k}}$ essendo $\mathcal{D}_{A_k^{n_k}} \subseteq \mathcal{D}_{A_k^\ell} \quad \forall \ell \leq n_k$. Si può allora dimostrare che se $(A_k^{n_k}, \mathcal{D}_k^{ess})$ è essenzialmente autoaggiunto, lo è anche $(P(A_1, \dots, A_n), \mathcal{D}^{ess} \equiv \otimes_k \mathcal{D}_k^{ess})$ [ReS980]. Ciò ha come principale conseguenza il seguente

TEOREMA (AUTOAGGIUNTEZZA DEL PRODOTTO TENSORE) - Se $\{(A_k, \mathcal{D}_k^{ess})\}_{k=1, \dots, n}$ sono *essenzialmente autoaggiunti*, lo sono anche $(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n, \mathcal{D}^{ess})$ ed $(A_1 + A_2 \cdots + A_n, \mathcal{D}^{ess})$.

Il teorema precedente può essere invocato, ad esempio, per dimostrare l'essenziale autoaggiuntezza dell'*Hamiltoniano di particella libera in seconda quantizzazione*. Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ lo spazio di Fock ad esso associato; sia inoltre (A, \mathcal{D}_A) essenzialmente autoaggiunto su \mathcal{H} . Associamo a ciascun A di \mathcal{H} un operatore \mathcal{A} di $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Per farlo, consideriamo l'operatore $A^{(n)} \equiv A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes A \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \dots + \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes A$ definito su $\mathcal{D}_A^{\otimes n}$; sia quindi $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})$ l'insieme $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots\}$, con $\mathbf{x}_n \in \mathcal{D}_A^{\otimes n}$, tali che $\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ per $n \gg 1$. Naturalmente $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ è denso in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$

⁷⁴ $\sum_i c_i \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i, \sum_j d_j \mathbf{x}'_j \otimes \mathbf{y}'_j$ due rappresentazioni di $\mathbf{z} \in \mathcal{D}_A \otimes \mathcal{D}_B \Rightarrow (A \otimes B) \sum_i c_i \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i = (A \otimes B) \sum_j d_j \mathbf{x}'_j \otimes \mathbf{y}'_j$.

essendo \mathcal{D}_A denso in \mathcal{H} . Definiamo allora $\mathcal{A} \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$ con $A^{(0)} \equiv \mathbb{O}$: $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ è ben definito ed essenzialmente autoaggiunto. Infatti, invocando il precedente teorema, $(A^{(n)}, \mathcal{D}_A^{\otimes n})$ è essenzialmente autoaggiunto e quindi $\mathcal{R}_{A_{\mathcal{F} \pm i \mathbb{1}_{\mathcal{F}(\mathcal{H})}}}$ è denso in $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, ovvero $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ è essenzialmente autoaggiunto. In particolare, se A è l'operatore di energia libera, allora \mathcal{A} è l'operatore di energia libera in seconda quantizzazione; in tal caso \mathcal{A} commuta con i proiettori sugli spazi di Fock fermionici e bosonici, per cui $(\mathcal{A}|_{\mathcal{F}_\zeta(\mathcal{H})}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_\zeta(\mathcal{H}))$ sono entrambi essenzialmente autoaggiunti.

5 Elementi di teoria spettrale degli operatori lineari

In questo capitolo descriveremo i principali contenuti della teoria spettrale degli operatori lineari. Come vedremo, lo sforzo profuso per dimostrare l'autoaggiuntezza o l'essenziale autoaggiuntezza di un operatore trova ora coronamento nei teoremi di decomposizione spettrale. Preliminarmente richiameremo alcuni risultati relativi alle proprietà spettrali di operatori lineari in spazi finito dimensionali e di operatori lineari limitati in spazi di Hilbert di dimensione arbitraria, per poi estendere la teoria al caso di operatori non limitati ma densamente definiti.

5.1 Teoria spettrale degli operatori lineari in spazi finito dimensionali

Nel §4.1 si è visto che in spazi prehilbertiani finito dimensionali ogni operatore lineare è limitato ed è rappresentato da una matrice quadrata a valori complessi univocamente determinata dalla scelta della base. In simili spazi la teoria spettrale degli operatori lineari si riduce quindi alla **teoria degli autovalori ed autovettori delle matrici**. Per cominciare, richiameremo alcuni concetti di base.

Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la sua matrice rappresentativa: diremo che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un **autovalore** di A se $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, nel qual caso \mathbf{x} è un **autovettore** di A associato all'autovalore λ ; inoltre, l'insieme $\mathcal{M}_\lambda := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ prende il nome di **autospazio** associato all'autovalore λ e la sua dimensione corrisponde alla **molteplicità** (o **degenerazione**) dell'autovalore λ .

DEFINIZIONE (SPETTRO ED INSIEME RISOLVENTE DI UNA MATRICE) - *L'insieme degli autovalori di A $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\}$ prende il nome di **spettro** di A , mentre il suo complemento nel piano complesso $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ è detto **insieme risolvente** di A .*

L'equazione $(\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un sistema omogeneo di n equazioni lineari in n incognite (le componenti di $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$); dunque, affinché il sistema ammetta una soluzione non banale, dev'essere

$$\mathcal{P}_\mathcal{A}(\lambda) := \det(\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n) = 0. \quad (5.1)$$

Quest'ultima è nota come **equazione caratteristica** (o *secolare*) di \mathcal{A} e $\mathcal{P}_\mathcal{A}(\lambda)$ è un polinomio di grado n in λ e prende il nome di **polinomio caratteristico** di \mathcal{A} . Inoltre, nel caso in cui $\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n$ sia invertibile, è possibile introdurre l'operatore lineare e limitato (vedi §4.1 per le proprietà dell'inverso)

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n)^{-1}, \quad (5.2)$$

che, per la sua utilità, prende il nome di **operatore risolvente** di \mathcal{A} o, semplicemente, **risolvente** di \mathcal{A} . Come vedremo nel seguito, \mathcal{R}_λ riveste un ruolo centrale nella teoria spettrale degli operatori lineari.

Possiamo allora osservare che, in spazi finito dimensionali, lo spettro di un operatore lineare è costituito dalle soluzioni dell'equazione (5.1) o, equivalentemente, dall'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n$ non è invertibile. Inoltre, dal **teorema fondamentale dell'algebra** segue immediatamente il seguente

TEOREMA (SPETTRO DI MATRICI) - *$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ha almeno un autovalore ed al più n autovalori distinti.*

Lo spettro di $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ non dipende dalla scelta della base. Infatti, se $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sono rappresentative di A in due basi distinte, allora $\exists \mathcal{S} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile t.c. $\mathcal{A}' = \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$, per cui

$$\det(\mathcal{A}' - \lambda\mathbb{1}_n) = \det(\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det(\mathcal{S}(\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n)\mathcal{S}^{-1}) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathbb{1}_n),$$

ovvero $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}')$. Di conseguenza, in spazi finito dimensionali $\sigma(A) \neq \emptyset$.

TEOREMA (INDIPENDENZA LINEARE) - *Ad autovalori distinti corrisp. autovettori lin. indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1, \dots, m}$ l'insieme degli autovettori associati agli autovalori $\{\lambda_k\}_{k=1, \dots, m}$, tutti distinti. Supponiamo che valga la relazione $\sum_{k=1}^m c_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$; occorre dimostrare che

$c_k = 0$ per $k = 1, \dots, m$. A tal fine, applichiamo $m - 1$ volte l'operatore A ad ambo i membri, sicché

$$\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k^{j-1} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, m.$$

L'insieme $(\lambda_k^{j-1})_{k,j=1,\dots,m}$ identifica gli elementi di una *matrice di Vandermonde* della forma

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \equiv \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}, \quad \det V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \prod_{1 \leq j < k \leq m} (\lambda_j - \lambda_k).$$

Poiché $\det V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0$ si ha che $V(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è invertibile e quindi $c_k = 0$ per $k = 1, \dots, m$. \square

Come corollario segue naturalmente che se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ e $\dim(\sigma(A)) = n$ (tutti gli autovalori sono distinti), allora l'insieme degli autovettori di A forma una base di \mathbb{C}^n . In tal caso, si usa dire che A è **diagonalizzabile**, nel senso che $\mathcal{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ nella base dei suoi autovettori. Questa forma diagonale semplifica notevolmente le espressioni relative alle funzioni di operatori; infatti, se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica su un opportuno dominio ed $\mathcal{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora⁷⁵ $\widehat{f}(A) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$. Tuttavia, non tutti gli operatori sono diagonalizzabili ed in tal caso si pone il problema di come definire $\widehat{f}(A)$. Un modo possibile (e più comodo rispetto a quello maggiormente adoperato delle serie di potenze) è quello di stabilire una formula simile a quella di Cauchy.

DEFINIZIONE (FORMULA DI RIESZ–DUNFORD) - Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica definita regolare su un dominio \mathcal{D} contenente un aperto \mathcal{U} (non necessariamente connesso) di cui gli autovalori di A siano punti interni. Indicando con $\partial\mathcal{U}$ la frontiera di \mathcal{U} (intesa come curva di Jordan orientata in senso antiorario), si definisce allora

$$\widehat{f}(A) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{U}} (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} f(\lambda) d\lambda. \quad (5.3)$$

Dalla formula di Riesz–Dunford seguono alcune importanti proprietà. Cominciamo dal seguente⁷⁶

LEMMA (IDENTITÀ DI HILBERT) - Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, $\mu, \lambda \in \rho(A)$. Vale allora l'**identità di Hilbert**

$$\mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_\mu(A) = -\frac{\mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_\mu(A)}{(\lambda - \mu)}. \quad (5.4)$$

Dimostrazione. Detto $\mathcal{T}_\mu(A) \equiv (\lambda \mathbf{1}_n - A)$ si ha che $\mathcal{T}_\mu(A) \mathcal{R}_\mu(A) = \mathbf{1}$, dunque $\mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_\mu(A) = \mathcal{R}_\lambda(A) (\mathcal{R}_\mu(A) \mathcal{T}_\mu(A)) - (\mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{T}_\lambda(A)) \mathcal{R}_\mu(A) = \mathcal{R}_\lambda(A) (\mathcal{T}_\mu(A) - \mathcal{T}_\lambda(A)) \mathcal{R}_\mu(A) = -(\lambda - \mu) \mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_\mu(A)$. \square

TEOREMA (PRODOTTO DI FUNZIONI) - Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ t.c. vale la (5.3). Allora

$$\widehat{f}_1(A) \widehat{f}_2(A) = \widehat{f_1 f_2}(A). \quad (5.5)$$

Dimostrazione. Siano rispettivamente \mathcal{U}_1 ed \mathcal{U}_2 i due insiemi (non necessariamente connessi) dei domini di definizione di f_1 ed f_2 contenenti $\sigma(A)$. Supponiamo che $\partial\mathcal{U}_1$ sia propriamente contenuto in $\partial\mathcal{U}_2$: allora $\widehat{f}_1(A) \widehat{f}_2(A) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\partial\mathcal{U}_1} \oint_{\partial\mathcal{U}_2} \mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{R}_{\lambda'}(A) f_1(\lambda) f_2(\lambda') d\lambda d\lambda'$. Tenendo presente la rappresentazione integrale di Cauchy, l'identità (5.4) ed applicando due volte il teorema di Cauchy, si ha

$$\widehat{f}_1 \widehat{f}_2 = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \left[\oint_{\partial\mathcal{U}_1} f_1(\lambda) \mathcal{R}_\lambda \underbrace{\oint_{\partial\mathcal{U}_2} \frac{f_2(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda'}_{-2\pi i f_2(\lambda)} d\lambda - \oint_{\partial\mathcal{U}_2} f_2(\lambda') \mathcal{R}_{\lambda'} \underbrace{\oint_{\partial\mathcal{U}_1} \frac{f_1(\lambda)}{\lambda - \lambda'} d\lambda}_{0} d\lambda' \right] = \widehat{f_1 f_2},$$

⁷⁵La notazione \widehat{f} sta a distinguere tra l'applicazione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e l'applicazione $\widehat{f} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

⁷⁶Diversamente dalla definizione (5.2), adopereremo in questo contesto l'espressione $\mathcal{R}_\lambda(A) = (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1}$; naturalmente, le due definizioni sono equivalenti e la scelta della (5.2) serve ad uniformarsi con gli argomenti esposti nei prossimi paragrafi.

avendo osservato che, nel secondo integrale, λ è esterno al cammino d'integrazione. \square

Affrontiamo ora il problema relativo alla diagonalizzabilità di $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed alla **decomposizione spettrale**. Siano $\{\lambda_k\}_{k=1, \dots, m}$ autovalori distinti di A ciascuno con molteplicità r_k t.c. $\sum_k r_k = n$; dunque $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det \mathcal{T}_\lambda(A) = \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$. Tenendo presente la formula d'inversione per matrici non singolari, troviamo che gli elementi del risolvente sono del tipo $(\mathcal{R}_\lambda(A))_{ij} \sim \frac{c_{ij}}{\mathcal{P}_A(\lambda)}$, ovvero sono funzioni razionali di λ aventi poli di ordine $\leq r_k$ nei punti dello spettro. Ma $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita analitica su \mathcal{U} e può quindi essere sviluppata in serie di Taylor attorno a ciascun autovalore; pertanto, indicando con $\partial \mathcal{U}_k$ la frontiera di ciascun intorno di λ_k e tenendo presente che $\oint_{\partial \mathcal{U}} = \sum_k \oint_{\partial \mathcal{U}_k}$, si trova

$$\widehat{f}(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \oint_{\partial \mathcal{U}_k} \mathcal{R}_\lambda(A) \sum_{\ell=0}^{r_k-1} \frac{f^{(\ell)}(\lambda_k)}{\ell!} (\lambda - \lambda_k)^\ell d\lambda \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=0}^{r_k-1} \frac{f^{(\ell)}(\lambda_k)}{\ell!} \mathbb{E}_k^{(\ell)}(A).$$

In definitiva, possiamo affermare che se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica su un dominio contenente propriamente $\sigma(A)$ ed $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ha spettro $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k=1, \dots, m}$ con $\dim \mathcal{M}_{\lambda_k} \leq r_k$, risulta essere

$$\widehat{f}(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \sum_{\ell=0}^{r_\lambda-1} \frac{f^{(\ell)}(\lambda)}{\ell!} \mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}(A) \quad \text{dove} \quad \mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}(A) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}_\lambda} \mathcal{R}_{\lambda'}(A) (\lambda' - \lambda)^\ell d\lambda'. \quad (5.6)$$

Grazie alla precedente espressione, è possibile dimostrare la seguente corrispondenza tra f ed \widehat{f} : sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed $f(\lambda) = \lambda^m$, allora $\widehat{f}(A) = A^m$. La dimostrazione segue banalmente dal teorema sul prodotto di funzioni; tuttavia, offre uno spunto come applicazione della formula di Riesz–Dunford. Cominciamo con il caso $m = 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}} (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}} \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} \frac{d\lambda}{\lambda};$$

scegliendo come frontiera una circonferenza centrata nell'origine di raggio R , l'integrale $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbb{1} - A/Re^{-i\theta})^{-1} d\theta$ non dipende da R ; nel limite per $R \rightarrow \infty$ si ha che $\mathbb{1} = \oint_{\partial \mathcal{U}} (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathbb{E}_\lambda^{(0)}(A)$. Analogamente, si trova $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda \mathbb{E}_\lambda^{(0)}(A) + \mathbb{E}_\lambda^{(1)}(A))$ ed in generale

$$A^m = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \left(\lambda^m \mathbb{E}_\lambda^{(0)}(A) + m\lambda^{m-1} \mathbb{E}_\lambda^{(1)}(A) + \dots + m! \mathbb{E}_\lambda^{(m)}(A) \right).$$

In definitiva, la precedente espressione ci porta alla seguente identità, valida per ogni polinomio $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\widehat{\mathcal{P}}(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \sum_{\ell=0}^{r_\lambda-1} \frac{\mathcal{P}^{(\ell)}(\lambda)}{\ell!} \mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}(A). \quad (5.7)$$

Gli op. $\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}$ godono di un'importante proprietà (per semplicità ne omettiamo la dipendenza da A).

TEOREMA (PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI $\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}$) - Siano $\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}$ definiti come in (5.6). Allora

$$\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)} \mathbb{E}_{\lambda'}^{(\ell')} = \delta_{\lambda, \lambda'} \mathbb{E}_\lambda^{(\ell+\ell')}. \quad (5.8)$$

Dimostrazione. $\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)} \mathbb{E}_{\lambda'}^{(\ell')} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\partial \mathcal{U}} \oint_{\partial \mathcal{U}'} \mathcal{R}_z \mathcal{R}_{z'} (z - \lambda)^\ell (z' - \lambda')^{\ell'} dz dz'$ dunque, dalla (5.4), è

$$\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)} \mathbb{E}_{\lambda'}^{(\ell')} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[\oint_{\partial \mathcal{U}} \mathcal{R}_z (z - \lambda)^\ell \underbrace{\oint_{\partial \mathcal{U}'} \frac{(z' - \lambda')^{\ell'}}{z' - z} dz'}_{*} dz + \oint_{\partial \mathcal{U}'} \mathcal{R}_{z'} (z' - \lambda')^{\ell'} \underbrace{\oint_{\partial \mathcal{U}} \frac{(z - \lambda)^\ell}{z - z'} dz}_{**} dz' \right].$$

Per $\lambda \neq \lambda'$, gli integrali * e ** sono nulli, essendo le singolarità esterne ai cammini d'integrazione, mentre per $\lambda = \lambda'$, scegliendo $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, si ha che ** è nullo, mentre * = $2\pi i (z - \lambda)^{\ell'}$, da cui segue la (5.8). \square

Di conseguenza, gli operatori $\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)}$ sono dei *proiettori* e sono tutti esprimibili come potenze del caso $\ell = 1$ (ovvero $\mathbb{E}_\lambda^{(\ell)} = [\mathbb{E}_\lambda^{(1)}]^\ell$); per cui, posti $\mathbb{P}_\lambda \equiv \mathbb{E}_\lambda^{(0)}$ ed $\mathbb{E}_\lambda \equiv \mathbb{E}_\lambda^{(1)}$, lo sviluppo (5.6) diventa ora

$$\widehat{f}(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \left(f(\lambda) \mathbb{P}_\lambda + \sum_{\ell=1}^{r_\lambda-1} \frac{f^{(\ell)}(\lambda)}{\ell!} \mathbb{E}_\lambda^\ell \right). \quad (5.9)$$

Come casi particolari, ritroviamo due espressioni di uso comune in Meccanica Quantistica:

$$\mathbb{1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathbb{P}_\lambda, \quad A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda \mathbb{P}_\lambda + \mathbb{E}_\lambda), \quad (5.10)$$

note rispettivamente come **relazione di completezza** e **decomposizione spettrale** dell'operatore A . Quest'ultima, in particolare, mostra la possibilità di esprimere un generico operatore lineare in uno spazio finito dimensionale come *sovrapposizione di proiettori sugli autospazi associati ai propri autovalori*.

Possiamo ora dimostrare il teorema generale sulla diagonalizzabilità.

TEOREMA (DIAGONALIZZABILITÀ) - Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) A è diagonalizzabile, ovvero ammette una base di autovettori;
- (2) il proiettore $\mathbb{E}_\lambda = \mathbb{O}$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$;
- (3) tutti gli elementi di $\mathcal{R}_\lambda(A)$ hanno al più poli del primo ordine;
- (4) A soddisfa un'equazione algebrica con tutte radici semplici.

Dimostrazione. Verifichiamo che (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1). Sia A diagonalizzabile, dunque $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è una matrice diagonale a blocchi del tipo $\mathcal{A} = \text{diag}(\lambda_1 \mathbb{1}_{r_{\lambda_1}}, \dots, \lambda_m \mathbb{1}_{r_{\lambda_m}})$. Di conseguenza $(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathbb{1}_n)(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathbb{1}_n) \cdots (\mathcal{A} - \lambda_m \mathbb{1}_n) = \mathbb{O}_n$ in quanto ogni fattore presenta un blocco nullo lungo la diagonale principale e quindi $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ soddisfa un'equazione algebrica ((1) \Rightarrow (4)). Se ciò è vero, allora $\Phi(\mathcal{A}) = \prod_k (\mathcal{A} - \lambda_k \mathbb{1}_n) = \mathbb{O}_n$, con tutti i λ_k distinti e quindi

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \frac{1}{\Phi(\lambda)} \frac{\Phi(\lambda) \mathbb{1}_n - \Phi(\mathcal{A})}{\lambda \mathbb{1}_n - \mathcal{A}}.$$

Ma $\frac{\Phi(\lambda) \mathbb{1}_n - \Phi(\mathcal{A})}{\lambda \mathbb{1}_n - \mathcal{A}}$ è un polinomio in λ e quindi le uniche singularità vengono da $\Phi(\lambda)$ e dunque si tratta di poli semplici ((4) \Rightarrow (3)). Di conseguenza, dalla definizione (5.6) si trova che $\mathbb{E}_\lambda = \mathbb{O}$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$ ((3) \Rightarrow (2)) e quindi la decomposizione di $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ è data dall'espressione

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathbb{P}_\lambda. \quad (5.11)$$

Secondo la relazione di completezza, ciascun $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ si decompone nella forma $\mathbf{x} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathbb{P}_\lambda \mathbf{x}$ e, dalle espressioni (5.11) ed (5.8), segue che $A \mathbb{P}_\lambda \mathbf{x} = \sum_{\lambda' \in \sigma(A)} \lambda' \mathbb{P}_{\lambda'} \mathbb{P}_\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbb{P}_\lambda \mathbf{x}$. Per assurdo, supponiamo che gli autovettori $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1, \dots, m}$ di A non formino una base, e cioè che esista $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ linearmente indipendente dai precedenti e tale per cui $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1, \dots, m} \cup \{\mathbf{x}\}$ sia una base di \mathbb{C}^n . Ma $\mathbf{x} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathbb{P}_\lambda \mathbf{x}$ ed è quindi esprimibile come combinazione lineare di $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1, \dots, m}$, contrariamente a quanto assunto. \square

5.1.1 Operatori autoaggiunti, unitari e normali

Restringiamo l'attenzione a tre classi di operatori lineari per le quali esiste un teorema di diagonalizzabilità molto semplice. Partiamo dagli operatori autoaggiunti e cominciamo con il seguente

TEOREMA (SPETTRO DI OPERATORI AUTOAGGIUNTI) - $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ed $A = A^*$. Allora $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $A \mathbf{a} = a \mathbf{a} \Rightarrow a \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}, A \mathbf{a} \rangle = \langle A^* \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle A \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \bar{a} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$. \square

Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ autoaggiunto e supponiamo ora che $\exists m > 1$ tale che $(A - a\mathbf{1})^m \mathbf{a} = \mathbf{0}$: allora $(A - a\mathbf{1})^{m-1} \mathbf{a} = \mathbf{0}$ in quanto $\|(A - a\mathbf{1})\mathbf{a}\|^2 = \langle (A - a\mathbf{1})^{m-2} \mathbf{a}, (A - a\mathbf{1})^m \mathbf{a} \rangle = 0$ (essendo a reale) e, procedendo ricorsivamente, $(A - a\mathbf{1})\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Dunque, il polinomio minimale (ovvero il polinomio di grado minimo tra tutti quelli per cui $\mathcal{P}(A) = \mathbf{0}$) di un operatore autoaggiunto ha tutti i fattori semplici ed A è diagonalizzabile nella base degli autovettori (teorema di diagonalizzabilità, punto (4)); inoltre, se $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{C}^n$ sono autovettori appartenenti ad autovalori distinti $a, a' \in \mathbb{R}$ di A , si ha che

$$(a - a')\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle = \bar{a}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle - a'\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle = \langle A\mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle - \langle \mathbf{a}, A\mathbf{a}' \rangle = \langle A\mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle - \langle A\mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle = 0.$$

Quindi gli autovettori di A formano una *base ortogonale*. Viceversa, se esiste una base ortogonale di \mathbb{C}^n nella quale $A = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ con $c_k \in \mathbb{R}$ per $k = 1, \dots, n$ (non necessariamente autovalori di A), allora $A = A^*$; infatti, presi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ si ha che $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k a_k y_k = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^n}$. Quanto appena osservato costituisce il contenuto del seguente

TEOREMA (DIAGONALIZZAZIONE DI OPERATORI AUTOAGGIUNTI) - Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Allora $A = A^* \Leftrightarrow$ esiste una base ortogonale nella quale A è rappresentato da una matrice diagonale con elementi reali.

Per la classe degli operatori unitari, la proprietà di diagonalizzabilità è simile alla precedente.

TEOREMA (SPETTRO DI OPERATORI UNITARI) - $U \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ unitario : $\sigma(U) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Dimostrazione. $U\mathbf{u} = u\mathbf{u}$, $u \in \mathbb{C}$; $UU^* = U^*U = \mathbf{1} \Rightarrow |u|^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle U^*U\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \Leftrightarrow |u| = 1$. \square

TEOREMA (DIAG. DI OPERATORI UNITARI) - $U \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ unitario $\Rightarrow U$ diag. in base ortogonale.

Si è così scoperto che l'unica differenza tra la operatori autoaggiunti ed unitari è legata allo spettro: nella prima classe esso giace sulla retta reale, mentre nella seconda sulla circonferenza di raggio unitario. Ciò si ricollega a quanto osservato in relazione alla *trasformata di Cayley*, ovvero alla possibilità di determinare una funzione che trasformi la retta nel cerchio e quindi operatori autoaggiunti in unitari.

Operatori autoaggiunti ed unitari sono in realtà casi particolari di **operatori normali**. Vogliamo mostrare che la *condizione di normalità* $[N, N^*] = \mathbf{0}$ è necessaria e sufficiente affinché $N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ sia diagonalizzabile in una base ortogonale. Dimostriamo prima il seguente

LEMMA (OPERATORI COMMUTANTI) - Siano $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, con $[A, B] = \mathbf{0}$. L'autospazio \mathcal{M}_a è B -invariante e quindi due operatori commutanti hanno almeno un autovettore in comune.

Dimostrazione. $A\mathbf{a} = a\mathbf{a}$, per cui $A(B\mathbf{a}) = B(A\mathbf{a}) = aB\mathbf{a}$ e quindi $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_a \Rightarrow B\mathbf{a} \in \mathcal{M}_a$. Inoltre $B \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_a, \mathbb{C}^n)$ e dunque ammette almeno un autovettore in \mathcal{M}_a . \square

Inoltre, per operatori autoaggiunti commutanti vale il seguente teorema, noto in Meccanica Quantistica.

TEOREMA (AUTOAGGIUNTI COMMUTANTI) - Siano $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ autoaggiunti. Allora A e B commutano se e solo se ammettono una base di autovettori in comune.

Dimostrazione. Sia $[A, B] = \mathbf{0}$, dunque $\exists \mathbf{1} \in \mathbb{C}^n$ t.c. $A\mathbf{1} = a_1\mathbf{1}$ e $B\mathbf{1} = b_1\mathbf{1}$. Il sottospazio $S_1 = \{\mathbf{1}\}^\perp$ è invariante rispetto ad entrambi gli operatori e quindi A, B sono autoaggiunti e commutanti su S_1 ed hanno almeno un autovettore $\mathbf{2}$ in comune in S_1 . Procedendo ricorsivamente si ottiene una base comune ortogonale. Viceversa, se $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ammettono una base comune ortogonale di autovettori, allora A, B hanno matrici rappresentative diagonali, le quali commutano per costruzione. \square

Possiamo quindi dimostrare il seguente teorema di diagonalizzabilità per operatori normali.

TEOREMA (DIAG. DI OPERATORI NORMALI) - $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ diag. in base ortogonale $\Leftrightarrow [A, A^*] = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. A diagonalizzabile in una base ortogonale, allora $\mathcal{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ed $\mathcal{A}^* = \text{diag}(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$; di conseguenza $[\mathcal{A}, \mathcal{A}^*] = \mathbf{O}_n$ ed A è normale. Viceversa, sia A normale e siano $A_1 = A + A^*$ ed $A_2 = \imath(A - A^*)$; evidentemente A_1 ed A_2 sono autoaggiunti ed $[A_1, A_2] = \mathbf{O}$, quindi ammettono una base ortogonale di autovettori in comune (teorema “autoaggiunti commutanti”). Allora $\mathcal{A}_1 = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{1n})$ ed $\mathcal{A}_2 = \text{diag}(a_{21}, \dots, a_{2n})$; di conseguenza $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_2 + \imath\mathcal{A}_1) = \text{diag}(\frac{1}{2}(a_{21} + \imath a_{11}), \dots, \frac{1}{2}(a_{2n} + \imath a_{1n}))$ ed A è diagonalizzabile in una base ortogonale. \square

5.1.2 Funzioni di operatori commutanti e non commutanti

A conclusione della sezione, vediamo come definire una funzione di più operatori.

Cominciamo dal caso di n operatori mutuamente commutanti: sia $\{A_1, \dots, A_n\}$ un insieme di operatori autoaggiunti t.c. $[A_k, A'_k] = \mathbf{O}$ ed $A_k = \sum_i \lambda_i^{(k)} \mathbb{P}_i^{(k)}$ la decomposizione spettrale di ognuno di essi. È immediato verificare che tutti i $\mathbb{P}_i^{(k)}$ commutano a due a due e, di conseguenza, che gli operatori

$$\mathbb{P}_{i_1, i_2, \dots, i_n} \equiv \mathbb{P}_{i_1}^{(1)} \mathbb{P}_{i_2}^{(2)} \dots \mathbb{P}_{i_n}^{(n)}, \quad (5.12)$$

soddisfano l'equazione $\mathbb{P}_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{P}_{i'_1, \dots, i'_n} = \delta_{i_1, i'_1} \dots \delta_{i_n, i'_n} \mathbb{P}_{i_1, \dots, i_n}$, ovvero sono dei *proiettori ortogonali*. Sia quindi $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di più variabili: la decomposizione spettrale degli A_k ed i proiettori (5.12) consentono di introdurre l'applicazione $\widehat{f}(A_1, \dots, A_n): \mathcal{L}^n(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ definita come

$$\widehat{f}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} f(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n}) \mathbb{P}_{i_1, i_2, \dots, i_n}. \quad (5.13)$$

Funzioni di operatori commutanti s'incontrano di frequente, specialmente in relazione alla seguente

DEFINIZIONE (INSIEME COMPLETO DI OPERATORI COMMUTANTI) - *Gli operatori autoaggiunti $\{A_1, \dots, A_n\}$ formano un **insieme completo di operatori in commutazione** (abbr. I.C.O.C.) se e solo se ogni $\mathbb{P}_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ è l'operatore nullo o proietta su un sottospazio monodimensionale.*

Operativamente, il termine I.C.O.C. viene adoperato in Meccanica Quantistica per identificare un *insieme completo di osservabili compatibili*, dove il termine “compatibile” è, in effetti, un modo pratico per affermare che gli operatori associati alle osservabili in questione commutano a due a due. Infatti, a fronte del principio di indeterminazione di Heisenberg, se due osservabili sono rappresentate da operatori commutanti, allora l'indeterminazione dell'una è indipendente dall'indeterminazione dell'altra, ovvero una misura di una delle due osservabili non ha effetti sulla misura dell'altra e viceversa (da cui il termine “compatibile”). Si intuisce, allora, l'importanza che può avere (quanto meno teoricamente) la determinazione di un I.C.O.C. per un determinato sistema fisico \mathcal{S} .

TEOREMA (I.C.O.C.) - *Gli operatori autoaggiunti $\{A_1, \dots, A_n\}$ formano un I.C.O.C. se e solo se ogni operatore $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ autoaggiunto t.c. $[A_k, B] = \mathbf{O}$ per $k = 1, \dots, n$ è funzione di $\{A_1, \dots, A_n\}$.*

Dimostrazione. $\{A_1, \dots, A_n\}$ I.C.O.C., allora per ogni scelta degli autovalori a_k esiste al più un autovettore $\mathbf{a}(i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)})$ e, per via della commutatività di $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ con ciascun A_k , si ha $B\mathbf{a}(i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)}) = b(i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)})\mathbf{a}(i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)})$. Ma $B = B^*$, quindi $b(i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)})$ definisce B come funzione $B = \sum_{i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)}} b(i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)}) \mathbb{P}_{i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(n)}} = b(A_1, \dots, A_n)$. Il viceversa è immediato. \square

Di particolare interesse in Meccanica Quantistica (specialmente in relazione alle applicazioni di Teoria dei Gruppi e di Teoria delle Rappresentazioni) sono i cosiddetti *insiemi irriducibili* di operatori.

DEFINIZIONE (INSIEMI IRRIDUCIBILI DI OPERATORI) - *L'insieme $\{A_k\}_{k=1, \dots, n}$ forma un **insieme irriducibile di operatori** se non esiste alcun sottospazio A_k -invariante.*

In questo contesto si colloca un lemma di grande utilità nella applicazioni di Teoria dei Gruppi.

LEMMA (SCHUR) - *$\{A_k\}_{k=1, \dots, n}$ irriducibile e $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ t.c. $[B, A_k] = \mathbf{O}$. Allora $B \propto \mathbf{1}$.*

Dimostrazione. Sia b un autovalore di $B \neq \mathbb{O}$ ed \mathcal{M}_b l'autospazio ad esso associato; B commuta con ciascun A_k , per cui \mathcal{M}_λ è A_k -invariante; ma $\{A_k\}_{k=1,\dots,n}$ è irriducibile e quindi $B = b\mathbb{1}$. \square

Un tipico esempio di insieme irriducibile di operatori è dato dalle matrici hermitiane $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_3$ rappresentanti gli operatori associati rispettivamente alle componenti lungo \hat{x} e \hat{z} del momento angolare \mathbf{J} di una particella con spin 1: la commutazione di $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ con $\mathcal{J}_3 = \text{diag}(1, 0, -1)$ impone la forma diagonale $\mathcal{B} = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, b_{33})$ e la commutazione con \mathcal{J}_1 la proporzionalità con la matrice identità:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_3 \quad \iff \quad b_{11} = b_{22} = b_{33}.$$

L'argomento finora esposto si complica qualora si voglia dar senso a funzioni di **operatori non commutanti**, molto frequenti nelle applicazioni in Meccanica Quantistica e Teoria dei Campi. Senza pretesa di discutere il problema nella sua generalità, riportiamo alcune formule di uso comune.

(FORMULA DI LIE) - Siano $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$: vale allora la **formula di Lie**

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n. \quad (5.14)$$

Dimostrazione. Preliminarmente, osserviamo che $A^n + B^n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k (A - B) B^{n-k-1}$. Siano quindi $S_t \equiv e^{t(A+B)}$ e $T_t \equiv (e^{tA} e^{tB})$, allora

$$\begin{aligned} \|S_t^n - T_t^n\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} S_t^k (S_t - T_t) T_t^{n-k-1} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|S_t\|^k \|S_t - T_t\| \|T_t\|^{n-k-1} \\ &\leq n \max(\|S_t\|, \|T_t\|)^{n-1} \|S_t - T_t\| \leq n \|S_t - T_t\| e^{t(\|A\| + \|B\|)}, \end{aligned}$$

dal momento che $\|S_n\|, \|T_n\| \leq e^{t(\|A\| + \|B\|)}$ ⁷⁷; d'altra parte

$$S_t - T_t = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{t^n}{n!} (A + B)^n - \sum_{n, k \in \mathbb{N}_0} \frac{t^{n+k}}{n!k!} A^n B^k = \frac{t^2}{2} [B, A] + \mathcal{O}(t^3).$$

Dunque, posto $t \equiv 1/n$, troviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} n \|S_n - T_n\| = 0$, da cui segue la (5.14). \square

(LEMMA DI HADAMARD) - Siano $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Vale allora l'**identità di Hadamard**

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B] + \frac{t^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots + \frac{t^n}{n!} \underbrace{[A, [A, \dots, [A, B] \dots]]}_{n \text{ volte}}. \quad (5.15)$$

Dimostrazione. Sviluppando gli esponenziali e raggruppandone i termini di ordine A^n , si trova ($t = 1$)

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{C_n}{n!} \quad C_n \equiv n! \left[\frac{A^n B}{n!} - \frac{A^{n-1} B A}{(n-1)!1!} + \dots + (-1)^n \frac{B A^n}{n!} \right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} B A^k.$$

Occorre dimostrare che $C_n = [A, C_{n-1}]$. Si può procedere per induzione: naturalmente $C_0 = B$ e $C_1 = [A, B]$; supposto che la (5.15) sia vera per n , per $n+1$ dev'essere $C_{n+1} = [A, C_n]$ ed infatti

$$\begin{aligned} [A, C_n] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k+1} B A^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^k A^{n-k+1} B A^k = A^{n+1} B + (-1)^{n+1} B A^{n+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] (-1)^k A^{n-k} B A^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k A^{n-k} B A^k = C_{n+1}, \end{aligned}$$

avendo adoperato la proprietà del coefficiente binomiale $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. \square

⁷⁷Si ricordi che, per operatori limitati, valgono le seguenti proprietà: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ e $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Come corollario si ha che $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ t.c. esista $\widehat{f}(B)$ vale l'identità $e^{tA}\widehat{f}(A)e^{-tA} = \widehat{f}(B + [A, B] + \dots)$. In letteratura matematica, ed in particolare in Algebra, si adopera spesso la notazione $\text{ad}_A(B) := [A, B]$, dove il simbolo "ad_A" sta ad indicare la *rappresentazione aggiunta* dell'*algebra di Lie*. In termini di tale simbolo è evidente che $\text{ad}_A^2(B) = \text{ad}_A(\text{ad}_A(B)) = [A, \text{ad}_A(B)] = [A, [A, B]] = C_2$ e quindi la relazione (5.15) si riscrive elegantemente come

$$e^{tA}Be^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \text{ad}_A^k(B)}{k!} = e^{t \text{ad}_A(B)}. \quad (5.16)$$

Consideriamo infine la seguente relazione, nota come **formula di Baker–Campbell–Hausdorff**, la quale mostra esplicitamente che se $[A, B] \neq \mathbf{0}$ allora $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

(FORMULA DI BAKER–CAMPBELL–HAUSDORFF) - Siano $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Allora

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [B, A]] - \frac{1}{24}[A, [B, [A, B]]] + \dots} \quad (5.17)$$

Dimostrazione. Non dimostriamo la formula nella sua generalità (per la quale occorrono nozioni di Teoria dei Gruppi), ma nel caso in cui A e B commutano con $[A, B]$. Sotto questa condizione la (5.17) diventa $\ln(e^A e^B) = A + B + \frac{1}{2}[A, B]$; possiamo allora adoperare la formula di Lie e l'identità di Hadamard:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} \dots e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}}}_{n \text{ volte}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(e^{\frac{kA}{n}} e^{\frac{B}{n}} e^{-\frac{kA}{n}} \right) e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{\frac{B}{n}} \prod_{k=1}^n e^{\frac{k}{n^2}[A, B]} e^A \\ &= e^B e^A \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n^2}[A, B] \sum_{k=1}^n k} = e^B e^A \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2}[A, B] - \frac{1}{2n}[A, B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A, B]}. \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri a sinistra per e^A ed a destra per e^{-A} , si trova l'espressione

$$e^A e^B e^{\frac{1}{2}[A, B]} = e^A e^{A+B} e^{-A} = e^{A+B+[A, A+B] + \dots} = e^{A+B} e^{[A, B]} \implies e^{A+B} = e^A e^B e^{\frac{1}{2}[A, B]}. \quad \square$$

Spesso si adopera la formula "duale" della (5.17), nota come **formula di Zassenhaus**:

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2!}[A, B]} e^{\frac{t^3}{3!}([A, [A, B]] + 2[B, [A, B]])} e^{-\frac{t^4}{4!}([[[A, B], A, A] + 3[A, [B, [A, B]]] + 3[[A, B], B, B])} \dots \quad (5.18)$$

Naturalmente, se A e B commutano con il proprio commutatore, la (5.17) segue banalmente dalla Baker–Campbell–Hausdorff, tuttavia la dimostrazione della formula generale non è immediata. A titolo di curiosità, si osservino i coefficienti che compaiono nella (5.16): essi sembrano essere legati ai numeri di Bernoulli. In effetti, due forme equivalenti della Baker–Campbell–Hausdorff sono le seguenti:

$$\ln(e^A e^B) = A + \left(\int_0^1 \Psi(\text{ad}_A t \text{ad}_B) dt \right) B \implies \ln(e^A e^B) = A + \frac{\text{ad}_A e^{\text{ad}_A}}{e^{\text{ad}_A} - 1} B + \mathcal{O}(B^2) \quad (5.19)$$

dove, nella prima rappresentazione, è coinvolta la funzione generatrice per i *polinomi di Bernoulli*

$$\Psi(x) \equiv \frac{x \ln x}{x-1} = 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(1-x)^n}{n(n+1)}. \quad (5.20)$$

Si noti, infine, che $\Psi(e^x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{B_n x^n}{n!}$, dove B_n indica l' n -esimo numero di Bernoulli.

Esempi

o DUE APPLICAZIONI DELLA FORMULA DI RIESZ–DUNFORD

Si determini la matrice associata ad $\widehat{f}(\sigma_1) = e^{t\sigma_1}$, dove σ_1 rappresenta la prima delle matrici di Pauli. Possiamo adoperare la formula di Riesz–Dunford; per farlo osserviamo che $\mathcal{R}_z(\sigma_1) = (z\mathbb{1}_2 - \sigma_1)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathcal{T}_z(\sigma_1))} \text{Cof}(\mathcal{T}_z(\sigma_1))^T$, dove $\text{Cof}(\mathcal{T}_z(\sigma))$ indica la *matrice dei cofattori* associata a

$\mathcal{T}_z(\sigma_1)$. Essendo $\text{Cof}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\text{Min}(A, i, j))$, dove $\text{Min}(A, i, j)$ rappresenta il minore di A ottenuto eliminando da A l' i -esima riga e la j -esima colonna, si trova che

$$\mathfrak{R}_z(\sigma_1) = \frac{1}{z^2 - 1} \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{pmatrix}.$$

Inoltre $\sigma(\sigma_1) = \mathbb{Z}_2$ ed $f(z) = e^{tz}$ è regolare ed analitica su tutto \mathbb{C} : possiamo allora scegliere come dominio \mathcal{U} il sottoinsieme di \mathbb{C} tale che $\partial\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$; in questo modo

$$e^{t\sigma_1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{e^{tz}}{z^2 - 1} \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} I_1(\sigma_1) & I_2(\sigma_1) \\ I_2(\sigma_1) & I_1(\sigma_1) \end{pmatrix}.$$

Occorre allora calcolare gli integrali

$$I_1(\sigma_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{ze^{tz}}{z^2 - 1} dz \quad I_2(\sigma_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{e^{tz}}{z^2 - 1} dz,$$

per i quali si può applicare il *teorema dei residui*⁷⁸: infatti, $z = \pm 1$ sono poli semplici di entrambe le funzioni integrande, per cui $I_1(\sigma_1) = \cos t$ ed $I_2(\sigma_1) = i \sin t$ e quindi

$$e^{t\sigma_1} = \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo, possiamo determinare la matrice associata ad $\widehat{f}(\mathcal{J}_1) = e^{t\mathcal{J}_1}$, dove

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo come prima, si trova che $\sigma(\mathcal{J}_1) = \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\}$ e dunque

$$e^{t\mathcal{J}_1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{e^{tz}}{z^3 - 2z} \begin{pmatrix} z^2 - 1 & -iz & -1 \\ iz & z^2 & -iz \\ -1 & iz & z^2 - 1 \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} I_3 - I_1 & -iI_2 & -I_1 \\ iI_2 & I_3 & -iI_2 \\ -I_1 & iI_2 & I_3 - I_1 \end{pmatrix}.$$

In tal caso, si trova che $I_1 = \frac{1}{2}[\cos(\sqrt{2}t) - 1]$, $I_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)$ ed $I_3 = \cos(\sqrt{2}t)$ ed, in definitiva,

$$e^{t\mathcal{J}_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[\cos(\sqrt{2}t) + 1] & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \frac{1}{2}[1 - \cos(\sqrt{2}t)] \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{2}[1 - \cos(\sqrt{2}t)] & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \frac{1}{2}[\cos(\sqrt{2}t) + 1] \end{pmatrix}.$$

◦ UN ANALOGO FINITO DIMENSIONALE DEL TEOREMA DI STONE

Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ autoaggiunto ed $U \equiv e^{iA}$. Proviamo che U è unitario. Un modo possibile di procedere è quello di determinare l'espressione di U^* : essendo $A = A^*$, si trova che

$$\langle e^{iA}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-i)^n}{n!} \langle \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ volte}} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-i)^n}{n!} \langle \mathbf{x}, A^n \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, e^{-iA} \mathbf{y} \rangle.$$

Pertanto $U^* = e^{-iA}$, da cui $UU^* = e^{iA}e^{-iA} = \mathbb{1} = e^{-iA}e^{iA} = U^*U$.

⁷⁸Ricordiamo che il **teorema dei residui** afferma quanto segue: se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è ovunque analitica ad eccezione di un insieme di punti singolari isolati $\{a_k\}_{k=1, \dots, n}$ e se $G \subseteq \mathcal{D}$ tale che ∂G non contiene singolarità, allora

$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k), \quad \text{Res}(f, a_k) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| = r_k\} \subseteq G} f(z) dz$$

In particolare, se a_k è un polo di ordine m , allora il residuo di f ad essa associato sarà dato dall'espressione

$$\text{Res}(f, a_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a_k)^m f(z)].$$

◦ AUTOVALORI DI UNA MATRICE TRIDIAGONALE

In molte applicazioni in Fisica, capita di imbattersi in hamiltoniani la cui componente cinetica è rappresentata da una *matrice tridiagonale*. Ad esempio, sia $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$\mathcal{T}_\lambda(\mathcal{A}) = \lambda \mathbb{1}_n - \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Si noti che \mathcal{A} è un caso particolare di matrice tridiagonale avente diagonale principale composta da zeri.) Determiniamo $\sigma(\mathcal{A})$ e per farlo indichiamo con $\Delta_n \equiv \det(\mathcal{T}_\lambda(\mathcal{A}))$: sviluppando il determinante secondo la prima riga, troviamo la seguente *equazione alle differenze finite*:

$$\Delta_n = \lambda \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \quad (5.21)$$

dove Δ_k indica il determinante associato ad una matrice avente la stessa forma di \mathcal{A} , avente ora k righe e k colonne. Come per le equazioni alle derivate ordinarie, risolviamo la (5.21) cercando soluzioni del tipo $\Delta_n = e^{n\alpha}$: sostituendo nella (5.21), si trova $e^{2\alpha} - \lambda e^\alpha + 1 = 0$ per cui $e^\alpha = \frac{1}{2}\lambda \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4}$. In definitiva, posto $\lambda = 2 \cos \theta$, si ha che $e^\alpha = e^{\pm i\theta}$ e quindi $\Delta_n = A e^{in\theta} + B e^{-in\theta}$, con $A, B \in \mathbb{C}$ da determinarsi: occorre allora risolvere il seguente “problema di Cauchy”

$$\begin{cases} \Delta_n = A e^{in\theta} + B e^{-in\theta}, \\ \Delta_1 = \lambda = 2 \cos \theta, \\ \Delta_2 = \lambda^2 - 1 = 4 \cos^2 \theta - 1 \end{cases} \implies A = \bar{B} = \frac{1}{2i \sin \theta e^{-i\theta}} \implies \Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Pertanto $\Delta_n = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{m\pi}{n+1}$ con $m = 1, 2, \dots, n$ (essendo lo spazio finito dimensionale), ovvero

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda = 2 \cos \left(\frac{m\pi}{n+1} \right), m = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Un tipico problema nel quale compaiono matrici che richiedono uno studio simile a quello appena mostrato è legato alla determinazione dei modi normali di n -oscillatori armonici unidimensionali accoppiati mediante forze elastiche ed aventi estremi fissati. In tal caso, l'hamiltoniano del sistema è $H = K + V$ dove $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m \dot{x}_i^2$ e $V = \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (x_j - x_{j-1})^2$ e le n -equazioni del moto $m \ddot{x}_i = k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$ possono essere riscritte in forma matriciale come

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \implies \ddot{\mathbf{x}} = -\Omega^2 \mathbf{x}.$$

Il sistema ammette soluzioni non banali se $\det(\Omega) = 0$ e gli autovalori appartenenti a $\sigma(\Omega)$ ed ottenuti risolvendo l'equazione caratteristica, forniscono proprio i modi normali di oscillazione $\omega_k = 2\sqrt{k/m} \sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)$ con $m = 1, 2, \dots, n$ ⁷⁹.

⁷⁹Si noti che per n molto grandi, $\sigma(\Omega)$ tende allo spettro delle frequenze di una corda di violino, ovvero a multipli interi della frequenza fondamentale $\omega \sim 2\sqrt{k/m} \frac{\pi}{n+1}$.

5.2 Teoria spettrale degli operatori lineari

In spazi infinito dimensionali, la teoria spettrale degli operatori lineari si complica rispetto al caso finito dimensionale: le proprietà dello spettro dipendono ora non solo dall'operatore, ma anche dal suo dominio di definizione, il che suggerisce di studiare separatamente classi di operatori con proprietà spettrali comuni. In questa sezione ci occuperemo di operatori lineari limitati su spazi di Hilbert⁸⁰ di dimensione arbitraria. Una prima, peculiare caratteristica è contenuta nella seguente

DEFINIZIONE (SPETTRO PUNTUALE, CONTINUO E RESIDUO) - Sia $(A, \mathcal{D}_A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ densamente definito, \mathcal{H} di Hilbert ed $\mathcal{R}_\lambda(A) = \mathcal{T}_\lambda^{-1}(A) = (A - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ il risolvente associato ad A . Diremo che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un **valore regolare** di A se \mathcal{R}_λ esiste (\mathbf{R}_1), è limitato (\mathbf{R}_2) ed è densamente definito (\mathbf{R}_3). L'insieme $\rho(A)$ dei valori regolari di A è detto **insieme risolvente** di A ed il suo complemento $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, lo **spettro** di A , è composto dai **valori spettrali** di A . Inoltre, se $\lambda \in \sigma(A)$, diremo che

- $\lambda \in \sigma_p(A)$, ovvero appartiene allo **spettro puntuale** (o **discreto**) di A , se \mathcal{R}_λ non esiste;
- $\lambda \in \sigma_c(A)$, ovvero app. allo **spettro continuo** di A , se \mathcal{R}_λ esiste, è dens.def. ma non è limitato;
- $\lambda \in \sigma_r(A)$, ovvero app. allo **spettro residuo** di A , se \mathcal{R}_λ esiste ma non è dens. definito⁸¹.

In definitiva, le condizioni precedenti possono essere riassunte nella seguente tabella.

λ appartiene a	Proprietà soddisfatte			Proprietà non soddisfatte		
$\rho(A)$	(\mathbf{R}_1)	(\mathbf{R}_2)	(\mathbf{R}_3)			
$\sigma_p(A)$				(\mathbf{R}_1)		
$\sigma_c(A)$	(\mathbf{R}_1)		(\mathbf{R}_3)		(\mathbf{R}_2)	
$\sigma_r(A)$	(\mathbf{R}_1)					(\mathbf{R}_3)

Si noti che in spazi finito dimensionali $\sigma_c(A) = \emptyset = \sigma_r(A)$; in spazi infinito dimensionali, invece, *non tutti i valori spettrali sono autovalori* dell'operatore (come mostra uno degli esempi discussi al termine della sezione). Va poi osservato che i quattro insiemi riportati in tabella sono disgiunti, ovvero

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Un motivo per la partizione $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ è dato dal fatto che $\sigma_r = \emptyset$ per la classe degli *operatori autoaggiunti* su spazi di Hilbert (vedi §5.3). Inoltre, come nel caso finito dimensionale, ad *autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti*⁸².

Spesso i valori spettrali di $\sigma_c(A)$ prendono il nome di *autovalori generalizzati*, in quanto se $\lambda \in \sigma_c(A)$, l'equazione agli autovalori $\mathcal{T}_\lambda(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ può essere approssimata a piacere, come mostra il seguente

TEOREMA (SPETTRO CONTINUO) - Sia $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Allora $\forall \lambda \in \sigma_c(A) \exists \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \|\mathbf{x}_n\| = 1$ t.c.

$$\|\mathcal{T}_\lambda(A)\mathbf{x}_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma_c(A)$, dunque $\exists \{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ t.c. $\|\mathcal{R}_\lambda(A)\mathbf{y}_n\| \geq n\|\mathbf{y}_n\|$, ovvero $\|\mathcal{T}_\lambda(A)\mathbf{w}_n\| \leq \frac{\|\mathbf{w}_n\|}{n}$, dove $\mathbf{w}_n \equiv \mathcal{T}_\lambda(A)\mathbf{y}_n$; definendo $\mathbf{x}_n \equiv \frac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}$ si trova che $\|\mathcal{T}_\lambda(A)\mathbf{x}_n\| \geq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \square

Analizziamo ora le proprietà dell'operatore risolvente; per farlo, ricorreremo nuovamente ad alcune tecniche di Analisi complessa. Tuttavia, è opportuno richiamare preliminarmente il seguente, importante

⁸⁰In realtà, tale richiesta è superflua in quanto la teoria può essere interamente sviluppata su spazi di Banach.

⁸¹Equivalentemente $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, infatti $\mathcal{D}_{\mathcal{R}_\lambda} = \mathcal{R}_{\mathcal{T}_\lambda}$ ed $\mathcal{R}_{A-\lambda\mathbf{1}}^\perp = \mathcal{N}_{A^*-\bar{\lambda}\mathbf{1}}$, per cui $\mathcal{N}_{A^*-\bar{\lambda}\mathbf{1}} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}_\lambda}^\perp \neq \emptyset$.

⁸²Infatti, se \mathbf{x}, \mathbf{x}' fossero autovettori linearmente dipendenti di A associati agli autovalori distinti λ, λ' , allora $\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{x}$ (con $\alpha \in \mathbb{C}$) e quindi $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ si avrebbe $\alpha\lambda'\mathbf{x} = \lambda'\mathbf{x}' = \lambda'\alpha\mathbf{x} = \alpha\lambda\mathbf{x} = \alpha\lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \lambda = \lambda'$, il che è assurdo.

TEOREMA (SERIE DI NEUMANN) - Sia $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Se $\|A\| < 1$, allora $(\mathbb{1} - A)^{-1} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ed

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \mathbb{1} + A + A^2 + \dots, \quad (5.22)$$

dove la convergenza delle serie è intesa rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Dimostrazione. La (5.22) è un serie di elementi di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ed, in analogia con le proprietà di convergenza delle serie geometriche, è uniformemente convergente, essendo $\|A\| < 1$. D'altra parte, l'assoluta convergenza implica la convergenza puntuale la quale, a sua volta, implica la convergenza nel senso di Cauchy e la completezza di \mathcal{H} implica la completezza di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (vedi §4.1); pertanto $\exists X(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ tale che $X(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} A^k$. Occorre dimostrare che $X(A) = (\mathbb{1} - A)^{-1}$: a tal fine basta osservare che $X(A)(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1}$ ed infatti: $X(A)(\mathbb{1} - A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^k = \mathbb{1}$. \square

In definitiva, la **serie di Neumann** (5.22) altro non è che una *serie geometrica operatoriale*.

TEOREMA (PROPRIETÀ DEL RISOLVENTE) - Sia $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ed \mathcal{H} di Hilbert. Allora

(1) $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$ il risolvete si esprime sul disco $|\lambda - \lambda_0| < \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$ mediante la serie di potenze

$$\mathcal{R}_{\lambda}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1}(A); \quad (5.23)$$

di conseguenza, la funzione $\mathcal{R}_{(\cdot)}(A) : \lambda \in \rho(A) \mapsto \mathcal{R}_{\lambda}(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ è analitica su $\rho(A)$;

(2) se $|\lambda| > \|A\|$, allora $\lambda \in \rho(A)$ ed $\mathcal{R}_{\lambda}(A)$ ammette lo sviluppo in serie di Neumann

$$\mathcal{R}_{\lambda}(A) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k; \quad (5.24)$$

(3) $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$, si ha che $[\mathcal{R}_{\lambda}(A), \mathcal{R}_{\mu}(A)] = \mathbb{O}$ e vale l'identità di Hilbert⁸³

$$\mathcal{R}_{\lambda}(A)\mathcal{R}_{\mu}(A) = \frac{\mathcal{R}_{\lambda}(A) - \mathcal{R}_{\mu}(A)}{\lambda - \mu}; \quad (5.25)$$

(4) infine, se $\lambda \in \rho(A)$ allora $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{\lambda} = \mathbb{O}$.

Dimostrazione. (1) Sia $\lambda_0 \in \rho(A)$, quindi $\mathcal{R}_{\lambda_0}(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Sia allora la serie di elementi di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^k(A).$$

Un ragionamento analogo a quello seguito per dimostrare la convergenza della serie di Neumann, permette di concludere che la serie precedente converge uniformemente rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ se e solo se $|\lambda - \lambda_0| \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)\| < 1$, essendo $\|\mathcal{R}_{\lambda_0}^k(A)\| \leq \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)\|^k$. Sia quindi $\mathcal{X}_{\lambda}(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ tale che

$$\mathcal{X}_{\lambda}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1}(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)\|^{-1}.$$

⁸³Si noti che l'identità (5.25) differisce dalla (5.4) a meno di un segno, dovuto alla definizione di risolvete adoperata.

Verifichiamo che $\mathcal{R}_\lambda(A) = \mathcal{R}_\lambda(A) \mathcal{T}_\lambda(A)$ e, per farlo, calcoliamo $\mathcal{X}_\lambda(A) \mathcal{T}_\lambda(A)$. Tenendo conto della continuità della moltiplicazione rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\lambda(A) \mathcal{T}_\lambda(A) &= \left(\mathcal{R}_{\lambda_0}(A) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1}(A) \right) [\mathcal{T}_{\lambda_0}(A) - (\lambda - \lambda_0) \mathbb{1}] \\ &= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^k(A) - (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_{\lambda_0}(A) - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k+1} \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1}(A) = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

In definitiva, $\mathcal{R}_\lambda(A) : \rho(A) \rightarrow B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ammette la rappresentazione (5.23), ovvero si sviluppa in serie di potenze di $(\lambda - \lambda_0)$ in un intorno di ciascun $\lambda_0 \in \rho(A)$: $\mathcal{R}_\lambda(a)$ è quindi analitica su $\rho(A)$.

(2) Se $\lambda \neq 0$, l'operatore risolvente può essere sviluppato in serie di Neumann nel modo seguente:

$$\mathcal{R}_\lambda(A) = (A - \lambda \mathbb{1})^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^k.$$

Ma $|\lambda| > \|A\|$, quindi la (5.24) converge ed $\mathcal{R}_\lambda(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (th. "serie di Neumann") ovvero $\lambda \in \rho(A)$.

(3) Procedendo come per il caso finito dimensionale, troviamo ora che $\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}_\mu \mathcal{R}_\mu - \mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}_\lambda \mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_\lambda (\mathcal{T}_\mu - \mathcal{T}_\lambda) \mathcal{R}_\mu = (\lambda - \mu) \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_\mu$. La stessa identità di Hilbert mostra che \mathcal{R}_λ ed \mathcal{R}_μ commutano.

(4) La convergenza è in norma, per cui, preso $\eta \in \mathbb{R}$ t.c. $|\lambda| > \eta > \|A\|$ ed essendo $\frac{\|A\|}{\eta} \in \mathbb{R}$, si trova

$$\|\mathcal{R}_\lambda(A)\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})} = \left\| -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^k \right\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})}}{\eta} \right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})}}{\eta}} \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Il punto (1) del teorema⁸⁴ ha notevole rilevanza, essendo la chiave per l'applicazione dell'Analisi Complessa alla Teoria Spettrale. Per suo merito, infatti, si dimostra banalmente il contenuto del seguente

TEOREMA (SPETTRO DI OPERATORI LIMITATI) - Sia $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ed $\mathcal{H} \neq \emptyset$ di Hilbert. Allora:

- (a) $\sigma(A) \neq \emptyset$; (b) $\rho(A)$ è aperto, per cui $\sigma(A)$ è chiuso; (c) $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$.

Dimostrazione. (a) Per cominciare, si noti che se $A = \mathbf{0}$, $\sigma(A) = \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$; sia quindi $A \neq \mathbf{0}$ e, per assurdo, $\sigma(A) = \emptyset$. In tal caso $\rho(A) = \mathbb{C}$ ed \mathcal{R}_λ è analitica e limitata (punto (4), "proprietà del risolvente") su tutto \mathbb{C} . Dunque, per il *teorema di Liouville* (ogni funzione analitica e limitata su \mathbb{C} è una costante) la funzione \mathcal{R}_λ è identicamente nulla sull'intero piano complesso. Ma $\mathcal{R}_0(A) = A^{-1}$ ed $A^{-1} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ esiste (teorema di Banach dell'inverso limitato, vedi §4.1) e ciò è assurdo.

(b) Dalla (5.23) segue che se $\lambda_0 \in \rho(A)$, tutti i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $|\lambda - \lambda_0| < \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$ appartengono all'insieme risolvente, per cui $\rho(A)$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ è chiuso.

(c) Secondo la proprietà (3) del risolvente, $\mathcal{R}_\lambda(A)$ si sviluppa in serie di Neumann $\Leftrightarrow |\lambda| > \|A\|$ ed, in tal caso, $\lambda \in \rho(A)$. Pertanto $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\}$ mentre $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$. \square

⁸⁴Una strategia alternativa (ed elegante) di dimostrare la rappresentazione (5.23) fa uso dell'identità di Hilbert. Infatti, dati $\lambda, \lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda \neq \lambda_0$, è $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_{\lambda_0}$, iterando la quale troviamo $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_{\lambda_0} = \mathcal{R}_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) [\mathcal{R}_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_{\lambda_0}] \mathcal{R}_{\lambda_0} = \mathcal{R}_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{R}_{\lambda_0}^2 + (\lambda - \lambda_0)^2 \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_{\lambda_0} = \dots$. Al passo n -esimo avremo

$$\mathcal{R}_\lambda = \sum_{k=0}^n (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1} + (\lambda - \lambda_0)^{n+1} \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_{\lambda_0}^{n+1}.$$

Tenendo presente che la convergenza è rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ e che $\|\mathcal{R}_\lambda\| = \delta \in \mathbb{R}$, si trova quanto cercato, ovvero:

$$\left\| \mathcal{R}_\lambda - \sum_{k=0}^n (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1} \right\| \leq |\lambda - \lambda_0|^{n+1} \|\mathcal{R}_\lambda\| \|\mathcal{R}_{\lambda_0}\|^{n+1} = \delta (|\lambda - \lambda_0| \|\mathcal{R}_{\lambda_0}\|)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |\lambda - \lambda_0| < \|\mathcal{R}_{\lambda_0}\|^{-1}.$$

Abbiamo così scoperto che lo spettro di un operatore lineare limitato è un sottoinsieme *compatto* di \mathbb{C} ed in particolare, che *giace su un disco centrato nell'origine di raggio $\leq \|A\|$* . Sembra naturale domandarsi quale sia il *disco minimo* contenente l'intero spettro, il che suggerisce la seguente

DEFINIZIONE (RAGGIO SPETTRALE) - $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Il **raggio spettrale** $r_\sigma(A)$ di A è definito come

$$r_\sigma(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \{ |\lambda| \}. \quad (5.26)$$

La serie di Neumann (5.24) consente di dimostrare il seguente risultato (I. Gelfand, 1941).

(FORMULA DI GELFAND PER IL RAGGIO SPETTRALE) - $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Vale la **formula di Gelfand**

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}. \quad (5.27)$$

In particolare, se $A^*A = AA^*$ (quindi, se $A = A^*$ ed $A^* = A^{-1}$), allora $\|A^2\| = \|A\|^2$ ed $r_\sigma(A) = \|A\|$.

Dimostrazione. Proviamo che il limite (5.27) esiste e che $\nu \equiv \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\|A^n\|^{1/n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$. Per definizione, $\nu \leq \|A^n\|^{1/n} \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero $\nu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$; d'altra parte $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $\|A^m\|^{1/m} < \nu + \varepsilon$ per cui, posto $n = mp + q$, con $0 \leq q \leq m - 1$ e $\forall n > m$, si trova che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^{mp+q}\|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^m\|^{p/n} \|A\|^{q/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\nu + \varepsilon)^{mp/n} \|A\|^{q/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu + \varepsilon,$$

in quanto, ad m fisso e per $n \rightarrow \infty$, risultano essere $q/n \rightarrow 0$ e $pm/n \rightarrow 1$. Data l'arbitrarietà di ε , otteniamo che $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \geq \nu$; in definitiva

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \nu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n},$$

ovvero il limite esiste ed è tale per cui $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$. Si osservi ora che la serie di Neumann $\mathcal{R}_\lambda(A) = -\kappa \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \kappa^n A^n$, dove $\kappa \equiv \lambda^{-1}$ è convergente se lo è la serie numerica $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |c_n| |\kappa|^n$ (essendo la convergenza intesa rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$). Allora, secondo il *teorema di Hadamard*, la serie converge assolutamente se e solo se $|\kappa| < r$ e cioè $|\lambda| > \frac{1}{r}$, ed r è dato dalla *formula di Hadamard*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Dobbiamo allora dimostrare che $\frac{1}{r} = r_\sigma(A)$. Sappiamo che la serie di Neumann converge uniformemente se e solo se $|\lambda| > r_\sigma(A)$, dunque il raggio di assoluta convergenza $\frac{1}{r}$ non può essere più piccolo del raggio spettrale. D'altronde $\mathcal{R}_\lambda(A)$ è analitica su $\rho(A)$ ed $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \rho(A)\} \subseteq \rho(A)$, dunque $\frac{1}{r}$ non può essere maggiore di $r_\sigma(A)$. Pertanto $\frac{1}{r} = r_\sigma(A)$ e ciò completa la dimostrazione della (5.27). Sia ora A normale: allora $\|A^2\| = \|A^*A\|$ (vedi §4.2) e quindi $\|A^2\|^2 = \|(A^2)^*A^2\| = \|(A^*A)(A^*A)\| = \|(A^*A)^*(A^*A)\| = \|A^*A\|^2 = (\|A\|^2)^2$. Dalla precedente⁸⁵ segue che, in generale, $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$: dunque $r_\sigma(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{2^k}\|^{1/2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|$, ovvero $r_\sigma(A) = \|A\|$. \square

Inoltre, si noti che $\mathcal{R}_\lambda^*(A) = \mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A^*)$ (vedi (4.4)) e quindi $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \sigma(A)\} = \overline{\sigma(A)}$.

TEOREMA ($\sigma(A)$ VS $\sigma(A^*)$) - Sia $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Allora $\sigma(A) = \sigma(A^*)$ e $\sigma_r(A) = \overline{\sigma_p(A^*)}$.

Dimostrazione. (i) Se $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, allora $A^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ con $\|A\| = \|A^*\|$, per cui $\sigma(A) = \sigma(A^*)$. (ii) Sia $\lambda \in \sigma_r(A)$, quindi $(\mathcal{R}_{A-\lambda\mathbb{1}})^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$; d'altra parte $(\mathcal{R}_{A-\lambda\mathbb{1}})^\perp = \mathcal{N}_{A^*-\bar{\lambda}\mathbb{1}}$, dunque $\exists \mathbf{a} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, t.c. $A^*\mathbf{a} = \bar{\lambda}\mathbf{a}$; pertanto $\sigma_r(A) \subseteq \overline{\sigma_p(A^*)}$. Ragionando specularmente, si trova che $\sigma_r(A) \supseteq \overline{\sigma_p(A^*)}$. \square

Come corollario, dalla (ii) e dalla proprietà di involutività (4.3), segue che $\sigma_r(A^*) = \overline{\sigma_p(A^{**})} = \overline{\sigma_p(A)}$.

⁸⁵L'identità $\|A^2\| = \|A\|^2$, valida per $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ normale, trae origini dal fatto che $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ presenta una struttura naturale di C^* -algebra rispetto all'operazione di coniugazione hermitiana (vedi App.A per una breve digressione).

Esempi

◦ PROPRIETÀ SPETTRALI DELL'OPERATORE IDENTITÀ

Sia $\mathbb{1}$ l'operatore identità di \mathcal{H} . Evidentemente $\mathcal{R}_\lambda(\mathbb{1}) = (1-\lambda)^{-1}\mathbb{1}$, dunque $\mathcal{R}_\lambda(\mathbb{1})$ esiste, è limitata ed è analitica su tutto \mathbb{C} , ad eccezione del punto $\lambda = 1$, ovvero $\rho(\mathbb{1}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e $\sigma_p(\mathbb{1}) = \{1\}$.

◦ PROPRIETÀ SPETTRALI DEGLI OPERATORI DI SHIFT IN ℓ_2

Sia (S, \mathcal{H}) l'operatore di shift destro su un Hilbert \mathcal{H} separabile. Sappiamo che $\mathcal{N}_S = \{\mathbf{0}\}$ ed $\mathcal{R}_S = \{\mathbf{e}_1\}^\perp$, ovvero S è iniettivo ma non suriettivo (vedi §4.5); inoltre, l'aggiunto S^* corrisponde all'operatore di shift sinistro, per cui $\mathcal{N}_{S^*} = (\mathcal{R}_S)^\perp = \{\mathbf{e}_1\}$ e $\mathcal{R}_{S^*} = (\mathcal{N}_S)^\perp = \mathcal{H}$, ovvero S^* è suriettivo ma non iniettivo. Si noti che S non è unitario, tuttavia $S^{-1} = S^*$ su \mathcal{R}_S .

Per semplicità, ribattezziamo $S_R \equiv S$ ed $S_L \equiv S^*$; scelto $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{R})$, studiamo le proprietà spettrali dei due operatori. Preliminarmente, si osservi che $\sigma(S_R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \sigma(S_L)$; determiniamo quindi gli spettri puntuali dei due operatori. Cominciamo con $\sigma_p(S_R)$: preso $\mathbf{a} \in \ell_2(\mathbb{R})$, si consideri l'equazione agli autovalori $\mathcal{T}_\lambda(S_R)\mathbf{a} = \mathbf{0}$, dalla quale si trova che

$$\lambda a_1 = 0, \quad a_1 = \lambda a_2, \quad a_2 = \lambda a_3, \quad \dots$$

Naturalmente $\lambda = 0$ non è autovalore, essendo $\mathcal{N}_{S_R} = \{\mathbf{0}\}$, per cui se $\lambda \neq 0$ dev'essere $a_1 = a_2 = \dots = 0$, ovvero $\mathbf{a}_\lambda = \mathbf{0}$. Per definizione, $\mathbf{a}_\lambda = \mathbf{0}$ non è autovettore, dunque $\sigma_p(S_R) = \emptyset$. Sia ora $\mathcal{T}_\lambda(S_L)\mathbf{a} = \mathbf{0}$: allora $(a_2, a_3, \dots) = \lambda(a_1, a_2, \dots)$, per cui $a_{n+1} = \lambda a_n = a_1 \lambda^n$ ed $\mathbf{a}_\lambda = a_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$ è autovalore di S_L se e solo se $\mathbf{a}_\lambda \in \ell_2(\mathbb{R})$, ovvero

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |a_1|^2 |\lambda^k|^2 = \|a_1\|^2 \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (|\lambda|^2)^k = \frac{|a_1|^2}{1 - |\lambda|^2} < \infty \quad \iff \quad |\lambda| < 1.$$

Quindi $\sigma_p(S_L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Resta da chiarire cosa accade su $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Il teorema “ $\sigma(A)$ vs $\sigma(A^*)$ ” risponde al problema: infatti, nel caso in questione, si ha che $\sigma_r(S_R) = \overline{\sigma_p(S_L)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \sigma_p(S_L)$ e $\sigma_r(S_L) = \overline{\sigma_p(S_R)} = \emptyset$; quindi, per esclusione, devon'essere $\sigma_c(S_R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \sigma_c(S_L)$. In definitiva:

$$\begin{aligned} \sigma_r(S_R) &= \sigma_p(S_L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(S_R) &= \sigma_c(S_L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \\ \sigma_r(S_R) &= \sigma_p(S_L) = \emptyset. \end{aligned}$$

◦ PROPRIETÀ SPETTRALI DELL'OPERATORE DI MOLTIPLICAZIONE SU $L_2([a, b])$

Sappiamo che $(\mathbf{q}, L_2([a, b]))$ è un operatore limitato. Sia quindi $\psi \in L_2([a, b])$ ed

$$\{[\mathcal{R}_z(\mathbf{q})]\psi\}(x) = [(\mathbf{q} - z\mathbb{1})^{-1}\psi](x) = \frac{\psi(x)}{x - z}$$

il risolvente di \mathbf{q} . Per $z \notin [a, b]$ il risolvente è ben definito e limitato: infatti $\forall \psi \in L_2([a, b])$ si ha che $(\mathbf{q} - z\mathbb{1})^{-1}\psi \in L_2([a, b])$, quindi $\mathcal{D}_{\mathcal{R}_z \notin [a, b]}(\mathbf{q}) = L_2([a, b])$, e vale la disuguaglianza

$$\|[\mathcal{R}_z \notin [a, b]}(\mathbf{q})\psi\|_{L_2([a, b])}^2 = \int_a^b \left| \frac{\psi(x)}{x - z} \right|^2 dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{|x - z|^{-2}\} \|\psi\|_{L_2([a, b])}^2 < \infty.$$

Dunque $\rho(\mathbf{q}) = \mathbb{C} \setminus [a, b]$ e $\sigma(\mathbf{q}) = [a, b]$. Mostriamo che $\sigma(\mathbf{q}) = \sigma_c(\mathbf{q})$. Per cominciare si noti che se $z \in [a, b]$, allora $\mathcal{D}_{\mathcal{R}_z \in [a, b]}(\mathbf{q}) = \{\psi \in L_2([a, b]) : (\mathbf{q} - z\mathbb{1})^{-1}\psi \in L_2([a, b])\}$ e si può dimostrare che $\mathcal{D}_{\mathcal{R}_z \in [a, b]}(\mathbf{q})$ è denso in $L_2([a, b])$; occorre verificare che $(\mathbf{q}, \mathcal{D}_{\mathcal{R}_z \in [a, b]}(\mathbf{q}))$ non è limitato. Per farlo, ricorriamo al teorema “spettro continuo”: sia $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni della forma

$$\psi_n(x) \equiv \sqrt{n}\theta(2n|x - z| \leq 1) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } |x - z| \leq \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{altrove;} \end{cases}$$

evidentemente $\psi_n \in L_2([a, b]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, in quanto $\|\psi_n\|_{L_2([a, b])} = 1$. Si trova banalmente che

$$\|[\mathcal{T}_z(\mathbf{q})]\psi_n\|_{L_2([a, b])}^2 = \int_a^b |[(\mathbf{q} - z\mathbf{1})\psi_n](x)|^2 dx = n \int_{z-\frac{1}{2n}}^{z+\frac{1}{2n}} (x-z)^2 dx = \frac{1}{12n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

essendo $z \in [a, b]$. Pertanto $\sigma_c(\mathbf{q}) = [a, b]$ e $\sigma_p(\mathbf{q}) = \emptyset = \sigma_r(\mathbf{q})$.

Si osservi che $\mathcal{R}_z(\mathbf{q}) : \mathbb{C} \rightarrow B(L_2([a, b]), L_2([a, b]))$ è analitica su tutto il piano complesso, con un taglio in corrispondenza dello spettro continuo (l'intervallo reale $[a, b]$) ed è possibile calcolarne la discontinuità. Infatti $\forall \psi, \phi \in C^0([a, b])$ e per un dato $z_0 \in [a, b]$, si trova che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \langle \psi, [\mathcal{R}_{z_0+i\varepsilon}(\mathbf{q})]\phi \rangle_{L_2([a, b])} - \langle \psi, [\mathcal{R}_{z_0-i\varepsilon}(\mathbf{q})]\phi \rangle_{L_2([a, b])} \} = 2\pi i \bar{\psi}(z_0)\phi(z_0).$$

o PROPRIETÀ SPETTRALI DELL'OPERATORE IMPULSO SU $L_2([a, b])$

Sebbene $(\mathbf{p}, L_2([a, b]))$ non sia un operatore limitato, è possibile studiarne le proprietà spettrali senza ricorrere a speciali artifici. Per semplicità, sia $\mathbf{p}_0 \equiv (\mathbf{p}, \mathbb{H}_0^1([a, b]))$ e $\psi \in \mathbb{H}_0^1([a, b])$: il risolvente è determinato dalla soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine

$$\psi'(x) - iz\psi(x) = i\phi(x) \quad \implies \quad \{[\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0)]\phi\}(x) = Ae^{izx} + i \int_a^x \phi(y)e^{iz(x-y)} dy, \quad (5.28)$$

dove $A \in \mathbb{C}$ è una costante da determinarsi imponendo le condizioni al contorno e $\phi \in L_2([a, b])$. In particolare, se $\psi \in \mathbb{H}_0^1([a, b])$, e cioè se $\psi(a) = 0 = \psi(b)$, si trova $A = 0$ e

$$\int_a^b e^{-izy} \phi(y) dy = \langle e^{izy}, \phi \rangle_{L_2([a, b])} = 0 \quad \iff \quad e^{izy} \in \mathcal{R}_{\mathcal{T}_z}^\perp(\mathbf{p}_0), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Quindi $\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0) = i \int_a^x \phi(y)e^{iz(x-y)} dy$ esiste ma non è densamente definito, per cui $\sigma(\mathbf{p}_0) = \sigma_r(\mathbf{p}_0) = \mathbb{C}$. Sia ora $\mathbf{p}_0^- \equiv (\mathbf{p}, \mathbb{H}_{0,-}^1([a, b]))$ dove $\mathbb{H}_{0,-}^1([a, b]) = \{\psi \in \mathbb{H}^1([a, b]) : \psi(b) = 0\}$: allora

$$\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0^-) = i \int_a^x \phi(y)e^{iz(x-y)} dy - i \int_a^b \phi(y)e^{iz(x-y)} dy$$

essendo

$$\int_a^b e^{-izy} \phi(y) dy = \langle e^{izy}, \phi \rangle_{L_2([a, b])} = iA \quad \implies \quad \mathcal{R}_{\mathcal{T}_z}^\perp(\mathbf{p}_0^-) = \{\mathbf{0}\},$$

ovvero $\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0^-)$ è densamente definito. Inoltre $\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0^-)$ è limitato $\forall z \in \mathbb{C}$: infatti, indicando con $\kappa \equiv \max_{x \in [a, b]} \{|\phi(x)|\}$ si ha che $|\{[\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0^-)]\phi\}(x)| \leq 2 \int_{[a, b]} |\phi(x)| dx \leq 2\kappa(b-a)$ e quindi

$$\|\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0^-)\|_{B(L_2, L_2)} = \sup_{\psi \in L_2([a, b])} \frac{\|[\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_0^-)]\phi\|_{L_2([a, b])}}{\|\phi\|_{L_2([a, b])}} \leq \frac{2\kappa(b-a)^{3/2}}{\|\phi\|_{L_2([a, b])}} < \infty.$$

Pertanto $\rho(\mathbf{p}_0^-) = \mathbb{C}$ e lo spettro è vuoto. Analoghe conclusioni si ottengono scegliendo come dominio $\mathbb{H}_{0,+}^1([a, b]) \equiv \{\psi \in \mathbb{H}^1([a, b]) : \psi(a) = 0\}$. Si considerino ora le estensioni $\mathbf{p}_{per} \equiv (\mathbf{p}, \mathcal{D}_{per}^0)$ e $\mathbf{p}_{per}^\theta \equiv (\mathbf{p}, \mathcal{D}_{per}^\theta)$ (vedi esempi §4.4). Imponendo nella (5.28) la condizione $\psi(a) = \psi(b)$, si trova

$$\{[\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_{per})]\phi\}(x) = \frac{i}{e^{iz(a-b)} - 1} \int_a^b \phi(y)e^{iz(x-y)} dy + i \int_a^x \phi(y)e^{iz(x-y)} dy,$$

per cui il risolvente esiste, è limitato ed è densamente definito se e solo se $e^{iz(a-b)} \neq 1$, ovvero se e solo se $z(b-a) = 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$; dunque $\sigma_p(\mathbf{p}_{per}) = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{2n\pi}{b-a}, n \in \mathbb{Z}\}$. Invece, imponendo nella (5.28) le condizioni al contorno $\psi(b) = e^{i\theta}\psi(a)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, risulta essere

$$\{[\mathcal{R}_z(\mathbf{p}_{per}^\theta)]\phi\}(x) = \frac{ie^{izx}}{1 - e^{i[\theta+iz(b-a)]}} \int_a^b \phi(y)e^{-izy} dy + i \int_a^x \phi(y)e^{iz(x-y)} dy,$$

quindi $\sigma_p(\mathbf{p}_{per}^\theta) = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{2n\pi - \theta}{b-a}, n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 2\pi)\}$.

◦ TEOREMA DI WINTNER E REGOLA DI COMMUTAZIONE CANONICA.

Due operatori (A, \mathcal{D}_A) e (B, \mathcal{D}_B) densamente definiti su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} infinito dimensionale, si dicono **operatori canonici** se soddisfano la *regola di commutazione canonica*⁸⁶ $[A, B] = c\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, dove $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ indica l'identità su \mathcal{H} e $c \in \mathbb{C}$. In particolare, \mathfrak{q} e \mathfrak{p} sono canonici, infatti

$$[\mathfrak{p}(\mathfrak{q}\psi)](x) = -i\psi(x) - ix\psi'(x) = -i(\mathbb{1}_{\mathcal{H}}\psi)(x) + [\mathfrak{q}(\mathfrak{p}\psi)](x) \iff [\mathfrak{q}, \mathfrak{p}] = i\mathbb{1}_{\mathcal{H}},$$

essendo $\psi \in \mathcal{H}$ (torneremo tra breve su alcuni dettagli relativi a questa regola di commutazione). Dagli esempi finora discussi, emerge che gli operatori \mathfrak{q} e \mathfrak{p} non sono simultaneamente limitati sugli spazi $L_2([a, b])$ ed $L_2(\mathbb{R})$. In realtà, tale proprietà ha carattere generale, come mostra il seguente

TEOREMA (WINTNER) - *Gli operatori canonici non possono essere entrambi limitati.*

Dimostrazione 1. Siano $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ canonici: dalla regola di commutazione segue che

$$[A, B^n] = B[A, B^{n-1}] + [A, B]B^{n-1} = B[A, BB^{n-2}] + cB^{n-1} = \dots \implies [A, B^n] = ncB^{n-1}.$$

Per assurdo, siano $A, B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$: poiché $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ e $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, si ha

$$n|c|\|B^{n-1}\| = \|[A, B^n]\| \leq 2\|A\|\|BB^n\| \leq 2\|A\|\|B\|\|B^{n-1}\| \iff \|A\|\|B\| \geq \frac{n}{2}|c|.$$

Ma $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, per cui se A è limitato non può esserlo B e viceversa, il che è assurdo. \square

Dimostrazione 2. Per assurdo, siano $AB, BA \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Proviamo che $A^{-1} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$: se $0 \in \rho(A)$, allora $A^{-1} = \mathcal{R}_0(A)$ esiste, è densamente definito ed è limitato; se invece $0 \notin \rho(A)$, si può considerare l'operatore $A + z\mathbb{1}$, il quale soddisfa la relazione $\|A + z\mathbb{1}\|\mathbf{x}\| \geq \delta\|\mathbf{x}\|$ (con $\delta \in \mathbb{R}^+$), per z sufficientemente grande, ovvero $A + z\mathbb{1}$ ammette inverso limitato (teorema dell'inverso limitato, §4.1) e di conseguenza A^{-1} esiste limitato. Dunque, ha senso la seguente relazione

$$\mathcal{T}_z(AB) = A(BA - z\mathbb{1})A^{-1} = A\mathcal{T}_z(BA)A^{-1} \iff \mathcal{R}_z(AB) = A\mathcal{R}_z(BA)A^{-1}.$$

Pertanto $\sigma(AB) = \sigma(BA)$; ma A e B sono canonici, quindi $\sigma(BA) = \sigma(AB - i\mathbb{1})$, per cui se $z \in \sigma(AB)$, allora $(z - i) \in \sigma(AB)$ ed, in generale, $(z - in) \in \sigma(AB) \forall n \in \mathbb{N}$ il che è assurdo. \square

Il teorema di Wintner mette in risalto alcuni problemi relativi all'espressione $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = i\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$. Per cominciare, l'operatore identità $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ è limitato, mentre il commutatore non lo è (teorema di Wintner); inoltre, poiché gli operatori \mathfrak{q} e \mathfrak{p} sono usualmente *chiusi* rispetto agli spazi di Hilbert di interesse fisico, il loro commutatore non può essere ovunque definito (teorema del grafico chiuso, vedi §4.2), mentre $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ è ovunque definito. Pertanto, la regola di commutazione canonica tra gli operatori \mathfrak{q} e \mathfrak{p} è **mal definita** e dev'essere correttamente riformulata nel modo seguente:

$$[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}] \subset i\mathbb{1}_{\mathcal{H}}. \tag{5.29}$$

In altre parole, il commutatore è definito su un sottospazio denso di \mathcal{H} . Data l'ignoranza del dominio $\mathcal{D}_{[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}]} = \mathcal{D}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$, l'espressione (5.29) risulta poco trattabile e rende difficile formalizzare coerentemente la struttura dinamica della Meccanica Quantistica. Per ovviare a quest'inconveniente, H. Weyl pensò di dare una veste "esponenziata" alla regola di commutazione canonica, svelando con quest'idea una profonda connessione tra la *dinamica di un sistema quantistico* e *l'algebra dei gruppi di simmetria ad esso associati* (vedi App. ?? per alcuni approfondimenti).

⁸⁶Si noti che $[A, B] = c\mathbb{1}$ non può valere su spazi finito dimensionali, in quanto $0 = \text{Tr}([A, B]) = c\text{Tr}(\mathbb{1}) = cn$.

5.2.1 Teoria spettrale degli operatori lineari non limitati

Riassumiamo le proprietà relative allo spettro di operatori lineari non limitati, ma densamente definiti.

Sia (A, \mathcal{D}_A) lineare e densamente definito in \mathcal{H} . Cominciamo con l'osservare che la definizione di spettro resta invariata⁸⁷: l'insieme risolvente, infatti, è individuato dal sottoinsieme

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}_\lambda(A) \equiv \mathcal{T}_\lambda^{-1}(A) := (A - \lambda \mathbb{1})^{-1} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})\},$$

quindi $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ e $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\|\mathcal{T}_\lambda(A)\mathbf{x}\| \geq \delta\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ (teorema dell'inverso limitato, §4.1). Inoltre, anche in questo caso lo spettro si ripartisce come

$$\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r, \quad \sigma_c \cap \sigma_p = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_c \cap \sigma_r = \emptyset,$$

e le definizioni di spettro continuo, puntuale e residuo restano invariate. Naturalmente, vale ancora la proprietà secondo la quale ad *autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti*.

Riguardo le proprietà del risolvente, occorre fare alcune distinzioni rispetto al caso di operatori limitati. Come è immediato verificare, $\mathcal{R}_\lambda(A)$ soddisfa ancora l'identità di Hilbert e, conseguentemente, $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$ può essere rappresentata sul disco $|\lambda - \lambda_0| < \|\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^{-1}$ mediante la serie di potenze

$$\mathcal{R}_\lambda(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}_{\lambda_0}^{k+1}(A)$$

(si dimostra esattamente come nel caso degli operatori limitati). Pertanto $\mathcal{R}_\lambda(A) : \mathbb{C} \rightarrow B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ è *analitica* sul risolvente $\rho(A)$, il quale è ancora un sottoinsieme *aperto* del piano complesso. Tuttavia, $\mathcal{R}_\lambda(A)$ *non ammette più sviluppo in serie di Neumann* e quindi non vale più la proprietà $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\lambda(A) = \mathbf{0}$ (essendo il limite inteso rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$). Da queste ultime osservazioni discende naturalmente che $\sigma(A)$ è *chiuso, può esser vuoto* ed, in generale, *non limitato*⁸⁸. Infine, vale il seguente

TEOREMA ($\sigma_p(A)$ vs $\sigma_r(A^*)$ e $\sigma_r(A)$ vs $\sigma_p(A^*)$) - Sia (A, \mathcal{D}_A) densamente definito su \mathcal{H} . Allora

$$(a) \quad \overline{\sigma_r(A)} = \sigma_p(A^*), \quad (b) \quad A \text{ chiudibile} \Rightarrow \overline{\sigma_r(A^*)} = \sigma_p(\bar{A}). \quad (5.30)$$

Dimostrazione. (a) Sia $\bar{\lambda} \in \sigma_r(A)$, allora $\{\mathbf{0}\} \neq (\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A))^\perp = \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(A^*)$, essendo \mathcal{D}_A denso in \mathcal{H} ; per cui $\lambda \in \sigma_p(A^*)$ ovvero $\overline{\sigma_r(A)} \subseteq \sigma_p(A^*)$. Invertendo il ragionamento si trova che $\overline{\sigma_r(A)} \supseteq \sigma_p(A^*)$. (b) Se A è chiudibile, allora $\bar{\mathcal{D}}_{A^*} = \mathcal{H}$ ed in tal caso $(A^*)^* = \bar{A}$ (vedi §4.3). Essendo \mathcal{D}_{A^*} denso in \mathcal{H} , vale l'identità $(\mathcal{R}_{A^*})^\perp = \mathcal{N}_A$ per cui, procedendo come in (a), si trova che $\overline{\sigma_r(A^*)} = \sigma_p(A^{**}) = \sigma_p(\bar{A})$. \square

Si noti che, se (A, \mathcal{D}_A) è densamente definito e chiuso, allora $\overline{\sigma_r(A)} = \sigma_p(A^*)$ ed $\overline{\sigma_p(A)} = \sigma_r(A^*)$.

Dal confronto tra operatori lineari limitati e densamente definiti emerge la seguente tabella.

$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ è limitato	$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ non è limitato ma \mathcal{D}_A è denso in \mathcal{H}
$\forall \lambda \in \rho(A) \quad \mathcal{R}_\lambda(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$	$\forall \lambda \in \rho(A) \quad \mathcal{R}_\lambda(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$
$\forall \lambda \in \rho(A) \quad \mathcal{R}_\lambda(A)$ è analitica	$\forall \lambda \in \rho(A) \quad \mathcal{R}_\lambda(A)$ è analitica
$\rho(A)$ è aperto	$\rho(A)$ è aperto
$\sigma(A)$ è non vuoto e compatto	$\sigma(A)$ può esser vuoto e non limitato
$\mathcal{R}_\lambda(A)$ ammette sviluppo di Neumann	$\mathcal{R}_\lambda(A)$ non ammette sviluppo di Neumann
$\sigma_p(A^*) = \sigma_r(A)$ e $\sigma_p(A) = \sigma_r(A^*)$	$\sigma_p(A^*) = \sigma_r(A)$ e se $A = \bar{A}$ allora $\sigma_p(A) = \sigma_r(A^*)$

⁸⁷Per semplicità di notazione, nelle espressioni che verranno indicheremo la dipendenza da (A, \mathcal{D}_A) semplicemente con A , tenendo però presente che le proprietà degli oggetti in questione dipendono anche dalla scelta del dominio \mathcal{D}_A .

⁸⁸Ciò non deve sorprendere; si ricordi lo spettro di $(\mathbf{p}, L_2([a, b]))$: avevamo dimostrato che $\sigma(\mathbf{p}_0^-) = \emptyset = \sigma(\mathbf{p}_0^+)$ e che $\sigma(\mathbf{p}_{per}^0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = (2\pi n - \theta)/(b - a), n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 2\pi)\}$, rispettivamente esempi di spettro vuoto e non limitato.

5.2.2 Proprietà spettrali degli operatori unitari, autoaggiunti e normali

Nel §5.1.1 abbiamo studiato le proprietà spettrali degli operatori unitari, autoaggiunti e normali in spazi di Hilbert finito dimensionali (isomorfi a \mathbb{C}^n , una volta fissata in essi una base); vediamo cosa accade se \mathcal{H} ha dimensione arbitraria. Preliminarmente, ridefiniamo il concetto di operatore normale.

DEFINIZIONE (OPERATORI NORMALI) - Sia (A, \mathcal{D}_A) , $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$ ed $A = \overline{A}$. A è **normale** se $[A, A^*] = \mathbf{0}$.

Si noti che la condizione $[A, A^*] = \mathbf{0}$ va intesa su $\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_{A^*}$; inoltre, dalla chiusura segue che A è normale \Leftrightarrow se A^* è normale. Il seguente teorema stabilisce due essenziali proprietà degli operatori normali.

TEOREMA (PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI NORMALI) - Sia (A, \mathcal{D}_A) normale su \mathcal{H} . Allora

$$(i) \quad \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}, \quad (ii) \quad \|A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \|A^*\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A. \quad (5.31)$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*A} = \mathcal{D}_{AA^*}$, allora $\|A\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{y}, A^*A\mathbf{y} \rangle$ essendo $A\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*A}$ ed $\|A^*\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{y}, AA^*\mathbf{y} \rangle$ essendo $A^*\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{AA^*}$; pertanto, dalla normalità di A segue che

$$\|A\mathbf{y}\|_{\mathcal{H}} = \|A^*\mathbf{y}\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^*A} = \mathcal{D}_{AA^*}.$$

Sia ora $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ ed $A' \equiv A|_{\mathcal{D}_{A^*A}}$: dimostriamo che $\overline{\Gamma_{A'}} = \Gamma_A$, ovvero che $\Gamma_{A'}$ è denso in Γ_A . Per farlo, consideriamo la coppia $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \perp \Gamma_{A'}$: allora $\forall (\mathbf{x}', A\mathbf{x}') \in \Gamma_{A'}$, ovvero $\forall \mathbf{x}' \in \mathcal{D}_{A^*A}$, si ha che

$$0 = \langle (\mathbf{x}, A\mathbf{x}), (\mathbf{x}', A\mathbf{x}') \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathbf{x}, A^*A\mathbf{x}' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{x}' \rangle_{\mathcal{H}},$$

essendo $\mathcal{B} \equiv \mathbf{1} + A^*A$. D'altra parte $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \mathcal{H}$ (teorema "autoaggiuntezza di A^*A ", §4.4), per cui $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ovvero $\Gamma_{A'}$ è denso in Γ_A . Alla luce di tanto, se $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \in \Gamma_A = \overline{\Gamma_{A'}}$, allora $\exists \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{A^*A}$ t.c.

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ed} \quad \|A\mathbf{x}_n - A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ma $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_{A^*A}$, dunque $\|A^*\mathbf{x}_n - A^*\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}_n - A\mathbf{x}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ovvero $\{A^*\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in \mathcal{H} . Ne segue che $\exists \mathbf{z} \in \mathcal{H}$ tale che

$$\|A^*\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Poiché A^* è normale (quindi chiuso), si ha che $\mathbf{z} = A^*\mathbf{x}$ e dunque $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Gamma_{A^*}$, ovvero $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A^*}$ ed

$$\|A^*\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^*\mathbf{x}_n\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\mathbf{x}_n\|_{\mathcal{H}} = \|A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}.$$

Ciò prova la (ii) e parte della (i) e cioè $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{A^*}$. Per completare la dimostrazione basta osservare che A^* è normale: allora, per quanto appena dimostrato, si ha che $\mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{D}_{A^{**}} = \mathcal{D}_A$, essendo $A^{**} = A$. \square

Possiamo ora dimostrare la seguente proprietà, relativa allo spettro residuo di operatori normali.

TEOREMA (SPETTRO RESIDUO DI OPERATORI NORMALI) - Sia (A, \mathcal{D}_A) normale su \mathcal{H} . Allora

$$\sigma_r(A) = \emptyset = \sigma_r(A^*). \quad (5.32)$$

Dimostrazione. Per assurdo, sia $\lambda \in \sigma_r(A)$, $\lambda \neq 0$. Allora $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, ovvero $\exists \mathbf{x} \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}(A^*)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; d'altra parte, se A è normale, anche $A - \lambda\mathbf{1}$ lo è, quindi $\|(A - \lambda\mathbf{1})\mathbf{x}\| = \|(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})\mathbf{x}\| = 0$ e cioè $\lambda \in \sigma_p(A)$. Ma ciò è assurdo, essendo $\sigma_r(A)$ e $\sigma_p(A)$ disgiunti. Analogamente, si dimostra che $\sigma_r(A^*) = \emptyset$. \square

Segue banalmente che **operatori autoaggiunti ed unitari hanno spettro residuo vuoto**.

Analizziamo ora le principali proprietà spettrali degli operatori simmetrici, riassunte nel seguente

TEOREMA (PROPRIETÀ SPETTRALI DEGLI OP. SIMMETRICI) - (A, \mathcal{D}_A) , $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{H}$, $A \subseteq A^*$. Allora:

$$(a) \quad \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}; \quad (b) \quad \mathcal{M}_{\lambda_1} \perp \mathcal{M}_{\lambda_2} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(A), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (5.33)$$

Dimostrazione. (a) Sia $\lambda \in \sigma_p(A)$, allora $\exists \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ t.c. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$; ma $A \subseteq A^*$, per cui $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$ e quindi $\lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \overline{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2 \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$; quindi $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$. Sia ora $\lambda = \xi + i\eta$ con $\xi, \eta \in \mathbb{R}$:

$$\|(A - \lambda\mathbb{1})\mathbf{x}\|^2 = \|\langle (A - \xi\mathbb{1})\mathbf{x} - i\eta\mathbb{1}\mathbf{x} \rangle\|^2 = \|(A - \xi\mathbb{1})\mathbf{x}\|^2 + \eta^2\|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A,$$

essendo $A \subseteq A^*$; di conseguenza $\exists \eta \in \mathbb{R}$ t.c. $\|[\mathcal{T}_\lambda(A)]\mathbf{x}\| \geq \eta\|\mathbf{x}\|$, ovvero $\mathcal{R}_\lambda(A)$ esiste limitato $\forall \eta \neq 0$ ed è non limitato per $\eta = 0$ (teorema dell'inverso limitato, §4.1). Quindi $\lambda = \xi \in \sigma_c(A)$ e $\sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(A)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ed $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ i corrispondenti autovettori: allora

$$\lambda_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0,$$

ma $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e quindi $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$, ovvero $\mathcal{M}_{\lambda_1} \perp \mathcal{M}_{\lambda_2}$. \square

Essendo valide per (A, \mathcal{D}_A) simmetrico, le precedenti proprietà restano soddisfatte se $A = A^*$. Si noti che, se \mathcal{H} è separabile e se (A, \mathcal{D}_A) autoaggiunto ammette spettro puntuale con tutti autovalori non degeneri, allora $\sigma_p(A)$ è un insieme numerabile e l'insieme degli autovettori (opportunitamente normalizzati) è una *famiglia ortonormale* (e quindi una base hilbertiana) di \mathcal{H} (vedi §2.7).

Dalle proprietà spettrali degli operatori simmetrici segue un utile criterio di autoaggiuntezza.

TEOREMA (SIMMETRICO VS AUTOAGGIUNTO II) - Sia $A \subseteq A^*$. Allora $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A = A^*$.

Dimostrazione. Se $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, allora $\pm i \in \rho(A)$ per cui $\mathcal{R}_{\pm i}(A)$ esiste, è limitato e densamente definito, dunque ammette un'unica estensione lineare e limitata su tutto \mathcal{H} (teorema dell'estensione lineare limitata, §4.1). Di conseguenza $\mathcal{R}_{A \pm i\mathbb{1}} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}_{\pm i}(A)} = \mathcal{H}$ e quindi $A = A^*$, essendo A simmetrico e densamente definito (teorema "simmetrico vs autoaggiunto", §4.4). \square

Si noti che il teorema richiede che *tutto* $\sigma(A)$ sia contenuto in \mathbb{R} , ovvero che⁸⁹ $\sigma_r(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Concludiamo con le proprietà spettrali degli operatori unitari. In questo caso, la trattazione si riconduce alla teoria degli operatori limitati, in quanto *ogni operatore unitario* U è *isometrico*, quindi *limitato* ed è banale verificare che $\sigma(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Di maggiore importanza è il seguente

TEOREMA (SPETTRO DI OPERATORI SIMILI) - Siano (A, \mathcal{D}_A) e (B, \mathcal{D}_B) densamente definiti ed $A = A^*$; sia inoltre (U, \mathcal{H}) unitario tale che $U : \mathcal{D}_B \rightarrow \mathcal{D}_A$ e $B\mathbf{x} = U^{-1}AU\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B$. Allora $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Dimostrazione. $B = B^*$: infatti U è unitario (quindi limitato) e $\overline{\mathcal{D}_{U^{-1}AU}} = \mathcal{H}$ per cui, alla luce della (4.13), si ha che $B^* = (U^{-1}AU)^* = U^*A^*(U^{-1})^* = U^{-1}AU = B$. Sia ora $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $\lambda \in \rho(B) \Leftrightarrow \mathcal{R}_\lambda(B) = [U^{-1}(A - \lambda\mathbb{1})U]^{-1} = U^{-1}\mathcal{R}_\lambda(A)U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \Leftrightarrow \mathcal{R}_\lambda(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \Leftrightarrow \lambda \in \rho(A)$. \square

Esempi

o PROPRIETÀ SPETTRALI DELL'OPERATORE DI POSIZIONE SU $L_2(\mathbb{R})$

Sia $(\mathbf{q}, \mathcal{D}_\mathbf{q})$ con $\mathcal{D}_\mathbf{q} = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \mathbf{q}\psi \in L_2(\mathbb{R})\}$; $(\mathbf{q}, \mathcal{D}_\mathbf{q})$ è autoaggiunto, per cui $\sigma(\mathbf{q}) \subseteq \mathbb{R}$ e $\sigma_r(\mathbf{q}) = \emptyset$. Proviamo che $\sigma_p(\mathbf{q}) = \emptyset$ e che $\sigma_c(\mathbf{q}) = \mathbb{R}$. Se $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{q})$ allora $\exists \psi \in \mathcal{D}_\mathbf{q}$ non nulla t.c. $x\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$; in senso *distribuzionale*, la precedente equazione omogenea ha soluzione $\psi(x) = c\delta(x - \lambda)$ (ottenuta trasformando ambo i membri nel senso di Fourier, vedi §6.9); tuttavia $\delta \notin L_2(\mathbb{R})$ per cui $[\mathcal{T}_\lambda(\mathbf{q})]\psi = 0$ non ammette soluzioni non banali e quindi $\sigma_p(\mathbf{q}) = \emptyset$. Conseguentemente, $\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{q})$ esiste ed è densamente definito $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Per verificare che $\sigma_c(\mathbf{q}) = \mathbb{R}$, procediamo come per $(\mathbf{q}, L_2([a, b]))$: sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione di funzioni della forma $\psi_n(x) \equiv \sqrt{n}\theta(2n|x - \lambda| \leq 1)$. Evidentemente $\|\psi_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$ e $\psi_n \in \mathcal{D}_\mathbf{q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$; inoltre

$$\|[\mathcal{T}_\lambda(\mathbf{q})]\psi_n\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = n \int_{\lambda - \frac{1}{2n}}^{\lambda + \frac{1}{2n}} (x - \lambda)^2 dx = \frac{1}{12n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dunque $\lambda \in \sigma_c(\mathbf{q})$ e, data l'arbitrarietà di λ , $\sigma_c(\mathbf{q}) = \mathbb{R}$.

⁸⁹Evidentemente, nulla si può dire a priori sullo spettro residuo di un operatore simmetrico: in generale $\emptyset \neq \sigma_r(A) \subseteq \mathbb{C}$.

◦ PROPRIETÀ SPETTRALI DELL'OPERATORE IMPULSO SU $L_2(\mathbb{R})$

Nella prossima sezione studieremo le proprietà spettrali di $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ adoperando gli strumenti sviluppati finora. Vogliamo qui seguire un ragionamento differente. Nel §6.8 vedremo che la *trasformata di Fourier* di funzioni di $L_2(\mathbb{R}^n)$ può essere ottenuta a partire dall'operatore di Fourier $(\mathcal{F}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, essendo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo *spazio di Schwartz* su \mathbb{R}^n ; dimostreremo inoltre che $(\mathcal{F}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ è *invertibile* ed *isometrico* (rispetto alla norma di $L_2(\mathbb{R}^n)$), quindi $\|\mathcal{F}\|_{B(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))} = 1$. Essendo limitato e densamente definito, \mathcal{F} ammette un'unica estensione lineare limitata su $L_2(\mathbb{R}^n)$, anch'essa isometrica e *suriettiva* (potendo ripetere lo stesso discorso per \mathcal{F}^{-1}); sicché, detta $\widehat{\mathcal{F}}$ tale estensione, sarà $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2(\mathbb{R}^n))$ **unitario**. Tale operatore, noto come **trasformata di Fourier–Plancherel**, è di grande utilità in Meccanica Quantistica, essendo validi i seguenti risultati:

$$\left(\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{F}}\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}} \right) \quad \text{ed} \quad \left(\mathfrak{p}\psi = \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\mathfrak{q}\widehat{\mathcal{F}}\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}} \right),$$

dove $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}_{\mathfrak{q}} = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^n) : \mathfrak{q}\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$; in altre parole $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2(\mathbb{R}^n))$ permette di passare dal cosiddetto “spazio degli impulsi” allo “spazio delle coordinate” e viceversa. Dunque $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ è il trasformato unitario dell'operatore autoaggiunto $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_{\mathfrak{q}})$ per cui è autoaggiunto (come atteso) e $\sigma(\mathfrak{p}) = \sigma(\mathfrak{q})$, secondo quanto prescritto dal teorema “spettro di operatori simili”.

5.3 Decomposizione spettrale di operatori autoaggiunti

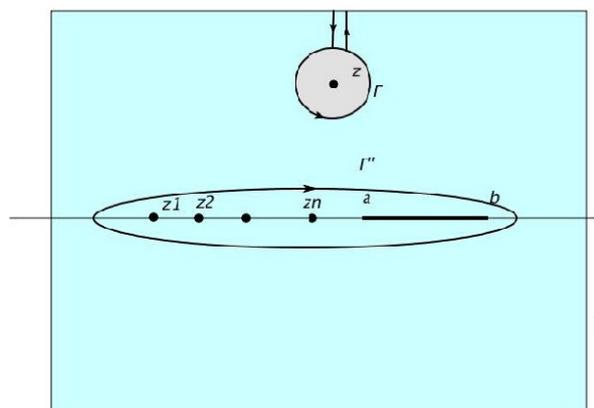
Vedremo ora alcuni importanti strumenti relativi alla formulazione matematica della Meccanica Quantistica; senza di essi la teoria finora sviluppata non troverebbe confronto nei risultati sperimentali e tutto lo sforzo profuso avrebbe come unico fine la pura speculazione matematica. Ciò che descriveremo, infatti, rende *predittiva* la teoria, ponendo una corrispondenza tra la *Teoria spettrale degli operatori autoaggiunti* e la *Teoria della misura*. L'obiettivo sarà quello di introdurre i concetti necessari alla comprensione del terzo postulato della Meccanica Quantistica: dovremo proseguire nello studio delle proprietà spettrali degli operatori autoaggiunti ed, in particolare, della loro decomposizione spettrale, introducendo quindi alcuni nuovi concetti, tra i quali quello di **famiglia o misura spettrale**.

Esistono vari modi per introdurre il concetto di misura spettrale⁹⁰; quello che seguiremo noi è un ragionamento euristico, basato sulla *formula di Riesz–Dunford*. Sia (A, \mathcal{D}_A) densamente definito su \mathcal{H} ed autoaggiunto; inoltre, supponiamo per semplicità che $\sigma_p(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ e $\sigma_c(A) = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ finiti. Sappiamo che $\mathcal{R}_\lambda(A) : \rho(A) \rightarrow B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ è analitica, dunque

$$\forall \lambda \in \rho(A) \quad \mathcal{R}_\lambda(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathcal{R}_z(A)}{z - \lambda} dz,$$

dove $\partial\Gamma$ è la frontiera di un intorno di $\lambda \in \rho(A)$ arbitrariamente grande (purché non contenga elementi di $\sigma(A)$). Con riferimento alla figura, deformiamo $\partial\Gamma$ di modo che una porzione $\partial\Gamma'$ sia “gonfiata” e mandata all'infinito del piano complesso ed un'altra porzione $\partial\Gamma''$ contenga $\sigma(A)$ al suo interno. Come nel caso finito dimensionale, l'integrale si interpreta come

$$\widehat{f}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma''} f(z)\mathcal{R}_z(A) dz;$$



⁹⁰È possibile adoperare la trasformata di Cayley e ricavare la decomposizione spettrale di un operatore autoaggiunto partendo dalla decomposizione spettrale dell'operatore unitario ad esso associato (vedi a.e. *E. Kreyszig, INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS WITH APPLICATIONS, Ch. 10, pgg. 546–562*); oppure, si può astrarre al caso più generale possibile, determinando la decomposizione spettrale di operatori normali non limitati ma densamente definiti a partire dal caso limitato (o eventualmente da quello finito dimensionale), sicché la decomposizione degli operatori autoaggiunti sarebbe un caso particolare (vedi a.e. *J. B. Conway, A COURSE IN FUNCTIONAL ANALYSIS, Ch. 10, pgg. 319–327*).

deformando l'insieme Γ'' di modo che la sua frontiera $\partial\Gamma''$ sia costituita dalle due rette $\Im(z) = \varepsilon$ ed $\Im(z) = -\varepsilon$, si ottiene l'espressione

$$\widehat{f}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{R}} \{[A - (x + i\varepsilon)\mathbf{1}]^{-1} f(x + i\varepsilon) - [A - (x - i\varepsilon)\mathbf{1}]^{-1} f(x - i\varepsilon)\} dx.$$

Nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene l'analogo per spazi di dimensione arbitraria della formula (5.6), ovvero

$$\widehat{f}(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathbb{E}_x(A) \quad \text{dove} \quad \mathbb{E}_x(A) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{x+\delta} [\mathcal{R}_{x'+i\varepsilon}(A) - \mathcal{R}_{x'-i\varepsilon}(A)] dx'. \quad (5.34)$$

Come per il caso finito dimensionale, \mathbb{E}_x è un proiettore $\forall x \in \mathbb{R}$. Nel caso dello spettro puntuale, supposto che $\lambda_1 \in [x_1, x_2]$ e che in detto intervallo non cadano altri elementi di $\sigma_p(A)$, si trova

$$(\mathbb{E}_{x_2} - \mathbb{E}_{x_1})\mathbf{x}_{\lambda_k} = \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} (\mathcal{R}_{x+i\varepsilon} - \mathcal{R}_{x-i\varepsilon}) dx \right] \mathbf{x}_{\lambda_k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{dx}{x - \lambda_k} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } k \neq 1, \\ \mathbf{x}_{\lambda_1} & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

Pertanto, comunque vicini siano x_1 ed x_2 , si ha che $\mathbb{E}_{x_2} - \mathbb{E}_{x_1} = \mathbb{P}_1$, dove \mathbb{P}_1 è il proiettore su \mathcal{M}_{λ_1} ; inoltre $\mathbb{E}_{x'} = \mathbb{E}_{x''}$ qualora $\sigma_p \notin [x', x'']$. Ripetendo lo stesso ragionamento $\forall \lambda_k \in \sigma_p(A)$, si trova quanto segue: l'operatore \mathbb{E}_x presenta una discontinuità pari a \mathbb{P}_k allorché x passa dalla destra alla sinistra di λ_k . Tale discontinuità rivela una proprietà interessante. Supponiamo che le relazioni (5.10), (5.11) siano valide e che $\sigma(A) = \sigma_p(A) \subset [\alpha, \beta]$: suddiviso l'intervallo in n parti t.c. $\lambda_j \in [x_k, x_{k+1}] \Leftrightarrow j = k$ (essendo $x_1 \equiv \alpha$ ed $x_{n+1} \equiv \beta$), si ha che $\mathbb{P}_k = \mathbb{E}_{x_{k+1}} - \mathbb{E}_{x_k} \equiv \delta \mathbb{E}_{\lambda_k}$ per $k = 1, \dots, n$ per cui

$$\mathbf{1} = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}_{x_{k+1}} - \mathbb{E}_{x_k}) = \sum_{k=1}^n \delta \mathbb{E}_{\lambda_k}, \quad A = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\mathbb{E}_{x_{k+1}} - \mathbb{E}_{x_k}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta \mathbb{E}_{\lambda_k}. \quad (5.35)$$

Le relazioni precedenti definiscono la rappresentazione spettrale di un operatore autoaggiunto (A, \mathcal{D}_A) avente solo spettro puntuale; tale rappresentazione mostra quindi che $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda \langle \delta \mathbb{E}_{\lambda}(A)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}},$$

il quale può essere equivalentemente riscritto come *integrale di Riemann–Stieltjes* nella forma

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\omega(\lambda) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}, \quad (5.36)$$

dove $\omega(\lambda) \equiv \langle \delta \mathbb{E}_{\lambda}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}$ è una *misura di Riemann–Stieltjes*. Naturalmente, in generale anche $\sigma_c(A)$ contribuisce alla decomposizione spettrale e, come dimostreremo tra breve, \mathbb{E}_x varia con continuità in ciascun intorno di $\lambda \in \sigma_c(A)$; sicché, la (5.36) si scriverà ora nella forma

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\omega(\lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda \mathbb{P}_{\lambda} + \int_{\lambda \in \sigma_c(A)} \lambda d\omega(\lambda). \quad (5.37)$$

Inoltre, presa una funzione $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica su un opportuno dominio, si avrà che

$$\langle \widehat{f}(A)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} f(\lambda) \mathbb{P}_{\lambda} + \int_{\lambda \in \sigma_c(A)} f(\lambda) d\omega(\lambda) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}.$$

Sebbene non troppo rigorosa, la trattazione precedente dá un'idea dei risultati che verranno. Occorrerà chiarire molti punti, come ad esempio l'uso di una misura di Riemann–Stieltjes a valori operatoriali $d\mathbb{E}_x$: tale misura è ben definita? Se sí, è unica? Chiariremo questi aspetti nel prossimo paragrafo.

5.3.1 Famiglia spettrale e primo teorema spettrale

A questo punto, possiamo presentare in veste più rigorosa i concetti introdotti nel paragrafo precedente. Per chiarezza, richiamiamo alcune proprietà dei **proiettori ortogonali** (vedi esempi, §4.2).

TEOREMA (PROPRIETÀ DEI PROIETTORI ORTOGONALI) - Sia $(\mathcal{P}_Y, \mathcal{H})$ un proiettore ortogonale. Allora:

$$(p_1) \quad \langle \mathcal{P}_Y \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathcal{P}_Y \mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}, \quad (p_2) \quad \mathcal{P}_Y \geq \mathbf{0}.$$

Inoltre, in connessione con la composizione di operatori, valgono le seguenti affermazioni:

$$(p_3) \quad \mathcal{P}_Y \equiv \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} \text{ è un proiettore ortogonale} \Leftrightarrow [\mathcal{P}_{Y_1}, \mathcal{P}_{Y_2}] = \mathbf{0}, \text{ allora } \mathcal{P}_Y(\mathcal{H}) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2;$$

$$(p_4) \quad \mathcal{P}_Y \equiv \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2} \text{ è un proiettore ort.} \Leftrightarrow \mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathbf{0}, \text{ allora } \mathcal{P}_Y(\mathcal{H}) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2.$$

Infine, se \mathcal{P}_{Y_1} e \mathcal{P}_{Y_2} sono proiettori ortogonali, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$(p_{5a}) \quad \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} = \mathcal{P}_{Y_1}; \quad (p_{5b}) \quad \mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2; \quad (p_{5c}) \quad \mathcal{N}_{\mathcal{P}_{Y_1}} \supseteq \mathcal{N}_{\mathcal{P}_{Y_2}};$$

$$(p_{5d}) \quad \|\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}; \quad (p_{5e}) \quad \mathcal{P}_{Y_1} \subseteq \mathcal{P}_{Y_2}.$$

Dimostrazione. ((p₁), (p₂)) Se \mathcal{P}_Y è un proiettore, allora $\mathcal{P}_Y^* = \mathcal{P}_Y$ e $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_Y$; per cui $\langle \mathcal{P}_Y \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathcal{P}_Y \mathcal{P}_Y \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathcal{P}_Y \mathbf{x}, \mathcal{P}_Y \mathbf{x} \rangle = \|\mathcal{P}_Y \mathbf{x}\|^2 \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, dunque \mathcal{P}_Y è positivo. (p₃) Sia $[\mathcal{P}_{Y_1}, \mathcal{P}_{Y_2}] = \mathbf{0}$, allora $\mathcal{P}_Y \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (essendo prodotto di operatori di proiezione, dunque limitati) e $\mathcal{P}_Y^* = \mathcal{P}_Y$; inoltre $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_{Y_1}(\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1})\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_1}^2 \mathcal{P}_{Y_2}^2 = \mathcal{P}_Y$, quindi \mathcal{P}_Y è un proiettore e $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ si ha $\mathcal{P}_Y \mathbf{x} = \mathcal{P}_{Y_1}(\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}) = \mathcal{P}_{Y_2}(\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x})$, ovvero $\mathcal{P}_{Y_1}(\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}) \in \mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{P}_{Y_2}(\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}) \in \mathcal{Y}_2$, per cui $\mathcal{P}_Y \mathbf{x} \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$. Viceversa, sia \mathcal{P}_Y un proiettore, allora $\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} = \mathcal{P}_Y^* = \mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2}$. (p₄) Dimostriamo prima che $\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathbf{0}$. Sia $\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2$, allora $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset$ e quindi $\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$; viceversa, sia $\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathbf{0}$, allora $\forall \mathbf{y}_1 \in \mathcal{Y}_1$ e $\forall \mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}_2$, esistono $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{H}$ tali che

$$\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}_1, \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2.$$

Sia ora $\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2}$ un proiettore, allora $\mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2} = (\mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2})^2 = \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} + \mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2}$, ovvero $\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = -\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1}$; moltiplicando ambo i membri prima a sinistra e poi a destra per \mathcal{P}_{Y_2} si trova $2\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathbf{0}$ la quale, sostituita in $\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = -\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1}$ dà $\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} = \mathbf{0}$. Viceversa, sia $\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2$, allora $\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathbf{0} = \mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1}$ e quindi $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_{Y_1}^2 + \mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} + \mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2}^2 = \mathcal{P}_Y$; inoltre, $\mathcal{P}_Y \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (essendo somma di operatori limitati) e $\mathcal{P}_Y^* = \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_Y$. Sia ora $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, allora $\exists \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ tale che $\mathbf{y} = \mathcal{P}_Y \mathbf{x} = \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x} + \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}$, dove $\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x} \in \mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x} \in \mathcal{Y}_2$, per cui $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$. Per l'inclusione inversa, sia $\mathbf{v} \in \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$, allora $\exists \mathbf{y}_1 \in \mathcal{Y}_1$ e $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}_2$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$; applicando \mathcal{P}_Y e sfruttando l'ortogonalità tra \mathcal{Y}_1 ed \mathcal{Y}_2 si trova che

$$\mathcal{P}_Y \mathbf{v} = \mathcal{P}_{Y_1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) + \mathcal{P}_{Y_2}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{y}_1 + \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{v},$$

dunque $\mathbf{v} \in \mathcal{Y}$, ovvero $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$. (p_{5a}) \Rightarrow (p_{5d}) Sia $\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} = \mathcal{P}_{Y_1}$: se \mathcal{P}_Y è un proiettore, allora $\|\mathcal{P}_Y\| = 1$ (vedi esempi, §4.2), per cui $\|\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}\| = \|\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{P}_{Y_1}\| \|\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}\| = \|\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. (p_{5d}) \Rightarrow (p_{5e}) Da (p₁) segue che $\langle \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}\|^2 = \langle \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, per cui $\mathcal{P}_{Y_1} \subseteq \mathcal{P}_{Y_2}$. (p_{5d}) \Rightarrow (p_{5c}) Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}_{Y_2}}$, allora $\mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ e quindi $\|\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}\|^2 = \langle \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, ovvero $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}_{Y_1}}$. (p_{5c}) \Rightarrow (p_{5b}) Basta osservare che $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_Y} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_Y^*$, per cui

$$\mathcal{Y}_1^\perp = (\mathcal{R}_{\mathcal{P}_{Y_1}})^\perp = \mathcal{N}_{\mathcal{P}_{Y_1}} \supseteq \mathcal{N}_{\mathcal{P}_{Y_2}} = (\mathcal{R}_{\mathcal{P}_{Y_2}})^\perp = \mathcal{Y}_2^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2.$$

(p_{5b}) \Rightarrow (p_{5a}) Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ arbitrario, allora $\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x} \in \mathcal{Y}_1$; ma allora $\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x} \in \mathcal{Y}_2$ e quindi $\mathcal{P}_{Y_2}(\mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}) = \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{x}$, ovvero $\mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} = \mathcal{P}_{Y_1}$. D'altra parte $\mathcal{P}_Y^* = \mathcal{P}_Y$ per cui $\mathcal{P}_{Y_1} \mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_2} \mathcal{P}_{Y_1} = \mathcal{P}_{Y_1}$. \square

Alla luce delle considerazioni appena presentate possiamo introdurre il concetto di famiglia spettrale.

DEFINIZIONE (FAMIGLIA SPETTRALE) - Sia $\mathcal{E} \equiv \{\mathbb{E}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ una famiglia uniparametrica di proiettori ortogonali di \mathcal{H} . Diremo che \mathcal{E} è una **famiglia spettrale** (o **risoluzione dell'identità**) su \mathbb{R} se

$$(s_1) \quad \mathbb{E}_\lambda \subseteq \mathbb{E}_\mu \quad \text{equivalentemente} \quad \mathbb{E}_\lambda \mathbb{E}_\mu = \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}_\lambda = \mathbb{E}_\lambda \quad \forall \lambda < \mu;$$

$$(s_2) \quad \mathbb{E}_{\lambda+\varepsilon} \mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H};$$

$$(s_3) \quad \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x} \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty} \mathbf{0} \quad e \quad \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbf{1} \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}.$$

Dunque $\mathbb{E}_{(\cdot)} : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}_\lambda \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$; si noti che la richiesta (s₂) prescrive la *continuità a destra della famiglia spettrale*. Naturalmente, nel caso in cui $\lambda \in [a, b]$, occorrerà richiedere che

$$\mathbb{E}_\lambda = \mathbf{0} \quad \forall \lambda < a \quad \text{ed} \quad \mathbb{E}_\lambda = \mathbf{1} \quad \forall \lambda \geq b;$$

una simile famiglia spettrale sarà utile in presenza di operatori autoaggiunti limitati.

Una famiglia spettrale $\mathcal{E} = \{\mathbb{E}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ definisce una **misura**⁹¹ a valori su \mathbb{R} : infatti, sia

$$\alpha_x(\lambda) \equiv \langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{H}, \quad \|\mathbf{x}\| = 1; \quad (5.38)$$

evidentemente $\alpha_x(\lambda) = \|\mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \in \mathbb{R}$; inoltre, la funzione $\alpha_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà

$$(\alpha_1) \quad \alpha_x(\lambda) \leq \alpha_x(\mu) \quad \forall \lambda \leq \mu, \quad (\alpha_2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \alpha_x(\lambda + \varepsilon) = \alpha_x(\lambda);$$

$$(\alpha_3) \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \alpha_x(\lambda) = 0 \quad \text{ed} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_x(\lambda) = 1.$$

Ciascuna funzione di variabile reale soddisfacente (α_1) , (α_2) , (α_3) definisce una cosiddetta **misura di Stieltjes**; pertanto, la misura $\omega(\lambda) \equiv \langle \delta \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ introdotta in (5.36) esiste ed è ben definita⁹².

Resta da chiarire se e sotto quali ipotesi la misura di Stieltjes indotta da \mathcal{E} sia unica.

TEOREMA (UNICITÀ DELLA MISURA DI STIELTJES) - Sia \mathcal{E} una famiglia spettrale e sia

$$\mathcal{D}_B \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} < \infty \right\}.$$

Allora esiste un'unico operatore autoaggiunto (B, \mathcal{D}_B) densamente definito, tale che

$$\langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}. \quad (5.39)$$

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che $\overline{\mathcal{D}_B} = \mathcal{H}$. Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ed $\{\mathbf{x}_n \equiv (\mathbb{E}_n - \mathbb{E}_{-n})\mathbf{x}\}_{n \in \mathbb{N}}$: dalla proprietà (s₃) segue che $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$; resta allora da dimostrare che $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_B$. Ciò è immediato poiché per un fissato valore di $n \in \mathbb{N}$, risulta essere

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda (\mathbb{E}_n - \mathbb{E}_{-n})\mathbf{x}, (\mathbb{E}_n - \mathbb{E}_{-n})\mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \\ &= \int_{-n}^n \lambda^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} \leq n^2 \int_{-n}^n d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = n^2 \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty, \end{aligned}$$

⁹¹Richiamiamo brevemente alcune nozioni di Teoria della Misura. Sia $\mathcal{B}(X)$ l'insieme delle parti (insieme dei sottoinsiemi) di un insieme X ed $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{B}(X)$. Diremo che \mathfrak{F} è un'**algebra di insiemi** di X se $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$ e se $\forall A, B \in \mathfrak{F}$ si ha che $A \cup B, X \setminus A \in \mathfrak{F}$. In particolare, diremo che \mathfrak{F} è una σ -**algebra** se in aggiunta alle precedenti si ha che $\bigcup_j A_j \in \mathfrak{F} \quad \forall \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}$ (ovvero per ogni successione numerabile di elementi di \mathfrak{F}); di conseguenza, anche $\bigcap_j A_j \in \mathfrak{F}$, essendo $\bigcap_j A_j = A \setminus \bigcup_j (A \setminus A_j)$ dove $A \equiv \bigcup_j A_j$. Quindi una σ -algebra è un'**algebra di insiemi, chiusa rispetto ad unione ed intersezione di successioni numerabili** di elementi in essa contenuti. Se \mathfrak{F} è una σ -algebra, la coppia (X, \mathfrak{F}) prende il nome di **spazio misurabile** e su di esso è possibile definire una **misura**, ovvero una **funzione non-negativa** $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow K$ (K un campo scalare) tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\bigcap_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$ (per via della quale μ è detta σ -additiva o numericamente additiva). Si dimostra che $\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A \subseteq B$, con A, B insiemi misurabili di \mathfrak{F} . Se μ è una misura sulla σ -algebra \mathfrak{F} di sottoinsiemi di X , allora la terna (X, \mathfrak{F}, μ) prende il nome di **spazio di misura**. Tornando al caso in questione, dovendo lavorare con famiglie spettrali della retta reale, lo spazio di misura è semplicemente $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \alpha_x(\lambda))$, dove \mathfrak{B} è una σ -algebra di Borel di \mathbb{R} (ovvero la più piccola σ -algebra generata dalla topologia naturale \mathfrak{T} di \mathbb{R} e contenente la topologia stessa) e $\alpha_x(\lambda)$ è la misura (5.38) associata alla famiglia spettrale $\mathcal{E} = \{\mathbb{E}_\lambda : \lambda \in (\mathbb{R}, \mathfrak{B})\}$.

⁹²Si noti che $\langle \delta \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è a variazione limitata e la sua variazione totale non supera $\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

dunque \mathcal{D}_B è denso in \mathcal{H} . Si può dimostrare che l'integrabilità di λ^2 implica l'integrabilità di $|\lambda|$ (ovvero $\int_{\mathbb{R}} |\lambda| d|\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}}| < \infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B$) sicché, posto $\mathcal{L}_y(\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \mathbf{x}, \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}$ con $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_B$, si ha che

$$|\mathcal{L}_y(\mathbf{x})| = \left\| \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \mathbf{x}, \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d|\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d|\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}| \cdot \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}},$$

avendo sfruttato la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la proprietà (p₁) ed il fatto che $\|\mathbb{E}_\lambda\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})} = 1$. Pertanto $\mathcal{L}_y(\mathbf{x}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare (data la linearità dell'operatore integrale) e limitato; il teorema di rappresentazione di Riesz garantisce allora l'esistenza di uno ed un solo $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}$ tale che $\mathcal{L}_y(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Posto $B\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}^*$, si definisce un operatore lineare, di dominio \mathcal{D}_B tale che

$$\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \mathbf{x}, \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}.$$

Occorre perciò verificare che $B = B^*$: certamente $B \subseteq B^*$ in quanto $\mathbb{E}_\lambda^* = \mathbb{E}_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \mathbf{x}, \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_B.$$

Proviamo che $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}$: sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ed $(\mathcal{S}_\lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{S}_\lambda})$ l'operatore definito nel modo seguente:

$$\mathcal{S}_\lambda \mathbf{x} \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathbb{E}_z}{z - \lambda} \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}_\lambda} \quad \text{dove} \quad \mathcal{D}_{\mathcal{S}_\lambda} \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} \frac{d|\langle \mathbb{E}_z \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}}|}{|z - \lambda|^2} < \infty \right\}.$$

Osservando che $|z - \lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{-2}$, si prova facilmente che \mathcal{S}_λ è limitato e che $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_\lambda} = \mathcal{H}$. Inoltre

$$\begin{aligned} [T_\lambda(B)](\mathcal{S}_\lambda \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}} (z - \lambda) d\mathbb{E}_z(\mathcal{S}_\lambda \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} (z - \lambda) d\mathbb{E}_z \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathbb{E}_{z'}}{z' - \lambda} \mathbf{x} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (z - \lambda) d\mathbb{E}_z \left(\int_{-\infty}^z \frac{d\mathbb{E}_{z'}}{z' - \lambda} \mathbf{x} \right) = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{E}_z \mathbf{x} = \mathbb{E}_z|_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} = \mathbf{x}, \end{aligned}$$

avendo sfruttato la proprietà (s₃) ed una generalizzazione del *teorema fondamentale del calcolo* valida per integrali definiti su misure di Stieltjes. Pertanto $\mathcal{R}_\lambda(B) = \mathcal{S}_\lambda$ è limitato ed ovunque definito $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ovvero $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}$ e quindi $B = B^*$ (teorema "simmetrico vs autoaggiunto II"). \square

Il teorema precedente apre la strada al **teorema spettrale**, uno dei più profondi risultati della Teoria degli operatori lineari in spazi di Hilbert. Parleremo qui di "primo" teorema spettrale, per distinguere quest'ultimo da un altrettanto importante risultato che vedremo più avanti.

(I TEOREMA SPETTRALE) - $\forall (A, \mathcal{D}_A)$, $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ ed $A = A^*$, $\exists!$ $\mathcal{E}(A) \equiv \{\mathbb{E}_\lambda(A), \lambda \in \sigma(A)\}$ t.c.

$$A\mathbf{x} = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda d\mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \quad \mathcal{D}_A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 d|\langle \mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}}| < \infty \right\}. \quad (5.40)$$

Si noti che $\mathbb{E}_\lambda(A)|_{\lambda \in \sigma(A)} = \mathbf{1}$. Inoltre, se $C \in B(\mathcal{H})$ ed $[A, C] = \mathbf{0}$, allora $[C, \mathbb{E}_\lambda(A)] = \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è piuttosto lunga e complessa⁹³, per cui ci limiteremo ad elencarne i passaggi principali. Naturalmente, il punto centrale è la costruzione della famiglia spettrale $\mathcal{E}(A)$.

(1) Per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $z = a + ib$, $b \in \mathbb{R}^+$, sia $\phi(z) = \langle \mathcal{R}_z(A)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}}$, dove $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$: si prova che $\phi(z)$ è analitica su $\Im(z) > 0$, che $b\phi(ib) \geq 0$ e che $\sup_{b \in \mathbb{R}^+} \{b\phi(ib)\} < \infty$. (2) Un teorema di Analisi complessa garantisce, nelle condizioni elencate, l'esistenza di una funzione $\omega(\lambda; \mathbf{x})$, crescente rispetto a $\lambda \in \mathbb{R}$, t.c.

$$\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega(\lambda; \mathbf{x})}{\lambda - z}.$$

⁹³Per maggiori dettagli si veda, ad esempio, *J. Weidmann, LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACES, cap. 7, pg. 191.*

Richiedendo che $\omega(\lambda, \mathbf{x})$ soddisfi (s_2) ed (s_3) , si verifica che $\phi(z)$ è univocamente determinata. (3) Si prova poi che la relazione precedente è valida anche su $\Im(z) < 0$ e si definisce la funzione

$$\omega(\lambda; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \omega(\lambda; \mathbf{x} + i^k \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}.$$

(3) Si dimostra che $\omega(\lambda; \mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma sesquilineare limitata $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ quindi, invocando il teorema di Riesz (vedi §4.2), si stabilisce l'esistenza e l'unicità di $\mathbb{E}_\lambda(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ tale che

$$\omega(\lambda; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle \mathbb{E}_\lambda(A) \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}.$$

(4) Si prova che gli $\mathbb{E}_\lambda(A)$ sono proiettori e che $\mathcal{E}(A) \equiv \{\mathbb{E}_\lambda(A), \lambda \in \mathbb{R}\}$ definisce una famiglia spettrale su \mathbb{R} . (5) Invocando il teorema sull'unicità della misura di Stieltjes, si definisce l'operatore (B, \mathcal{D}_B) e si prova, con una tecnica simile a quella adoperata al termine dello stesso teorema per dimostrare l'autoaggiuntezza di B , che l'operatore (B, \mathcal{D}_B) così ottenuto corrisponde proprio ad (A, \mathcal{D}_A) . \square

Alla luce della decomposizione spettrale (5.40) e delle proprietà dei proiettori, si verifica che

$$\|A\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 d \langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 d \|\mathbb{E}_\lambda(A) \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A. \quad (5.41)$$

Un'importante conseguenza del teorema spettrale consiste nella possibilità di definire il concetto di **funzione di un operatore autoaggiunto** su spazi di Hilbert di dimensione arbitraria. Si può dimostrare infatti che se (A, \mathcal{D}_A) è densamente definito su \mathcal{H} ed autoaggiunto e se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione *misurabile* rispetto alla famiglia spettrale⁹⁴ $\mathcal{E}(A)$, allora l'operatore

$$f(A) = \int_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) d \mathbb{E}_\lambda(A), \quad \mathcal{D}_{f(A)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \int_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|^2 d \langle \mathbb{E}_\lambda(A) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} < \infty \right\} \quad (5.42)$$

è densamente definito; inoltre, se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ allora $[f(A)] = [f(A)]^*$ e se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è limitata allora $f(A) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Su questo risultato è fondato il cosiddetto *calcolo funzionale*, con il quale si fa corrispondere ad una funzione un operatore. In particolare, si dimostrano valide le seguenti regole di calcolo: siano $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili rispetto alla famiglia spettrale $\mathcal{E}(A)$, allora

$$\begin{aligned} (f_1) \quad (\alpha f)(A) &= \alpha f(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, & (f_2) \quad (f + g)(A) &\supseteq f(A) + g(A), \\ (f_3) \quad (fg)(A) &\supseteq f(A)g(A), & (f_4) \quad [f(A)]^* &= \overline{f}(A); \end{aligned}$$

se poi f, g sono limitate, allora (f_2) ed (f_4) valgono identicamente. Un caso d'interesse in corrispondenza del quale nella (f_3) vale l'uguaglianza è quello in cui $g = f^n$ con $n \in \mathbb{N}^+$ (la convergenza di $|f^{n+1}(\lambda)|^2$ implica la convergenza di $|f^n(\lambda)|^2$): procedendo passo passo, si giunge alla relazione

$$(f^n)(A) = [f(A)]^n \quad n = 1, 2, \dots$$

Applicata ad $f(\cdot) : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x \in \mathbb{R}$, l'espressione precedente restituisce quanto atteso, ovvero

$$A^n = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^n d \mathbb{E}_\lambda(A).$$

Di conseguenza, le potenze intere positive di un operatore autoaggiunto sono anch'esse autoaggiunte. Inoltre, si può ulteriormente dimostrare che se (A, \mathcal{D}_A) è in aggiunta *positivo*, allora sono autoaggiunte anche tutte le sue *potenze reali positive* e, se invertibile, anche le sue potenze reali negative.

⁹⁴Sia (X, \mathfrak{F}, μ) uno spazio misurabile ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è **misurabile rispetto alla misura** μ (più semplicemente, che è μ -**misurabile**) se $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \subseteq \mathfrak{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. In particolare, *ogni funzione continua è misurabile rispetto alla misura di Lebesgue* e, più in generale, rispetto ad una qualsiasi misura definita su una σ -algebra di Borel.

OSSERVAZIONE. Sia $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mathbb{E}_\lambda(A))$ lo spazio di misura costruito sulla famiglia spettrale $\mathcal{E}(A)$: dato il sottoinsieme boreliano $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ della retta reale, si ha che $\mathbb{E}_{\mathfrak{b}}\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}\mathbf{x}, \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}\mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \theta(\lambda \in \mathfrak{b}) d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathfrak{b}} \lambda^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Sia ora A un'osservabile di un sistema fisico \mathcal{S} preparato in uno "stato" $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$: in accordo con il terzo postulato, la probabilità che una misura di A su ψ cada in un intervallo $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ è data dall'espressione

$$\mathcal{P}_A(\mathfrak{b}|\psi) = \frac{\langle \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A)\psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}{\langle \psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}} = \frac{\|\mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A)\psi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}^2}{\|\psi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}^2}, \quad \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A) := \int_{x \in \mathfrak{b}} d\mathbb{E}_x(A).$$

La connessione tra decomposizione spettrale e probabilità può essere evidenziata nel seguente modo. Sia X una variabile casuale continua ed $\omega(x)$ la *funzione di ripartizione* ad essa associata; se esiste, la derivata di $\omega(x)$ rispetto ad $x \in \mathbb{R}$ fornisce la probabilità che $X \in [x, x + dx]$, ovvero $d\omega(x) = \rho(x) dx$, essendo $\rho(x)$ la *densità di probabilità* associata ad X . Pertanto, le espressioni

$$\mathcal{P}\{X \in \mathfrak{b}\} = \int_{\mathfrak{b}} d\omega(x) = \int_{\mathfrak{b}} \rho(x) dx, \quad \langle X \rangle = \int_{\mathbb{R}} x d\omega(x) = \int_{\mathbb{R}} x\rho(x) dx,$$

forniscono rispettivamente la probabilità che $X \in \mathfrak{b}$ ed il valor medio di X . Indicando ora con $X(A, \psi)$ la variabile casuale associata alla misura di A su ψ e supponendo che ψ sia normalizzato, troviamo

$$\mathcal{P}_A(\mathfrak{b}|\psi) \equiv \mathcal{P}\{X(A, \psi) \in \mathfrak{b}\} = \int_{\mathfrak{b}} d\omega(A, \psi; x), \quad \langle A \rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} x d\omega(A, \psi; x).$$

D'altra parte, sappiamo che $\langle A \rangle_{\psi} = \langle A\psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$ per cui, se $A = A^*$, risulta essere

$$\int_{\mathbb{R}} x d\omega(A, \psi; x) = \langle A \rangle_{\psi} = \langle A\psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} = \int_{\mathbb{R}} x d\|\mathbb{E}_x(A)\psi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}^2.$$

Risulta allora naturale identificare la funzione di ripartizione con la misura associata ad $\mathcal{E}(A)$:

$$\omega(A, \psi; x) = \langle \mathbb{E}_x(A)\psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}};$$

sicché la probabilità che una misura di A su ψ cada nell'intervallo $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ sarà

$$\mathcal{P}_A(\mathfrak{b}|\psi) = \int_{x \in \mathfrak{b}} d\langle \mathbb{E}_x(A)\psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} = \langle \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A)\psi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \quad \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}(A) \equiv \int_{x \in \mathfrak{b}} d\mathbb{E}_x(A).$$

Quindi, ad ogni osservabile è associata una funzione di ripartizione, univocamente determinata dalla decomposizione spettrale dell'operatore autoaggiunto rappresentante l'osservabile stessa; ciò rende chiara la scelta del secondo postulato di associare a ciascuna osservabile un operatore autoaggiunto.

5.3.2 "Secondo" teorema spettrale e spectral mapping theorem

Dal teorema spettrale sappiamo che ad un operatore autoaggiunto è associata un'unica famiglia spettrale; vedremo ora che *la conoscenza della famiglia spettrale determina completamente lo spettro dell'operatore*. Questo risultato, per via della sua utilità, è spesso indicato come "*secondo*" teorema spettrale.

(II TEOREMA SPETTRALE) - Sia $A = A^*$, $\mathcal{E}(A)$ la famiglia spettrale di A e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Allora

(t₁) $\lambda_0 \in \rho(A) \Leftrightarrow \mathbb{E}_\lambda(A)$ è costante in un intorno di λ_0 ;

(t₂) $\lambda_0 \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \mathbb{E}_\lambda(A)$ è discontinua in λ_0 ;

(t₃) $\lambda_0 \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \mathbb{E}_\lambda(A)$ è continua in λ_0 ma non costante in ogni intorno di λ_0 .

Dimostrazione. (t₁) Sia \mathbb{E}_λ costante $\forall \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$: dalla (5.41) segue che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$

$$\|\mathcal{T}_{\lambda_0} \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} + \int_{\lambda_0 - \varepsilon}^{\lambda_0 + \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} + \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'integrale su $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ è nullo, mentre sui restanti intervalli si ha che $(\lambda - \lambda_0)^2 \geq \varepsilon^2$: in definitiva $\|\mathcal{T}_{\lambda_0} \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \varepsilon^2 \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, ovvero $\mathfrak{R}_{\lambda_0}(A) \in B(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \lambda_0 \in \rho(A)$ (essendo $\sigma_r(A) = \emptyset$). Viceversa, se $\lambda_0 \in \rho(A)$ allora $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|\mathcal{T}_{\lambda_0} \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, dunque

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Per assurdo, sia \mathbb{E}_λ non costante in nessun intorno di λ_0 : allora $\forall \eta \in \mathbb{R}^+$, $\eta < \varepsilon \exists \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ tale che $(\mathbb{E}_{\lambda_0 + \eta} - \mathbb{E}_{\lambda_0 - \eta}) \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$; posto $\mathbf{x} = (\mathbb{E}_{\lambda_0 + \eta} - \mathbb{E}_{\lambda_0 - \eta}) \mathbf{y} \in \mathcal{D}_A$ nella disuguaglianza precedente, si trova

$$\int_{\lambda_0 - \eta}^{\lambda_0 + \eta} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon^2 \int_{\lambda_0 - \eta}^{\lambda_0 + \eta} d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \eta^2 \int_{\lambda_0 - \eta}^{\lambda_0 + \eta} d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}},$$

il che è assurdo, dovendo essere $\int_{\lambda_0 - \eta}^{\lambda_0 + \eta} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \leq \eta^2 \int_{\lambda_0 - \eta}^{\lambda_0 + \eta} d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}}$. (t₂) Sia \mathbb{E}_λ discontinua in λ_0 e definiamo il proiettore $\mathbb{P} \mathbf{x} := \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathbb{E}_{\lambda_0} - \mathbb{E}_{\lambda_0 - \delta}) \mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$: si può dimostrare che \mathbb{P} è non nullo e che $A\mathbb{P}$ è ovunque definito e limitato. Si dimostra allora⁹⁵ che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ risulta essere

$$A\mathbb{P} \mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \lambda d\mathbb{E}_\lambda \mathbf{x} - \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \delta} \lambda d\mathbb{E}_\lambda \mathbf{x} = \int_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0} \lambda d\mathbb{E}_\lambda \mathbf{x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \lambda_0 \mathbb{P} \mathbf{x},$$

per cui $A\mathbb{P} \mathbf{x} = \lambda_0 \mathbb{P} \mathbf{x}$ e quindi $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$. Viceversa, sia $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ed $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{\lambda_0}$: allora

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{T}_{\lambda_0} \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

Preso $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, dall'uguaglianza precedente si deduce che $\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = 0$, ma

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \varepsilon^2 \|\mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \Big|_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} = \varepsilon^2 \|\mathbb{E}_{\lambda_0 - \varepsilon} \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

in quanto se $\lambda \in (-\infty, \lambda_0 - \varepsilon)$ allora $(\lambda - \lambda_0)^2 \geq \varepsilon^2$. Analogamente, si trova che

$$\int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon^2 \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{+\infty} d\langle \mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = \varepsilon^2 \|\mathbb{E}_\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 \Big|_{\lambda_0 + \varepsilon}^{+\infty} = \varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbb{E}_{\lambda_0 + \varepsilon} \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

In definitiva $\mathbb{E}_{\lambda_0 + \varepsilon} \mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{1} \mathbf{x}$ e $\mathbb{E}_{\lambda_0 - \varepsilon} \mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{0}$, ovvero \mathbb{E}_λ è discontinua in λ_0 . (t₃) Per esclusione: $\lambda_0 \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \lambda_0 \notin \sigma_p(A) \cup \rho(A) \Leftrightarrow \mathbb{E}_\lambda$ è continua in λ_0 ma non costante in ogni intorno di λ_0 . \square

Ritroviamo così quanto osservato nell'introduzione: lo spettro puntuale di un operatore autoaggiunto è composto dai punti di discontinuità della famiglia spettrale ad esso associata. Segue il seguente

COROLLARIO (VALORI SPETTRALI) - Sia $A = A^*$, $\mathcal{E}(A)$ la famiglia spettrale di A e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \iff \mathbb{P}_{\lambda_0, \varepsilon}(A) := \mathbb{E}_{\lambda_0 + \varepsilon}(A) - \mathbb{E}_{\lambda_0 - \varepsilon}(A) \neq \mathbf{0} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \quad (5.43)$$

OSSERVAZIONE. Gli operatori $\mathbb{P}_{\lambda_0, \varepsilon}(A)$ svolgono un ruolo rilevante nella classificazione dello spettro di (A, \mathcal{D}_A) ; infatti, è possibile dimostrare⁹⁶ che ogni vettore del sottospazio $\mathbb{P}_{\lambda_0, \varepsilon}(A)\mathcal{H}$ è un autovettore di A . Di conseguenza, i proiettori $\mathbb{P}_{\lambda_0, \varepsilon}(A)$ conducono ad una classificazione alternativa dello spettro di un operatore autoaggiunto, che riportiamo qui per completezza.

⁹⁵Per la dimostrazione rigorosa vedi *C. Trapani, APPUNTI DI TEORIA DEGLI OPERATORI, cap. 4, pg. 84.*

⁹⁶Si veda, ad esempio, *C. Trapani, APPUNTI DI TEORIA DEGLI OPERATORI, cap. 4, pg. 85.*

DEFINIZIONE (SPETTRO ESSENZIALE E DISCRETO) - Sia $A = A^*$ e $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Diremo che

- $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(A)$, lo **spettro essenziale** di A , se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ è $\dim(\mathbb{P}_{\lambda_0, \varepsilon} \mathcal{H}) = \infty$;
- $\lambda_0 \in \sigma_{dis}(A)$, lo **spettro discreto** di A , se $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\dim(\mathbb{P}_{\lambda_0, \varepsilon} \mathcal{H}) < \infty$.

Spettro discreto e spettro essenziale sono disgiunti e la loro unione corrisponde a $\sigma(A)$, ovvero

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{dis}(A), \quad \sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{dis}(A) = \emptyset.$$

D'altra parte, sappiamo che se $A = A^*$ allora $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$: ne segue che lo *spettro essenziale* contiene lo *spettro continuo* insieme a tutti gli autovalori di A di molteplicità infinita. Questa nuova classificazione dello spettro apre ad una vasta gamma di interessanti risultati e proprietà che non tratteremo qui nel dettaglio⁹⁷. Riportiamo solo l'enunciato del seguente teorema, il quale mostra che alcuni rilevanti *operatori di Schrödinger* con potenziale $V(x)$ inferiormente limitato (a.e. l'*oscillatore armonico*) hanno solo spettro discreto.

TEOREMA (SPETTRO DISCRETO DI OPERATORI DI SCHRÖDINGER) - Sia $V \in C(\mathbb{R})$ reale t.c.

$$V(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e \quad V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty.$$

Allora $(\mathfrak{p}^2 + V(\mathfrak{q}), C_0^\infty(\mathbb{R}))$ è *ess. autoaggiunto, positivo* e $\sigma(\overline{\mathfrak{p}^2 + V(\mathfrak{q})}) = \sigma_{dis}(\overline{\mathfrak{p}^2 + V(\mathfrak{q})})$.

Concludiamo con le proprietà dello spettro di una funzione di un operatore autoaggiunto. Nel paragrafo §5.3.1 si è visto che se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile rispetto alla famiglia spettrale $\mathcal{E}(A)$, allora

$$f(A) = \int_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) d\mathbb{E}_\lambda(A), \quad \mathcal{D}_{f(A)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \int_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} < \infty \right\}.$$

Inoltre, si è osservato che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è sufficiente richiederne la *continuità* perché essa sia misurabile rispetto ad una qualsiasi misura definita sulla σ -algebra di Borel \mathfrak{B} di \mathbb{R} e che $f(A) = [f(A)]^*$, essendo f a valori reali. È spontaneo domandarsi se esiste una relazione funzionale tra $\sigma(A)$ e $\sigma(f(A))$; la risposta è contenuta nel seguente teorema, noto come **spectral mapping theorem**.

TEOREMA (SPECTRAL MAPPING THEOREM) - Sia $A = A^*$ ed $f \in C(\sigma(A))$ a valori reali. Allora

$$\sigma(f(A)) = \{ \mu \in \mathbb{R} : \mu = f(\lambda), \lambda \in \sigma(A) \} = f(\sigma(A)). \quad (5.44)$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo nel caso in cui f è *strettamente crescente*⁹⁸. Essendo continua e reale, f è misurabile ed $f(A)$ autoaggiunto; sia $\mathcal{F}(f(A)) = \{ \mathbb{F}_\mu(f(A)), \mu \in \mathbb{R} \}$ la famiglia spettrale di $f(A)$:

$$f(A) = \int_{\mu \in \sigma(f(A))} \mu d\mathbb{F}_\mu(f(A)), \quad \mathcal{D}_{f(A)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \int_{\mu \in \sigma(f(A))} \mu^2 d\langle \mathbb{F}_\mu(f(A))\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} < \infty \right\}.$$

D'altra parte $A = A^*$ e quindi, detta $\mathcal{E}(A)$ la famiglia spettrale di A , si ha che $f(A)$ si rappresenta equivalentemente nella forma (5.42), ovvero $f(A) = \int_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) d\mathbb{E}_\lambda(A)$. Adoperando il cambio di variabile $\mu = f(\lambda)$ e tenendo presente l'unicità della famiglia spettrale, si perviene all'uguaglianza

$$\int_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) d\mathbb{F}_{f(\lambda)}(f(A)) = \int_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) d\mathbb{E}_\lambda(A) \quad \iff \quad \mathbb{F}_{f(\lambda)}(f(A)) = \mathbb{E}_\lambda(A) \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

Dunque $\sigma(f(A))$ è completamente determinato da $\mathcal{E}(A)$. Infatti, se $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$, allora $\mathbb{E}_{\lambda_0}(A)$ è discontinua in λ_0 , ma $f \in C(\sigma(A))$ per cui $\mathbb{F}_{f(\lambda_0)}(f(A))$ è discontinua in $f(\lambda_0)$, ovvero $f(\lambda_0) \in \sigma_p(f(A))$. Inoltre $\mathcal{M}_{\lambda_0} = \mathcal{M}_{f(\lambda_0)}$ poiché $\mathbb{F}_{f(\lambda_0)^+} - \mathbb{F}_{f(\lambda_0)^-} = \mathbb{E}_{\lambda_0^+} - \mathbb{E}_{\lambda_0^-}$. Analogamente, se $\lambda_0 \in \sigma_c(A)$ allora $\mathbb{F}_{f(\lambda)}$ è continua ma non costante in ogni intorno di $f(\lambda_0)$, ovvero $f(\lambda_0) \in \sigma_c(f(A))$. In definitiva $f(\sigma(A)) \subseteq \sigma(f(A))$. Applicando lo stesso ragionamento ad f^{-1} troviamo che $f(\sigma(A)) \supseteq \sigma(f(A))$. \square

⁹⁷Per approfondimenti, si veda a.e. *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 2.*

⁹⁸Dimostrazione completa: *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, vol. 1, pgg. 221–224.*

Esempi

- FAMIGLIA SPETTRALE DELL'OPERATORE POSIZIONE SU $L_2(\mathbb{R})$

Sappiamo che $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ su $L_2(\mathbb{R})$ e che $\sigma(\mathbf{q}) = \mathbb{R}$. Costruiamo $\mathcal{E}(\mathbf{q}) = \{\mathbb{E}_x(\mathbf{q}), x \in \mathbb{R}\}$ adoperando la formula (5.34): tenendo conto del teorema dei residui, si trova che

$$\begin{aligned} [\mathbb{E}_t(\mathbf{q})\psi](x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} [\mathcal{R}_{t'+i\varepsilon}(\mathbf{q}) - \mathcal{R}_{t'-i\varepsilon}(\mathbf{q})] \psi(x) dt' \\ &= \frac{\psi(x)}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t+\delta} \frac{dt'}{x-t'-i\varepsilon} - \int_{-\infty}^{t+\delta} \frac{dt'}{x-t'+i\varepsilon} \right) = \chi_{(-\infty, t]} \psi(x), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

dove $\chi_{(-\infty, t]} = \theta(x \leq t)$ è la funzione caratteristica associata all'intervallo $(-\infty, t]$.

- FAMIGLIA SPETTRALE DELL'OPERATORE IMPULSO SU $L_2(\mathbb{R})$

Sia $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$, allora $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$; per determinare la famiglia spettrale di $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ occorre dapprima costruirne l'operatore risolvete. Siano quindi $\psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ e $\phi \in L_2(\mathbb{R})$: evidentemente $[\mathcal{T}_\lambda(\mathbf{p})\psi](x) = -\nu\psi'(x) + \lambda\psi(x) = \phi(x)$ per $\Im(\lambda) \neq 0$, la cui soluzione generale è

$$\psi(x) = \{[\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{p})]\phi\}(x) = i \int_a^x e^{i\lambda(x-y)} \phi(y) dy.$$

Naturalmente, la costante $a \in \mathbb{R}$ dovrà essere tale per cui $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ qualunque sia $\phi \in L_2(\mathbb{R})$. Per imporre tale condizione è comodo ricorrere alla cosiddetta **disuguaglianza di Young**: se

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \quad \implies \quad \|f * g\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (5.45)$$

Nel caso in studio, un cambio di variabile mostra che ψ è esprimibile come prodotto di convoluzione

$$\psi(x) = i \int_a^x e^{i\lambda(x-y)} \phi(y) dy \stackrel{t \equiv x-y}{=} \int_0^{x-a} e^{i\lambda t} \phi(x-t) dt;$$

inoltre, cambiando gli estremi d'integrazione, si ha che ψ si riscrive equivalentemente come

$$\psi(x) = i \int_{-\infty}^{x-a} \theta(t) e^{i\lambda t} \phi(x-t) dt = -i \int_{x-a}^{+\infty} \theta(-t) e^{i\lambda t} \phi(x-t) dt.$$

La disuguaglianza di Young, applicata alle precedenti espressioni, porta a concludere che

$$\begin{cases} a = -\infty & \implies & \psi \in L_2(\mathbb{R}) & \iff & e^{i\lambda t} \theta(t) \in L_1(\mathbb{R}) & \iff & \Im(\lambda) > 0, \\ a = +\infty & \implies & \psi \in L_2(\mathbb{R}) & \iff & e^{i\lambda t} \theta(-t) \in L_1(\mathbb{R}) & \iff & \Im(\lambda) < 0. \end{cases}$$

Sostituendo le precedenti condizioni nell'espressione integrale di $\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{p})$, si trova quanto segue:

$$\{[\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{p})]\phi\}(x) = \begin{cases} +i \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(x-y)} \phi(y) dy & \text{se } \Im(\lambda) > 0, \\ -i \int_x^{+\infty} e^{i\lambda(x-y)} \phi(y) dy & \text{se } \Im(\lambda) < 0. \end{cases}$$

Sicché $\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{p})$ è una funzione analitica $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $\Im(\lambda) \neq 0$; inoltre, preso $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, si ha che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ è $\mathcal{R}_{\lambda+i\varepsilon}(\mathbf{p}) \neq \mathcal{R}_{\lambda-i\varepsilon}(\mathbf{p})$ ovvero⁹⁹ $\sigma(\mathbf{p}) = \mathbb{R}$ (corollario “valori spettrali”). Possiamo ora costruire la famiglia spettrale $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \{\mathbb{E}_x(\mathbf{p}), x \in \mathbb{R}\}$ ricorrendo nuovamente alla formula (5.34):

$$\begin{aligned} \{[\mathbb{E}_t(\mathbf{p})]\psi\}(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} [\mathcal{R}_{t'+i\varepsilon}(\mathbf{p}) - \mathcal{R}_{t'-i\varepsilon}(\mathbf{p})] \psi(x) dt' \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it'(x-y)} e^{-\varepsilon|x-y|} \psi(y) dy dt'. \end{aligned}$$

⁹⁹Il risultato è in accordo con quanto trovato negli esempi del §5.2.2 invocando il teorema “spettro di operatori simili”.

Si noti che $\mathbb{E}_\infty(\mathbf{p})$ è l'operatore associato alla trasformata di Fourier inversa, infatti

$$\{[\mathbb{E}_\infty(\mathbf{p})]\psi\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it'y} e^{-\varepsilon|x-y|} \psi(y) \, dy \, dt',$$

avendo sottinteso il limite su ε, δ . Il formalismo introduce spontaneamente il coefficiente di “**smorzamento adiabatico**” $e^{-\varepsilon|x-y|}$ il quale permette di applicare l'operatore di Fourier a funzioni di $L_2(\mathbb{R})$ (la trasformata di Fourier senza regolatore si applica solo su $L_1 \cap L_2$).

◦ FAMIGLIA SPETTRALE DELL'OPERATORE DI LAPLACE SU $L_2(\mathbb{R})$

Sia $(\mathbf{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}))$: sappiamo che $\mathbf{p}^2 = (\mathbf{p}^2)^*$ essendo $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ autoaggiunto. La famiglia spettrale di $(\mathbf{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}))$ si costruisce a partire da quella di $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$, infatti per il risolvente si trova che

$$\mathcal{R}_{\lambda^2}(\mathbf{p}^2) = (\mathbf{p}^2 - \lambda^2 \mathbf{1})^{-1} = \frac{1}{2\lambda} [(\mathbf{p} - \lambda \mathbf{1})^{-1} - (\mathbf{p} + \lambda \mathbf{1})^{-1}] = \frac{1}{2\lambda} [\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{p}) - \mathcal{R}_{-\lambda}(\mathbf{p})].$$

Sostituendo l'espressione di $\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{p})$ ricavata nell'esercizio precedente, risulta essere

$$\{[\mathcal{R}_{\lambda^2}(\mathbf{p}^2)]\psi\}(x) = \frac{i}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda|x-y|} \psi(y) \, dy.$$

Nella variabile complessa $\mu = \lambda^2$, il risolvente ha un taglio in corrispondenza di \mathbb{R}^+ , che costituisce lo spettro continuo, ovvero $\sigma(\mathbf{p}^2) = \mathbb{R}^+$. Si possono quindi determinare le espressioni per qualsiasi funzione di \mathbf{p}^2 : dalla formula di Riesz–Dunford si trova, ad esempio, che

$$(e^{-\frac{it}{2}\mathbf{p}^2} \psi)(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathcal{R}_\mu(\mathbf{p}^2) e^{-\frac{it\mu}{2}} \psi(x) \, d\mu = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{it\mu}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sqrt{\mu}|x-y|} \psi(y) \, dy \, d\mu,$$

dove Γ è un cammino che racchiude $\sigma(\mathbf{p}^2)$. In definitiva, tornando alla variabile λ^2 , risulta essere:

$$(e^{-\frac{it}{2}\mathbf{p}^2} \psi)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \oint_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{it\lambda^2}{2} + i\sqrt{\mu}|x-y|}}{\sqrt{\mu}} \, d\mu \, dy \stackrel{\mu=\lambda^2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{it\lambda^2}{2} - i\lambda|x-y|\right)} \, d\lambda \, dy.$$

Prolungando $\int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2+bx+c)} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}-c}$ ad $a, b, c \in \mathbb{C}$, la precedente ha come risultato

$$(e^{-\frac{it}{2}\mathbf{p}^2} \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi it}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}(x-y)^2} \psi(y) \, dy. \quad (5.46)$$

Sostituendo $t \rightarrow \frac{t}{m}$ ed indicando con $\mathcal{K}(\mathbf{p}) := \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2$ l'hamiltoniano di particella libera, risulta

$$(e^{-it\mathcal{K}(\mathbf{p})} \psi)(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi it}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{im}{2t}(x-y)^2} \psi(y) \, dy. \quad (5.47)$$

Allo stesso risultato saremmo potuti giungere studiando lo spettro di $\mathcal{K}(\mathbf{p})$: infatti, gli operatori $\mathcal{K}(\mathbf{p})$ e \mathbf{p}^2 sono definiti a meno di una trasformazione di scala di parametro $\lambda = (2m)^{-1/2}$ e (come vedremo nel prossimo paragrafo) l'azione del gruppo di tali trasformazioni è implementata su $L_2(\mathbb{R})$ da un operatore unitario $(\mathcal{U}_\lambda, L_2(\mathbb{R}))$ tale che $\mathcal{K}(\mathbf{p}) = \mathcal{U}_\lambda^{-1} \mathbf{p}^2 \mathcal{U}_\lambda$; quindi $\sigma(\mathcal{K}(\mathbf{p})) = \sigma(\mathbf{p}^2) = \mathbb{R}^+$ (teorema “spettro di operatori simili”, §5.2.2) ed i due operatori hanno eguale famiglia spettrale.

5.4 Gruppi unitari ad un parametro e Teorema di Stone

Questa sezione completa l'introduzione ai concetti di base per la comprensione della struttura matematica della Meccanica Quantistica. Gli strumenti esposti finora consentono di descrivere per lo più gli aspetti stazionari della teoria; la dinamica, invece, è regolata dal **quarto postulato** e si basa essenzialmente sulla teoria dei *gruppi ad un parametro di operatori unitari* in spazi di Hilbert ed, in particolare, sul *teorema di Stone*. Al fine di enunciare quest'ultimo teorema, richiamiamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE (CONVERGENZA FORTE) - Una successione $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di operatori di $B(\mathcal{H})$, \mathcal{H} di Hilbert, si dice **fortemente convergente** se $\{A_n \mathbf{x}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è fortemente convergente $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, ovvero se

$$\exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad \text{tale che} \quad \|(A_n - A)\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}.$$

In tal caso, si dirà che $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è il **limite forte** di $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e si scriverà $A = s\text{-}\lim_n A_n$.

Si può dimostrare che se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$ converge fortemente¹⁰⁰, allora $A = s\text{-}\lim_n A_n \in B(\mathcal{H})$.

DEFINIZIONE (GRUPPO UNIPARAMETRICO FORTEMENTE CONTINUO) - Sia $\{\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ una famiglia di operatori di $B(\mathcal{H})$. Diremo che tale famiglia individua un **gruppo ad un parametro di operatori** se

$$\mathcal{B}_t \mathcal{B}_{t'} = \mathcal{B}_{t+t'} \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}. \quad (5.48)$$

In particolare, il gruppo uniparametrico $\{\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ si dice **fortemente continuo** se

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{t_0} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \text{equivalentemente} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \quad \mathcal{B}_t \mathbf{x} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \mathcal{B}_{t_0} \mathbf{x} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R},$$

ovvero se la funzione $\mathcal{B}_{(\cdot)} \mathbf{x} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{B}_t \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ è continua $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$.

Pertanto, un gruppo ad un parametro di operatori è un *omomorfismo* dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ nella C^* -algebra $B(\mathcal{H})$, ovvero può essere rivisto come una “rappresentazione” di $(\mathbb{R}, +)$ su \mathcal{H} . Si noti che dalla (5.48) seguono le proprietà $\mathcal{B}_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{B}_t^{-1} = \mathcal{B}_t$: infatti, posto $t = 0$ nella (5.48) si trova $\mathcal{B}_0 \mathcal{B}_{t'} = \mathcal{B}_{t'} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \mathcal{B}_{t'} \quad \forall t' \in \mathbb{R}$; inoltre $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \mathcal{B}_t^{-1} \mathcal{B}_t$ e quindi $\mathcal{B}_{-t} = \mathcal{B}_t^{-1} \mathcal{B}_{t-t} = \mathcal{B}_t^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

In relazione ai gruppi di operatori si usa introdurre il concetto di generatore infinitesimale del gruppo.

DEFINIZIONE (GENERATORE INFINITESIMALE) - Sia $\{\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ un gruppo ad un parametro di operatori definiti su \mathcal{H} . L'operatore (A, \mathcal{D}_A) è detto **generatore infinitesimale** del gruppo $\{\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ se

$$A\mathbf{x} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{B}_t - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{x}}{t} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A, \quad \mathcal{D}_A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{B}_t - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{x}}{t} \right\}. \quad (5.49)$$

Il generatore infinitesimale può essere rivisto come “derivata forte” del gruppo rispetto al parametro da cui esso dipende: infatti, tenendo conto del concetto di limite forte ed essendo $\mathcal{B}_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, possiamo definire l'operatore derivata forte $s\text{-}\frac{d}{dt}$ come *limite forte del rapporto incrementale*, sicché su \mathcal{D}_A

$$A = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_0}{t} \quad \iff \quad A = s\text{-}\frac{d\mathcal{B}_t}{dt} \Big|_{t=0}.$$

¹⁰⁰Ricordiamo che per una successione di operatori $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di $B(\mathcal{H})$ tre tipi di convergenza hanno maggior rilievo:

- o **convergenza in norma** (o *uniforme*), ovvero se $\exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tale che $\|A_n - A\|_{B(\mathcal{H})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- o **convergenza forte**, ovvero se $\exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tale che $\|(A - A_n)\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$;
- o **convergenza debole**, ovvero se $\exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tale che $\|f(A_n \mathbf{x}) - f(A\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \text{ e } \forall f \in \mathcal{H}'$.

Nei tre casi si usa dire che $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è rispettivamente il *limite uniforme, forte e debole* di $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si può dimostrare che *conv. uniforme* \Rightarrow *conv. forte* \Rightarrow *conv. debole* e che se $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ allora *conv. debole* \Rightarrow *conv. forte*; esistono tuttavia esempi di spazi infinito dimensionali sui quali convergenza debole e forte sono equivalenti, come ad esempio $\ell_1(\mathbb{R})$.

Ad ogni gruppo uniparametrico fortemente continuo di operatori corrisponde un generatore infinitesimale densamente definito. Non dimostreremo questo risultato nella sua generalità ma nel caso particolare in cui $\{\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ è un **gruppo ad un parametro di operatori unitari** su \mathcal{H} .

Cominciamo col dimostrare che se (A, \mathcal{D}_A) è autoaggiunto e densamente definito su \mathcal{H} , allora la famiglia $\{\mathcal{U}_t(A) \equiv e^{tA}, t \in \mathbb{R}\}$ è un gruppo uniparametrico fortemente continuo di operatori unitari.

TEOREMA (GRUPPO UNIPARAMETRICO FORTEMENTE CONTINUO DI OPERATORI UNITARI) - Sia $A = A^*$ densamente definito su \mathcal{H} ed $\mathcal{E}(A) = \{\mathbb{E}_\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$ la sua famiglia spettrale; sia inoltre

$$\mathcal{U}_t(A) \equiv e^{tA} = \int_{\lambda \in \sigma(A)} e^{t\lambda} d\mathbb{E}_\lambda(A) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Allora $\{\mathcal{U}_t(A), t \in \mathbb{R}\}$ è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari ed $\imath A$ è il generatore infinitesimale del gruppo. Inoltre, si trova che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ risulta $\mathcal{U}_t(A)\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. La famiglia $\{\mathcal{U}_t(A) = e^{tA}, t \in \mathbb{R}\}$ forma un gruppo di operatori unitari: infatti A commuta con sé per cui $\mathcal{U}_t(A)\mathcal{U}_{t'}(A) = e^{tA}e^{t'A} = e^{\imath(t+t')A} = \mathcal{U}_{t+t'}(A)$, inoltre $\mathcal{U}_0(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ ed, alla luce della formula (f₄), è $[\mathcal{U}_t(A)]^* = \overline{\mathcal{U}_t(A)} = \mathcal{U}_{-t}(A) = [\mathcal{U}_t(A)]^{-1}$. Sia ora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ generico, allora

$$\|(e^{tA} - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\lambda \in \sigma(A)} |e^{t\lambda} - 1|^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}};$$

d'altra parte $\forall t \in \mathbb{R}$ risulta essere $|e^{t\lambda} - 1|^2 = 2(1 - \cos \lambda t) \leq 4$ ed $|e^{t\lambda} - 1|^2 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$. Sotto tali ipotesi vale il *teorema sulla convergenza dominata secondo Lebesgue*¹⁰¹, grazie al quale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|(\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lim_{t \rightarrow 0} |e^{t\lambda} - 1|^2 d\langle \mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H},$$

ovvero $\{\mathcal{U}_t(A), t \in \mathbb{R}\}$ è fortemente continuo in $t = 0$. La continuità forte in $t = 0$ implica la continuità forte $\forall t_0 \in \mathbb{R}$: infatti, $\mathcal{U}_t(A)$ è unitario e $t' - t_0 \rightarrow 0$ per $t' \rightarrow t_0$, quindi $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ e $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\|(\mathcal{U}_{t'}(A) - \mathcal{U}_{t_0}(A))\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \|[\mathcal{U}_{t'}(A)(\mathbb{1}_{\mathcal{H}} - \mathcal{U}_{t_0}^{-1}(A)\mathcal{U}_{t_0}(A))]\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \|(\mathbb{1}_{\mathcal{H}} - \mathcal{U}_{t_0-t'}(A))\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{t' \rightarrow t_0} 0,$$

essendo $\mathcal{U}_t(A)$ fortemente continuo in $t = 0$. Resta da far vedere che $\imath A$ è un generatore infinitesimale del gruppo: per farlo, proviamo che se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{x}$ esiste allora $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ e che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ risulta essere $\imath A = s\text{-}d_t \mathcal{U}_t(A)|_{t=0}$. L'ultima parte è ovvia poiché se su \mathcal{D}_A la derivata forte esiste, allora

$$s\text{-}\frac{d}{dt} \mathcal{U}_t(A) \Big|_{t=0} = s\text{-}\frac{d}{dt} e^{\imath\lambda A} \Big|_{t=0} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + \imath t A + \mathcal{O}(t^2) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}}}{t} = \imath A.$$

Per la prima parte invece, sia $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_B$ con \mathcal{D}_B definito come

$$\mathcal{D}_B = \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{H} : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{y}}{t} \right\}$$

e poniamo $\imath B\mathbf{y} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{y}$. Evidentemente, $\forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathcal{D}_B$ è

$$\begin{aligned} \langle B\mathbf{y}, \mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\langle (\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{y}, \imath\mathbf{y}' \right\rangle_{\mathcal{H}} = \imath \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\langle \mathbf{y}, \mathcal{U}_{-t}\mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}} \right) \\ &= \imath \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle \mathbf{y}, (\mathcal{U}_{-t}(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}} = -\imath \left\langle \mathbf{y}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}})\mathbf{y}' \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

¹⁰¹TEOREMA (CONVERGENZA DOMINATA SECONDO LEBESGUE) - Sia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili dello spazio di misura (X, \mathfrak{F}, μ) tale che $\lim_n g_n(x)$ esiste quasi ovunque ed è misurabile. Se esiste una funzione integrabile $g \geq 0$ tale che $|g_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in X$ ed $n \in \mathbb{N}$ (ovvero se la successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è dominata), allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\mu.$$

Esso generalizza il *teorema di passaggio del limite sotto il segno di integrale*; tuttavia, per l'integrale di Riemann è necessaria la convergenza uniforme di $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, mentre per l'integrale di Lebesgue ne è sufficiente la convergenza puntuale.

ovvero $B \subseteq B^*$. Ma $B \supseteq A$ (per costruzione) ed $A = A^*$ ovvero è massimalmente simmetrico, per cui $B = A$. Infine, sia $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$: $\mathcal{U}_t(A)$ commuta con A ed è unitario, quindi $\forall t \in \mathbb{R}$ risulta essere

$$\|A(\mathcal{U}_t(A)\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 d \|\mathcal{U}_t(A)(\mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 d \|\mathbb{E}_\lambda(A)\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty;$$

di conseguenza se $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$, allora anche $\mathcal{U}_t(A)\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \forall t \in \mathbb{R}$. \square

Il viceversa di quanto appena dimostrato costituisce il contenuto del noto **teorema di Stone**.

TEOREMA (STONE) - Sia $\{\mathcal{U}_t, t \in \mathbb{R}\}$ un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari su \mathcal{H} . Allora esiste uno ed un solo operatore autoaggiunto (A, \mathcal{D}_A) , $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ tale che

$$\mathcal{U}_t = e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ definiamo il vettore $\mathbf{x}_\phi \equiv \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \mathcal{U}_t \mathbf{x} dt \in \mathcal{H}$: la forte continuità di $\mathcal{U}_t : \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ fa sì che l'integrale possa essere inteso nel senso di Riemann. Sia allora \mathcal{D} l'insieme delle combinazioni lineari finite dei vettori del tipo \mathbf{x}_ϕ : scelta $j(t) \in C_0^\infty((-1, 1))$ positiva e tale per cui $\int_{\mathbb{R}} j(t) dt = 1$ ed indicando $j_\varepsilon(t) \equiv \varepsilon^{-1} j(t/\varepsilon)$, si trova che

$$\|\mathbf{x}_{j_\varepsilon} - \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = \left\| \int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(t) \mathcal{U}_t \mathbf{x} dt - \mathbf{x} \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| \int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(t) (\mathcal{U}_t - \mathbb{1}) \mathbf{x} dt \right\|_{\mathcal{H}} \leq \sup_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \{ \|(\mathcal{U}_t - \mathbb{1}) \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} \}.$$

Ma $\{\mathcal{U}_t\}$ è fortemente continuo, per cui $\overline{\mathcal{D}} = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Calcoliamo $s\text{-}\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\mathcal{U}_s - \mathbb{1}) \mathbf{x}$: $\forall \mathbf{x}_\phi \in \mathcal{D}$ è

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{U}_s - \mathbb{1}}{s} \right) \mathbf{x}_\phi = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \left(\frac{\mathcal{U}_{s+t} - \mathcal{U}_t}{s} \right) \mathbf{x} dt = - \int_{\mathbb{R}} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(\tau - s) - \phi(\tau)}{s} \mathcal{U}_\tau \mathbf{x} d\tau = \mathbf{x}_{-\phi'},$$

essendo $\frac{1}{s}(\phi(\tau) - \phi(\tau - s)) \rightrightarrows \phi'(\tau)$. Per $\mathbf{x}_\phi \in \mathcal{D}$ definiamo $\iota A \mathbf{x}_\phi = \mathbf{x}_{-\phi'}$: evidentemente $\mathcal{U}_t, A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $[\mathcal{U}_t, A] \mathbf{x}_\phi = \mathbf{0} \forall \mathbf{x}_\phi \in \mathcal{D}$ ed $\mathbf{x}_{-\phi} = -\mathbf{x}_\phi$ per cui $A \mathbf{x}_\phi = \iota \mathbf{x}_{\psi'}$; inoltre $A \subseteq A^*$, infatti $\forall \mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\psi \in \mathcal{D}$

$$\langle A \mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathbf{x}_\phi, \iota \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{U}_{-s} - \mathbb{1}) \mathbf{x}_\psi}{s} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}_\phi, \iota \mathbf{x}_{\psi'} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}_\phi, A \mathbf{x}_{\psi'} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Proviamo ora che A è ess. autoaggiunto. Sia $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_{A^*}$ con $A^* \mathbf{u} \equiv \iota \mathbf{u}$: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}$ si ha che

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{U}_t \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \iota A \mathcal{U}_t \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}} = -\iota \langle \mathcal{U}_t \mathbf{x}, A^* \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{U}_t \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Sicché $h(t) \equiv \langle \mathcal{U}_t \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}}$ è soluzione di $h' = h$, ovvero $h(t) = ce^t$; ma \mathcal{U}_t è limitato e quindi lo è anche $h(t)$ e ciò accade $\Leftrightarrow c = 0$; in modo analogo si prova che $A^* \mathbf{u} = -\iota \mathbf{u}$ non ammette soluzioni non banali. In definitiva $A \subseteq A^*$ ed $\mathcal{N}_A = \{\mathbf{0}\}$, ovvero A è ess. autoaggiunto (teorema "sim. vs ess. autoaggiunto", §4.4). Resta da dimostrare che $\mathcal{U}_t = e^{tB}$, essendo (per brevità) $B \equiv A$. Sia quindi $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$: il precedente teorema garantisce allora che $e^{tB} \mathbf{x} \in \mathcal{D}_B$. Sia allora $w_t \equiv \mathcal{U}_t \mathbf{x} - e^{tB} \mathbf{x}$: tale funzione è a valori vettoriali, *fortemente differenziabile* e verifica l'identità $w_t' = \iota A \mathcal{U}_t \mathbf{x} - \iota B e^{tB} \mathbf{x} = \iota B w_t$, quindi

$$\frac{d}{dt} \|w_t\|_{\mathcal{H}}^2 = -\iota \langle B w_t, w_t \rangle_{\mathcal{H}} + \iota \langle w_t, B w_t \rangle_{\mathcal{H}} = 0;$$

pertanto $w_t = \mathbf{0} \forall t \in \mathbb{R}$. Dunque $\mathcal{U}_t \mathbf{x} = e^{tB} \mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, ma \mathcal{D} è denso, quindi $\mathcal{U}_t = e^{tB}$. \square

Un'applicazione del teorema di Stone è legata alla risoluzione di equazioni differenziali in spazi di Hilbert. In tal caso, saranno coinvolte funzioni di variabile reale a valori vettoriali del tipo $\mathbf{x}(\cdot) : t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathcal{H}$, per le quali è necessario introdurre le nozioni di continuità e di derivabilità: diremo che $\mathbf{x}(t) : (a, b) \rightarrow \mathcal{H}$ è rispettivamente **continua** e **derivabile** in (a, b) se $\forall c \in (a, b)$

$$\lim_{t \rightarrow c} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(c)\|_{\mathcal{H}} = 0, \quad \exists \mathbf{x}'(c) \in \mathcal{H} \quad \text{t.c.} \quad \lim_{t \rightarrow c} \left\| \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(c)}{t - c} - \mathbf{x}'(c) \right\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Si noti che la condizione di derivabilità risalta cosa si intende con la richiesta $\mathbf{x}(t) \in C^1((a, b))$.

COROLLARIO (EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN SPAZI DI HILBERT) - Sia $A = A^*$, $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ si consideri il “problema di Cauchy”

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \iota A \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (5.50)$$

Allora, esiste un'unica soluzione $\mathbf{x}(t) \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$ t.c. $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{D}_A \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$, rappresentabile nella forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\iota t A} \mathbf{x} \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (5.51)$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{U}_t(A) \equiv e^{\iota t A}$. Cominciamo col dimostrare che $\mathbf{x}(t) = \mathcal{U}_t(A) \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$; per farlo, verifichiamo che il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{U}_t(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}}) \mathbf{x}(t)$ esiste:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}_s(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}}}{s} \mathbf{x}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}_{s+t}(A) - \mathcal{U}_t(A)}{s} \mathbf{x} = \mathcal{U}_t(A) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}_s(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}}}{s} \mathbf{x}$$

e $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\mathcal{U}_s(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}}) \mathbf{x}$ esiste essendo $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$. Proviamo ora che $\mathbf{x}(t) \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$. Per prima cosa occorre verificare che $\mathbf{x}(t) \in C(\mathbb{R}_0^+)$: evidentemente $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A$ e $\forall s \in \mathbb{R}_0^+$ si ha che

$$\lim_{t \rightarrow s} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)\|_{\mathcal{H}} = \lim_{t \rightarrow s} \|(\mathcal{U}_t(A) - \mathcal{U}_s(A)) \mathbf{x}\|_{\mathcal{H}} = 0$$

essendo $\{\mathcal{U}_t(A), t \in \mathbb{R}\}$ fortemente continuo. La derivabilità di $\mathbf{x}(t)$ si prova nel modo seguente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} - \iota A \mathbf{x}(t) \right\|_{\mathcal{H}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{\mathcal{U}_h(A) - \mathbb{1}_{\mathcal{H}}}{h} - \iota(A)A \right) \mathbf{x} \right\|_{\mathcal{H}} = 0$$

essendo ιA il generatore infinitesimale di $\{\mathcal{U}_t(A), t \in \mathbb{R}\}$. Ciò prova che $\mathbf{x}(t) \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$ e che $\mathbf{x}(t) = \mathcal{U}_t(A) \mathbf{x}$ è la soluzione del problema (5.50). Proviamo infine che tale soluzione è unica: siano $\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{D}_A$ soluzioni distinte di (5.50). Allora $\|\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0)\|_{\mathcal{H}} = 0$; inoltre, tenendo presente che $d_t \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle_{\mathcal{H}} = 2\Re\{\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) \rangle_{\mathcal{H}}\}$, si trova quanto segue:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\Re\{\langle \iota A(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)), \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) \rangle_{\mathcal{H}}\} = 0,$$

ovvero $\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$, essendo $\|\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0)\|_{\mathcal{H}} = 0$. Quindi $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ su \mathbb{R}_0^+ . \square

Il corollario appena dimostrato mette in evidenza l'importanza che il teorema di Stone ha nelle applicazioni alla Meccanica Quantistica. Sappiamo infatti che se $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ è il vettore rappresentativo dello stato di un sistema fisico \mathcal{S} al tempo t , allora deve esistere un operatore $(\mathcal{U}_t, \mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ tale che $\mathbf{x}(t) = \mathcal{U}_t \mathbf{x}(0)$. Tale operatore deve essere *lineare* (dovendo soddisfare il principio di sovrapposizione) ed *unitario* (essendo ogni stato ugualmente probabile ad ogni istante); inoltre, ha senso (per gran parte dei gruppi di trasformazione) richiedere la forte continuità di $\{\mathcal{U}_t, t \in \mathbb{R}\}$. Dal teorema di Stone segue allora che deve esistere un operatore (A, \mathcal{D}_A) densamente definito ed autoaggiunto, tale che $\mathcal{U}_t = e^{\iota t A}$; in particolare

$$\mathbf{x}'(t) = \iota A \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_A.$$

Ma l'equazione di Schrödinger temporale è di questa forma, con la singola differenza che ora $A = H$, dove (H, \mathcal{D}_H) è l'hamiltoniano del sistema. Di conseguenza, la *Schrödinger temporale* $\mathbf{x}'_{\xi}(t) = \iota H \mathbf{x}_{\xi}(t)$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se $H = H^*$.

Concludiamo osservando che il teorema di Stone, combinato col *teorema di Wigner* (vedi §1), implica una sorta di analogo quantistico del noto *teorema di Nöether*. Per *gruppi di simmetria connessi* il th.di Wigner garantisce l'esistenza di un operatore unitario che implementa su \mathcal{H} l'azione del gruppo; se l'insieme di tali operatori forma un gruppo ad un parametro fortemente continuo, vale il th.di Stone ed esiste un unico generatore. Quest'ultimo è spesso il rappresentativo di un'osservabile: ad esempio, su $L_2(\mathbb{R})$ il gruppo delle traslazioni rappresentato su $L_2(\mathbb{R})$ ha come generatore (nel senso del teorema di Stone) l'operatore impulso $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$, mentre il gruppo delle rotazioni tridimensionali attorno all'asse \hat{z} ha come generatore l'operatore associato alla componente lungo \hat{z} del momento angolare.

Esempi

Per gli esempi che verranno occorre tener a mente quanto segue. Sia \mathcal{S} un sistema fisico preparato in uno stato ξ ed \mathcal{A} una sua osservabile. Supponiamo che su \mathcal{S} agisca una trasformazione τ appartenente ad un gruppo di simmetria connesso con continuità all'identità (a.e. una traslazione o una rotazione): grazie al **teorema di Wigner** sappiamo che tale trasformazione è implementata su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ da un operatore unitario \mathcal{U}_{τ} agente sull'operatore autoaggiunto (A, \mathcal{D}_A) associato ad \mathcal{A} e su $\mathbf{x}_{\xi} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. L'azione del gruppo ammette due interpretazioni equivalenti: un'**interpretazione attiva** nella quale gli *oggetti vengono trasformati* a riferimento fissato, ed un'**interpretazione passiva** nella quale il *sistema di riferimento viene trasformato* e gli oggetti mantenuti fissi¹⁰². In interpretazione attiva, valgono le seguenti trasformazioni:

$$A \xrightarrow{\tau} A' = \mathcal{U}_{\tau}^{-1} A \mathcal{U}_{\tau}, \quad \mathbf{x}_{\xi} \xrightarrow{\tau} \mathbf{x}'_{\xi} = \mathcal{U}_{\tau} \mathbf{x}_{\xi}.$$

In particolare, se $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = L_2(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ è la funzione d'onda rappresentante lo stato ξ , si avrà che $\psi'(\mathbf{x}) = \mathcal{U}_{\tau} \psi(\mathbf{x})$; d'altra parte il valore della nuova funzione nel punto trasformato deve essere lo stesso della vecchia funzione nel punto originario, ovvero $\psi'(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x})$, dove $\mathbf{x}' = \tau \mathbf{x}$. Pertanto $\psi'(\mathbf{x}') = \psi(\tau^{-1} \mathbf{x}')$ e quindi, facendo cadere l'indice muto della variabile, si trova che

$$\psi(\mathbf{x}) \xrightarrow{\tau} \psi'(\mathbf{x}) = \psi(\tau^{-1} \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Negli esempi che seguono interpreteremo sempre in modo attivo l'azione del gruppo.

o GENERATORE DEL GRUPPO DELLE TRASLAZIONI SU $L_2(\mathbb{R}^3)$.

Sia $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{T}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^3$, dove $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$: è banale verificare che $\{\mathcal{T}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ è un gruppo abeliano connesso (a tre parametri). Per il teorema di Wigner, ciascun $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ è "rappresentato" su $L_2(\mathbb{R}^3)$ da un operatore unitario $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ tale che $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta essere

$$(\mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathcal{T}_{\mathbf{a}}^{-1} \mathbf{x}) \quad \iff \quad \psi'(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

essendo $(\mathcal{T}_{\mathbf{a}})^{-1} = \mathcal{T}_{-\mathbf{a}}$. La famiglia $\{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ individua un gruppo a tre parametri di operatori unitari: infatti $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ si ha che

$$(\mathcal{U}_{\mathbf{a}} \mathcal{U}_{\mathbf{b}} \psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathcal{T}_{-\mathbf{a}-\mathbf{b}} \mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathcal{T}_{-\mathbf{b}-\mathbf{a}} \mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{\mathbf{b}} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi)(\mathbf{x}), \quad (5.52)$$

dalle quali segue che $\mathcal{U}_{\mathbf{0}} = \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}$ ed $(\mathcal{U}_{\mathbf{a}})^{-1} = \mathcal{U}_{-\mathbf{a}}$. Tali operatori sono isometrici, infatti

$$\|\mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x} - \mathbf{a})|^2 d\mathbf{x} \stackrel{\mathbf{y} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{a}}{\det \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1}}{\int_{\mathbb{R}^3}} |\psi(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2$$

dove $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(y_1, y_2, y_3)$ è lo Jacobiano delle trasformazioni. Per cui $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ l'operatore $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ è isometrico, dunque $\mathcal{D}_{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}} = L_2(\mathbb{R}^3)$ e quindi è suriettivo ($\mathcal{R}_{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}} = \mathcal{D}_{\mathcal{U}_{-\mathbf{a}}} = \mathcal{D}_{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}}$), ovvero è unitario (come atteso). Infine, proviamo che $\{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ è fortemente continuo; per farlo è sufficiente verificarne la forte continuità in $\mathbf{a} = \mathbf{0}$: $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta essere

$$\|(\mathcal{U}_{\mathbf{a}} - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}) \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = 2\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2\Re\{\langle \mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)}\};$$

posto $\lim_{\mathbf{a}} \equiv \lim_{a_1} \lim_{a_2} \lim_{a_3}$, applichiamo il teorema sulla convergenza dominata:

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \overline{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

¹⁰²In *interpretazione attiva* un osservatore contempla due sistemi fisici ottenuti trasformando l'uno nell'altro; in *interpretazione passiva* due osservatori, collegati da una trasformazione, contemplan lo stesso sistema.

essendo $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ denso in $L_2(\mathbb{R}^3)$. Pertanto $\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \Re\{\langle \mathcal{U}_{\mathbf{a}}\psi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)}\} = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2$ e dunque

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \left\| (\mathcal{U}_{\mathbf{a}} - \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})\psi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = 2\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \Re\{\langle \mathcal{U}_{\mathbf{a}}\psi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)}\} = 0.$$

Sia consideri ora il sottogruppo $\{\mathcal{U}_{(a_1,0,0)}, a_1 \in \mathbb{R}\}$: il teorema di Stone garantisce l'esistenza di un'unico operatore autoaggiunto (A_1, \mathcal{D}_{A_1}) tale che $\mathcal{U}_{(a_1,0,0)} = e^{ia_1 A_1}$. Determiniamo il generatore infinitesimo del gruppo: per definizione \mathcal{D}_{A_1} è l'insieme delle $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ tali che esiste

$$s \frac{\partial \mathcal{U}_{(a_1,0,0)}}{\partial a_1} \Big|_{a_1=0} = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{U}_{(a_1,0,0)} - \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})}{a_1} \psi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1},$$

ovvero $\mathcal{D}_{A_1} = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \partial_{x_1}\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)\} = \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ (essendo x_2 ed x_3 fisse); allora

$$\forall \psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) \quad (iA_1\psi)(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, x_2, x_3) \iff A_1 = i \frac{\partial}{\partial x_1} = -\mathbf{p}_1,$$

dove $\mathbf{p}_1 := -i\partial_{x_1}$ è la componente dell'operatore impulso canonicamente coniugata ad x_1 . Pertanto, il generatore del gruppo delle traslazioni lungo la componente x_1 è $(-\mathbf{p}_1, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ e $\forall a_1 \in \mathbb{R}$ vale la rappresentazione $\mathcal{U}_{(a_1,0,0)} = e^{-ia_1 \mathbf{p}_1}$. In modo analogo si dimostra che i generatori dei sottogruppi $\{\mathcal{U}_{(0,a_2,0)}, a_2 \in \mathbb{R}\}$ ed $\{\mathcal{U}_{(0,0,a_3)}, a_3 \in \mathbb{R}\}$ sono rispettivamente $(-\mathbf{p}_2, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$ e $(-\mathbf{p}_3, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}))$. Ma $\{\mathcal{T}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ è abeliano, per cui $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = \mathbf{0} \quad \forall i, j = 1, 2, 3$ e quindi $\{\mathcal{U}_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ ha come generatore l'operatore $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ dove $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}^3) : \partial_{x_1}\psi, \partial_{x_2}\psi, \partial_{x_3}\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)\}$. Sicché $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ si ha che $(\mathcal{U}_{\mathbf{a}}\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = e^{-ia_1 \mathbf{p}_1} e^{-ia_2 \mathbf{p}_2} e^{-ia_3 \mathbf{p}_3} \psi(\mathbf{x})$ e cioè

$$\mathcal{U}_{\mathbf{a}} = e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}.$$

Tale operatore implementa su $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$ l'azione del gruppo delle traslazioni tridimensionali.

◦ GENERATORE DEL GRUPPO ORTOGONALE SPECIALE $\text{SO}(3)$ SU $L_2(\mathbb{R}^3)$

Sia $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ il *gruppo generale lineare*, ovvero il gruppo delle matrici 3×3 invertibili a valori reali ed $\text{SO}(3) = \{\mathcal{R} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) : \mathcal{R}^\top \mathcal{R} = \mathbf{1}_3 = \mathcal{R} \mathcal{R}^\top, \det \mathcal{R} = +1\}$ la rappresentazione naturale del gruppo ortogonale speciale su \mathbb{R}^3 , ovvero il gruppo delle matrici ortogonali a determinante unitario. In particolare, sia $\mathcal{R}_\theta \in \text{SO}(3)$ una rotazione di un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ attorno all'asse \hat{x}_3 :

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

per cui $\mathcal{R}_\theta(\cdot) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{R}_\theta \mathbf{x} = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, x_3) \in \mathbb{R}^3$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. La famiglia $\{\mathcal{R}_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$ individua un sottogruppo ad un parametro di $\text{SO}(3)$ e quest'ultimo è connesso: per il teorema di Wigner, l'azione di ciascun \mathcal{R}_θ è implementata su $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$ da un operatore $\mathcal{U}_\theta(\cdot) : \psi \in L_2(\mathbb{R}^3) \mapsto (\mathcal{U}_\theta\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3)$, la cui collezione forma a sua volta un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari. Tali proprietà si dimostrano procedendo come per il gruppo delle traslazioni; vediamo solo l'unitarietà:

$$\|\mathcal{U}_\theta\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \stackrel{\mathbf{y} \equiv \mathcal{R}_\theta^{-1}\mathbf{x}}{\det \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \mathcal{R}_\theta = 1} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

quindi $\mathcal{D}_{\mathcal{U}_\theta} = L_2(\mathbb{R}^3)$, ma $(\mathcal{U}_\theta)^{-1} = \mathcal{U}_{-\theta}$ (essendo $\{\mathcal{U}_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$ un gruppo ad un parametro) per cui $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_\theta} = L_2(\mathbb{R}^3)$ ovvero \mathcal{U}_θ è suriettivo. Alla luce del teorema di Stone, determiniamo il generatore infinitesimo di $\{\mathcal{U}_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$. Per farlo è comodo ricorrere al fatto che $\text{SO}(3)$ è un **gruppo di Lie**, ovvero ha la struttura di una *varietà differenziabile*. In tal caso, è lecito sviluppare ciascun elemento del gruppo in un intorno dell'identità: allora, per $|\theta| \ll 1$ ha senso scrivere

$$\mathcal{R}_\theta \approx \mathbf{1}_3 + \theta \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Dovendo soddisfare l'identità $\mathcal{R}^\top \mathcal{R} = \mathbf{1}_3$, la matrice $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dev'essere *antisimmetrica*:

$$\mathbf{1}_3 = \mathcal{R}_\theta^\top \mathcal{R}_\theta = \mathbf{1}_3 + \theta \Omega + \theta \Omega^\top + \mathcal{O}(\theta^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega^\top = -\Omega,$$

avendo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore al primo. In particolare, dev'essere

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenendo presente che $\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta} \approx \mathbf{1}_3 - \theta \Omega$, ed indicando con ιA il generatore del gruppo, si trova che $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ fattorizzabile nel prodotto di una funzione radiale e di un'armonica sferica¹⁰³ è

$$\begin{aligned} (\iota A \psi)(\mathbf{x}) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{U}_\theta - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})}{\theta} \psi(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\psi(x_1 + \theta x_2, x_2 - \theta x_1, x_3) - \psi(x_1, x_2, x_3)}{\theta} \\ &= h \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta x_2 \partial_{x_1} \psi(x_1, x_2, x_3) - \theta x_1 \partial_{x_2} \psi(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{O}(\theta^2)}{\theta} = (x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) \psi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ma $\mathcal{L} := \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{p}$ ed $\mathfrak{L}_3 = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{q}_2 \mathfrak{p}_1 \xrightarrow{R.S.} \iota(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2})$ per cui $A = -\mathfrak{L}_3$. In definitiva, una rotazione di $\theta \in [0, 2\pi)$ attorno ad \hat{x}_3 è implementata in $L_2(\mathbb{R}^3)$ da un op.unitario \mathcal{U}_θ rappresentabile come l'esponenziale dell'operatore associato alla componente lungo \hat{x}_3 del momento angolare

$$\mathcal{U}_\theta = e^{-i\theta \mathfrak{L}_3}.$$

In generale, si prova che se $\vartheta \in [0, 2\pi)$ è una rotazione attorno all'asse \hat{n} , allora $\mathcal{U}_\theta = e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \mathfrak{L}}$.

o GENERATORE DEL GRUPPO DELLE TRASFORMAZIONI DI SCALA

Sia $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $\mathcal{S}_\lambda : \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{S}_\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ una rappresentazione del gruppo delle trasformazioni di scala su \mathbb{R}^n ; si dimostra facilmente che l'insieme $\{\mathcal{S}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ è un gruppo connesso, per cui l'azione di ciascun \mathcal{S}_λ è implementata su $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$ da un operatore unitario \mathcal{U}_λ . Costruiamo \mathcal{U}_λ di modo che la collezione $\{\mathcal{U}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ formi un gruppo ad un parametro di operatori unitari. L'operatore $(\mathcal{V}_\lambda \psi)(\mathbf{x}) = \psi(\lambda^{-1} \mathbf{x})$ non è isometrico $\forall \lambda \neq 1$ in quanto

$$\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad \|\mathcal{V}_\lambda \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(\lambda^{-1} \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \underset{\det \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\lambda \mathbf{1}_n) = \lambda^n}{\stackrel{\mathbf{y} \equiv \lambda^{-1} \mathbf{x}}{=}} \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y},$$

mentre lo è $(\mathcal{U}_\lambda \psi)(\mathbf{x}) = \lambda^{-n/2} \psi(\lambda^{-1} \mathbf{x})$; in aggiunta, tale operatore è unitario, poiché $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ e $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ risulta $(\mathcal{U}_\lambda \mathcal{U}_{\lambda'} \psi)(\mathbf{x}) = \lambda^{-n/2} (\mathcal{U}_{\lambda'} \psi)(\lambda^{-1} \mathbf{x}) = (\lambda \lambda')^{-n/2} \psi((\lambda \lambda')^{-1} \mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{\lambda \lambda'} \psi)(\mathbf{x}) = (\lambda' \lambda)^{-n/2} \psi((\lambda' \lambda)^{-1} \mathbf{x}) = \lambda'^{-n/2} (\mathcal{U}_\lambda \psi)(\lambda'^{-1} \mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{\lambda'} \mathcal{U}_\lambda \psi)(\mathbf{x})$, ovvero

$$\mathcal{U}_\lambda \mathcal{U}_{\lambda'} = \mathcal{U}_{\lambda \lambda'} = \mathcal{U}_{\lambda'} \mathcal{U}_\lambda, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+,$$

e quindi $\mathcal{U}_1 = \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ ed $(\mathcal{U}_\lambda)^{-1} = \mathcal{U}_{\lambda^{-1}}$. Dunque $\{\mathcal{U}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ è una famiglia ad un parametro di operatori unitari, ma non forma un gruppo ad un parametro di operatori: essa è una "rappresentazione" del *gruppo moltiplicativo* (\mathbb{R}, \times) su $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$ e non del gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$. Ciononostante, la riparametrizzazione $\lambda = e^t$ con $t \in \mathbb{R}$ permette di ottenere il risultato desiderato in quanto $\forall t, t' \in \mathbb{R}$ e $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{U}_t \mathcal{U}_{t'} \psi)(\mathbf{x}) = e^{-\frac{n}{2}(t+t')} \psi(e^{-(t+t')} \mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{t+t'} \psi)(\mathbf{x}).$$

¹⁰³Passando in coordinate sferiche, si dimostra che \mathcal{D}_A è composto dalle $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ fattorizzabili come $\psi_{\ell, m}(r, \theta, \phi) = R(r) \mathcal{Y}_{\ell, m}(\theta, \phi)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$; R è detta componente radiale ed $\mathcal{Y}_{\ell, m}$ sono le note *armoniche sferiche*.

Proviamo ora che $\{\mathcal{U}_t, t \in \mathbb{R}\}$ è fortemente continuo: $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \|(\mathcal{U}_t - \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^n)})\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= 2\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0} \Re \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathcal{U}_t \psi})(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} \\ &= 2\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 - 2 \Re \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{nt}{2}} \overline{\psi}(e^{-t}\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} = 0 \end{aligned}$$

avendo applicato il teorema sulla convergenza dominata e tenuto conto del fatto che $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = L_2(\mathbb{R}^n)$; pertanto $\{\mathcal{U}_t, t \in \mathbb{R}\}$ è fortemente continuo in $t = 0$ e quindi è fortemente continuo. Nel senso del teorema di Stone, determiniamone il generatore infinitesimo. Per semplicità, consideriamo dapprima il caso $n = 1$: allora $\forall \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$, dove $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = \{\psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) : \mathfrak{p}\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}}\}$ (la scelta di tale dominio, densamente definito in $L_2(\mathbb{R})$, apparirà chiara a breve) si trova

$$\begin{aligned} (\imath A \psi)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{t}{2}} \psi(e^{-t}x) - \psi(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\psi(e^{-t}x) - \frac{t}{2} \psi(e^{-t}x) + \mathcal{O}(t^2) - \psi(x) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\left(1 - \frac{t}{2}\right) \psi(x - tx) - \psi(x) + \mathcal{O}(t^2) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[-tx\psi'(x) - \frac{t}{2}\psi(x) + \mathcal{O}(t^2) \right] \\ &= -x\psi'(x) - \frac{1}{2}\psi(x) = -\frac{1}{2} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right) \psi(x). \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo trovato il generatore infinitesimo $A = \frac{\imath}{2}(x d_x + d_x x)$, ovvero

$$A = -\frac{1}{2}(\mathfrak{q}\mathfrak{p} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}), \quad \mathcal{D}_A = \{\psi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}) : \mathfrak{p}\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}}\}.$$

La generalizzazione al caso n -dimensionale è immediata, infatti $\forall \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{p}}$ si trova che

$$A = -\frac{n}{2}\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p} - \frac{(2-n)}{2}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}.$$

o QUANTIZZAZIONE GEOMETRICA

Vediamo come si trasformano $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_{\mathfrak{q}})$ e $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ sotto traslazioni e rotazioni. Avendo interpretato attivamente l'azione del gruppo sui vettori di stato, adopereremo la trasformazione

$$A \xrightarrow{\tau} A' = \mathcal{U}_\tau^{-1} A \mathcal{U}_\tau.$$

La determinazione di tali leggi di trasformazione permetterà di ricavare le usuali *regole di commutazione* tra le componenti di $\mathfrak{q}, \mathfrak{p}$ ed \mathfrak{L} . Tale procedimento, del tutto generale ed estremamente elegante, è noto come “**quantizzazione geometrica**” e riflette l'importanza che la Teoria dei Gruppi ha nella comprensione delle teorie fisiche ed, in particolare, della Meccanica Quantistica.

◇ TRASLAZIONI. Cominciamo dall'azione del gruppo traslazionale su $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_{\mathfrak{q}})$, dove $\mathfrak{q} \equiv (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3)^\top$ è la tripla di operatori di posizione in \mathbb{R}^3 . Allora, $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ abbiamo che

$$(\mathfrak{q}'\psi)(\mathbf{x}) = (\mathcal{U}_{\mathbf{a}}^{-1} \mathfrak{q} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi)(\mathbf{x}) = (\mathfrak{q} \mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi)(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = (\mathbf{x} + \mathbf{a})(\mathcal{U}_{\mathbf{a}} \psi)(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = [(\mathfrak{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})\psi](\mathbf{x}),$$

avendo osservato che $\mathfrak{q}\psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = (\mathbf{x} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})\psi(\mathbf{x})$. Essendo valida $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$, dev'essere

$$\mathfrak{q} \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbf{a}}} \mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}; \quad (5.54)$$

si noti che $\sigma(\mathfrak{q}') = \sigma(\mathfrak{q})$ e $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^{*\prime}$ essendo $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ unitario (teorema “spettro di operatori simili”, §5.2.2). D'altra parte, sappiamo che $(\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)^\top, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ è il generatore del gruppo delle traslazioni: adoperando una trasformazione infinitesima, troviamo

$$\mathfrak{q} + \mathbf{a} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} = e^{\imath \mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}} \mathfrak{q} e^{-\imath \mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}} = (\mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \imath \mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}) \mathfrak{q} (\mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} - \imath \mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}) = \mathfrak{q} - \imath [\mathfrak{q}(\mathbf{a} \cdot \mathfrak{p}), (\mathbf{a} \cdot \mathfrak{p})\mathfrak{q}],$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo in \mathbf{a} . L'uguaglianza precedente va letta componente per componente: $[(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}), (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top] = \iota (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)^\top$, per cui

$$\begin{cases} a_1[\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1] + a_2[\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2] + a_3[\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_3] = \iota a_1 & \iff & \begin{cases} [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1] = \iota \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R})}, \\ [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2] = \mathbf{0} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_3], \end{cases} \\ a_1[\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1] + a_2[\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2] + a_3[\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_3] = \iota a_2 & \iff & \begin{cases} [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2] = \iota \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R})}, \\ [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1] = \mathbf{0} = [\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_3], \end{cases} \\ a_1[\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_1] + a_2[\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_2] + a_3[\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3] = \iota a_3 & \iff & \begin{cases} [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3] = \iota \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R})}, \\ [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_1] = \mathbf{0} = [\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_2]. \end{cases} \end{cases}$$

In definitiva, le precedenti condizioni si riassumono nella nota regola di commutazione canonica

$$[\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] = \iota \delta_{ij} \mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (5.55)$$

Naturalmente, l'operatore impulso $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$ è invariante sotto traslazioni in quanto $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = \mathbf{0}$ per $i, j = 1, 2, 3$, essendo $\{\mathcal{T}_\mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ un gruppo abeliano.

◇ ROTAZIONI. Consideriamo rotazioni di $\theta \in [0, 2\pi)$ attorno a \hat{z} : allora $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta

$$(\mathbf{q}'\psi)(\mathbf{x}) = (\mathcal{U}_\theta^{-1} \mathbf{q} \mathcal{U}_\theta \psi)(\mathbf{x}) = (\mathbf{q} \mathcal{U}_\theta \psi)(\mathcal{R}_\theta \mathbf{x}) = (\mathcal{R}_\theta \mathbf{q} \psi)(\mathbf{x}) \iff \mathbf{q} \xrightarrow{\mathcal{R}_\theta} \mathbf{q}' = \mathcal{R}_\theta \mathbf{q},$$

dove $\mathcal{R}_\theta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^\top$ va inteso come prodotto matrice–“vettore”. Determiniamo le regole di commutazione tra le componenti di \mathbf{q} ed \mathfrak{L}_3 ; come prima, consideriamo una trasformazione infinitesima e sfruttiamo lo sviluppo $\mathcal{R}_\theta \approx \mathbf{1}_3 + \theta \Omega_3$ (posto $\Omega_3 \equiv \Omega$):

$$(\mathbf{1}_3 + \theta \Omega_3) \mathbf{q} \approx \mathcal{R}_\theta \mathbf{q} = e^{\iota \theta \mathfrak{L}_3} \mathbf{q} e^{-\iota \theta \mathfrak{L}_3} = (\mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \iota \theta \mathfrak{L}_3) \mathbf{q} (\mathbf{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} - \iota \theta \mathfrak{L}_3) = \mathbf{q} - \iota \theta [\mathbf{q}, \mathfrak{L}_3] + \mathcal{O}(\theta^2).$$

Semplificando e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo in θ , otteniamo la relazione

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}, \mathfrak{L}_3 \right] = \iota \Omega_3 \mathbf{q} = \iota \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} [\mathbf{q}_1, \mathfrak{L}_3] = -\iota \mathbf{q}_2, \\ [\mathbf{q}_2, \mathfrak{L}_3] = \iota \mathbf{q}_1, \\ [\mathbf{q}_3, \mathfrak{L}_3] = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Analogamente, per rotazioni di $\phi \in [0, 2\pi)$ attorno a \hat{y} e di $\varphi \in [0, 2\pi)$ attorno a \hat{x} si trova rispettivamente $[\mathbf{q}, \mathfrak{L}_2] = \iota \Omega_2 \mathbf{q}$ e $[\mathbf{q}, \mathfrak{L}_1] = \iota \Omega_1 \mathbf{q}$, essendo $\mathcal{R}_\phi \approx \mathbf{1}_3 + \phi \Omega_2$ e $\mathcal{R}_\varphi \approx \mathbf{1}_3 + \varphi \Omega_1$, dove

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando le precedenti, si giunge alla nota regola di commutazione tra \mathbf{q} e \mathfrak{L}

$$[\mathbf{q}_i, \mathfrak{L}_j] = \iota \epsilon_{ijk} \mathbf{q}_k, \quad (5.56)$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore di *Levi-Civita*. Si usa allora dire che \mathbf{q} è un *operatore vettoriale*.

Passiamo ora all'azione di \mathcal{R}_θ (rotazione attorno a \hat{z}) su $(\mathbf{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$: $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ troviamo che

$$(\mathbf{p}'\psi)(\mathbf{x}) = -\iota \mathcal{R}_\theta \frac{\partial(\mathcal{U}_\theta \psi)}{\partial \mathbf{x}} (\mathcal{R}_\theta \mathbf{x}) = (\mathcal{R}_\theta \mathbf{p} \psi)(\mathbf{x}) \iff \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{R}_\theta} \mathbf{p}' = \mathcal{R}_\theta \mathbf{p}.$$

Come \mathbf{q} , anche \mathbf{p} è un operatore vettoriale e soddisfa pertanto la regola di commutazione

$$[\mathbf{p}_i, \mathfrak{L}_j] = \iota \epsilon_{ijk} \mathbf{p}_k. \quad (5.57)$$

Diversamente dal gruppo delle traslazioni, il gruppo $SO(3)$ è *non abeliano* per cui ci aspettiamo che le componenti del generatore \mathfrak{L} non commutino tra loro. Siano $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ e \mathcal{R}_3 gli operatori di \mathbb{R}^3 associati alle rotazioni attorno agli assi \hat{x}, \hat{y} e \hat{z} , rispettivamente: consideriamo quindi la seguente composizione di rotazioni infinitesime:

$$\mathcal{R}_{2,\theta}^{-1} \mathcal{R}_{1,\theta}^{-1} \mathcal{R}_{2,\theta} \mathcal{R}_{1,\theta} \approx (\mathbb{1}_3 - \theta \Omega_2)(\mathbb{1}_3 - \theta \Omega_1)(\mathbb{1}_3 + \theta \Omega_2)(\mathbb{1}_3 + \theta \Omega_1) = \mathbb{1} - \theta^2[\Omega_1, \Omega_2] + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Tenendo presente la forma della matrici Ω_i per $i = 1, 2, 3$, troviamo che $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_3$ per cui

$$\mathcal{R}_{2,\theta}^{-1} \mathcal{R}_{1,\theta}^{-1} \mathcal{R}_{2,\theta} \mathcal{R}_{1,\theta} \approx \mathbb{1}_3 - \theta^2 \Omega_3 \approx \mathcal{R}_{3,\theta^2}^{-1}.$$

Pertanto, gli operatori \mathcal{U}_i per $i = 1, 2, 3$ dovranno soddisfare un'espressione analoga, a meno di un fattore di fase $\omega = \omega(1, 2)$ (legato alla non-commutatività tra \mathfrak{L}_1 ed \mathfrak{L}_2), in altre parole

$$\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3) \quad (\mathcal{U}_{1,\theta}^{-1} \mathcal{U}_{2,\theta}^{-1} \mathcal{U}_{1,\theta} \mathcal{U}_{2,\theta} \psi)(\mathbf{x}) = e^{i\omega} (\mathcal{U}_{3,\theta^2} \psi)(\mathbf{x}).$$

Per trovare le regole di commutazione, riscriviamo quest'ultima relazione in forma infinitesima:

$$\mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} - \theta^2[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] \approx e^{i\omega} e^{-i\theta^2 \mathfrak{L}_3} \approx \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} (1 + i\omega) - i\theta^2 \mathfrak{L}_3 \iff [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] = i\mathfrak{L}_3 - \omega_{1,2} \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

dove $\omega_{1,2} \equiv \omega(1, 2)/\theta^2$. Procedendo analogamente per le altre componenti si trova

$$[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathfrak{L}_k - \omega_{ij} \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

Il fattore di fase ω_{ij} deve soddisfare la proprietà di antisimmetria del commutatore, per cui

$$i\epsilon_{ijk} \mathfrak{L}_k - \omega_{ij} \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} = [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = -[\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_i] = -i\epsilon_{jik} \mathfrak{L}_k + \omega_{ji} \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)} \iff \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Possiamo porre $\omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \beta_k$, con $\beta_k \in \mathbb{R} \forall k = 1, 2, 3$, di modo che $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = i\epsilon_{ijk}(\mathfrak{L}_k - \beta_k \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)})$; si può così rimuovere l'identità sostituendo $\mathfrak{L}_i \mapsto \mathfrak{L}_i + \beta_i \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R}^3)}$ per $i = 1, 2, 3$

$$[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathfrak{L}_k. \quad (5.58)$$

La sostituzione precedente fa sì che $\mathcal{U}_{i,\theta} \mapsto \mathcal{U}_{i,\theta} e^{i\theta\beta_i} e^{-i\theta\mathfrak{L}_i}$; tali operatori sono unitari e la loro collezione forma ancora un gruppo ad un parametro fortemente continuo.

◦ TRASFORMAZIONI DI SCALA DI OPERATORI HAMILTONIANI

Determiniamo l'azione di $\{\mathcal{S}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ su $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_\mathfrak{q})$ e $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^n))$. Come in precedenza, sia $\lambda = e^t$ con $t \in \mathbb{R}$: l'azione del gruppo su $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ è implementata dall'operatore unitario

$$(\mathcal{U}_t \psi)(\mathbf{x}) = \left(e^{-\frac{int}{2} \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p} - \frac{i(2-n)t}{2} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}} \psi \right)(\mathbf{x}) = e^{-\frac{nt}{2}} \psi(e^{-t} \mathbf{x}).$$

Adoperiamo un metodo alternativo: si noti che se (A, \mathcal{D}_A) è autoaggiunto, allora A^n con $n \in \mathbb{N}$ è autoaggiunto e densamente definito (vedi §5.3.1) ed ha senso lo sviluppo

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Infatti, si dimostra che l'insieme dei vettori di \mathcal{H} per cui la serie è ben definita e convergente è denso [Tra09]. Oltre a giustificare la validità degli sviluppi effettuati negli esercizi precedenti, questo fatto permette di enunciare un analogo per operatori autoaggiunti dell'**identità di Hadamard** (5.16): per cui, se (B, \mathcal{D}_B) è autoaggiunto ed (A, \mathcal{D}_A) è densamente definito, si ha che

$$e^{tB} A e^{-tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \text{ad}_B^n(A)}{n!} = e^{t \text{ad}_B}(A).$$

Posto $B \equiv \frac{in}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \frac{i(2-n)}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, determiniamo $\text{ad}_B^n(\mathbf{q})$ ed $\text{ad}_B^n(\mathbf{p})$: adoperando la (5.55) troviamo

$$\begin{aligned} \text{ad}_B(\mathbf{q}) &= [B, \mathbf{q}] = \mathbf{q}, & \text{ad}_B^n(\mathbf{q}) &= \underbrace{[B, [B, \dots, [B, \mathbf{q}]]]}_{n\text{-volte}} = \mathbf{q} \\ \text{ad}_B(\mathbf{p}) &= [B, \mathbf{p}] = -\mathbf{p}, & \text{ad}_B^n(\mathbf{p}) &= \underbrace{[B, [B, \dots, [B, \mathbf{p}]]]}_{n\text{-volte}} = (-1)^n \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate nell'identità di Hadamard, otteniamo i risultati seguenti:

$$\mathbf{q} \xrightarrow{\mathcal{S}_t} \mathbf{q}' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{q} = e^t \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{S}_t} \mathbf{p}' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \mathbf{p} = e^{-t} \mathbf{p}. \quad (5.59)$$

Sia ora A un aperto di \mathbb{R}^n , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$: diremo che f è **omogenea di grado k** se $\forall \mathbf{x} \in A$

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Sia quindi $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ omogenea di grado k : per $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ l'operatore $V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ è tale per cui $(V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)\psi)(\mathbf{x}) = V(x_1, \dots, x_n)\psi(x_1, \dots, x_n)$; allora, sotto trasformazioni di scala, si ha

$$V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \xrightarrow{\mathcal{S}_t} e^{kt} V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n).$$

Inoltre, è evidente che $\mathbf{p}^2 \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{S}_t} e^{-2t} \mathbf{p}^2$, perciò l'hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \xrightarrow{\mathcal{S}_t} \mathcal{H}' = e^{-2t} \mathbf{p}^2 + e^{kt} V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n).$$

In questa famiglia rientrano $\mathcal{H}_{osc} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{q}^2$ ed $\mathcal{H}_H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2) - e^2 V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, dove $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$ è una funzione omogenea di grado $k = -1$.

Partiamo dall'oscillatore armonico: si dimostra¹⁰⁴ che $(\mathcal{H}_0 \equiv \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ è essenzialmente autoaggiunto e che $\sigma(\mathcal{H}_0) = \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}_0}$; ma $\mathcal{U}_\lambda^{-1} \mathcal{H}_{osc} \mathcal{U}_\lambda = \frac{\lambda^{-2}}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \lambda^2 \mathbf{q}^2$ per cui, imponendo l'uguaglianza dei coefficienti, dev'essere $\lambda = (m\omega)^{-1/2}$, ovvero

$$e^{-\frac{1}{4} \ln(m\omega)(\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{q})} \mathcal{H}_{osc} e^{\frac{1}{4} \ln(m\omega)(\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{q})} = \frac{\omega}{2} \mathcal{H}_0 \quad \implies \quad \sigma(\mathcal{H}_{osc}) = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per \mathcal{H}_H , sappiamo che $(\widetilde{\mathcal{H}}_0 = -\frac{1}{2} \Delta - r^{-1}, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3))$ (teorema di Kato–Rellich, §4.6.1) è autoaggiunto e si può dimostrare che $\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_0) = \{-\frac{1}{2n^2}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \mathbb{R}_0^+$; per cui, posto $\lambda = (me^2)^{-1}$, si ha

$$e^{-\frac{1}{2} \ln(me^2)(3\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q})} \mathcal{H}_H e^{\frac{1}{2} \ln(me^2)(3\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q})} = me^4 \mathcal{H}'_0 \quad \implies \quad \sigma(\mathcal{H}_H) = \left\{ -\frac{me^4}{2n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \mathbb{R}_0^+.$$

o GENERATORE DELLE TRASLAZIONI TEMPORALI E TEOREMA DEL VIRIALE

Sia $\mathcal{T}_s: t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathcal{T}_s(t) = t + s \in \mathbb{R}^+$ la rappresentazione naturale su \mathbb{R} del gruppo delle traslazioni temporali; com'è immediato dimostrare, la famiglia $\{\mathcal{T}_s, s \in \mathbb{R}^+\}$ è un gruppo connesso ad un parametro e la sua azione su $L_2(\mathbb{R}^3)$ è implementata dall'operatore \mathcal{U}_s tale che $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ è $(\mathcal{U}_s \psi)(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, \mathcal{T}_s^{-1}t) = \psi(\mathbf{x}, t - s)$. L'insieme $\{\mathcal{U}_s, s \in \mathbb{R}^+\}$ individua un gruppo ad un parametro fortemente continuo, il cui generatore infinitesimo (ad $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ fissato) è

$$(\imath A \psi)(\mathbf{x}, t) = \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{\psi(\mathbf{x}, t - t') - \psi(\mathbf{x}, t)}{t'} = -\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \iff \quad A = \imath \frac{\partial}{\partial t}.$$

¹⁰⁴Vale il seguente TEOREMA – (A, \mathcal{D}_A) simmetrico, $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$, \mathcal{H} separabile; allora A è ess. autoaggiunto se esiste una base hilbertiana $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_A$ di \mathcal{H} tale che $A \mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ per $j = 1, 2, \dots$. Nel caso di $(\mathcal{H}_0, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, si dimostra che i polinomi di Hermite sono autofunzioni di \mathcal{H}_0 ed il loro insieme forma una base hilbertiana di $L_2(\mathbb{R})$.

D'altra parte $\mathcal{E} \xrightarrow{\text{R.S.}} \imath \frac{\partial}{\partial t}$, essendo \mathcal{E} l'energia del sistema, per cui $(\mathcal{U}_t \psi)(\mathbf{x}, t) = (e^{-\imath t \mathcal{E}} \psi)(\mathbf{x}, 0)$. Sebbene \mathcal{E} non sia un operatore, se ne dà ugualmente una rappresentazione al fine di distinguere la sua azione, una pura traslazione temporale, da quella dell'hamiltoniano $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$, contenente le informazioni relative alla dinamica del sistema. Anche \mathcal{H} soddisfa l'equazione $\mathbf{x}'(t) = -\imath \mathcal{H} \mathbf{x}(t)$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ e con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ e nell'ipotesi che $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$, esiste ed è unica la soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\imath t \mathcal{H}} \mathbf{x} \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{dove} \quad \mathcal{U}_t^{-1} = \mathcal{U}_t^*.$$

In questo senso va inteso $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ come il “*generatore dell'evoluzione dinamica di un sistema*”. In vista del teorema del viriale, ricaviamo un'importante equazione di evoluzione. Sia $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ l'hamiltoniano di un sistema \mathcal{S} ed $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ l'operatore autoaggiunto associato ad una sua osservabile: vale allora l'**equazione di Hamilton–Ehrenfest**¹⁰⁵

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{A} \rangle = \imath \langle [\mathcal{H}, \mathcal{A}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right\rangle. \quad (5.60)$$

La dimostrazione è immediata: per comodità, poniamoci nell'*interpretazione alla Heisenberg* della dinamica e definiamo l'operatore $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}} := \mathcal{U}_t^{-1} \mathcal{A} \mathcal{U}_t$, dove $\mathcal{U}_t = e^{-\imath t \mathcal{H}}$. Allora

$$\frac{d \mathcal{A}_{\mathfrak{S}}}{dt} = \imath \mathcal{H} e^{\imath t \mathcal{H}} \mathcal{A} e^{-\imath t \mathcal{H}} + e^{\imath t \mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} e^{-\imath t \mathcal{H}} - \imath e^{\imath t \mathcal{H}} \mathcal{A} \mathcal{H} e^{-\imath t \mathcal{H}} = \imath [\mathcal{H}, \mathcal{A}_{\mathfrak{S}}] + \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right)_{\mathfrak{S}};$$

ma nella pittura di Heisenberg, i vettori di stato sono indipendenti dal tempo e quindi

$$\left\langle \frac{d \mathcal{A}_{\mathfrak{S}}}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathcal{A}_{\mathfrak{S}} \rangle = \imath \langle [\mathcal{H}, \mathcal{A}_{\mathfrak{S}}] \rangle + \left\langle \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right)_{\mathfrak{S}} \right\rangle.$$

Dal momento che i prodotti scalari non dipendono dal tipo di interpretazione della dinamica (alla Heisenberg od alla Schrödinger), possiamo far cadere i pedici “ \mathfrak{S} ” ottenendo così la (5.60). A questo punto possiamo dimostrare la versione quantistica del noto **teorema del viriale**¹⁰⁶

¹⁰⁵Se \mathcal{A} non dipende esplicitamente dal tempo, l'equazione di Hamilton–Ehrenfest si riduce all'*equazione di Heisenberg–Liouville* $\mathcal{A}'_{\mathfrak{S}} = \imath [\mathcal{H}, \mathcal{A}_{\mathfrak{S}}]$, dove $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}} := \mathcal{U}_t^{-1} \mathcal{A} \mathcal{U}_t$. Inoltre $[\mathcal{H}, \mathcal{A}] = 0 \Leftrightarrow d_t \mathcal{A}_{\mathfrak{S}} = \imath [\mathcal{H}, \mathcal{A}_{\mathfrak{S}}] = 0$, ovvero l'osservabile A è un integrale primo del moto se l'operatore ad essa associato commuta con l'hamiltoniano del sistema. Più in generale, se (B, \mathcal{D}_B) è il generatore di un gruppo di simmetria ed $[B, \mathcal{A}] = 0$, allora \mathcal{A} è invariante sotto l'azione di tale gruppo.

¹⁰⁶TEOREMA (VIRIALE CLASSICO) – Siano \mathbf{q}_i con $i = 1, 2, \dots, N$ le coordinate generalizzate di un sistema di N particelle soggette alle forze \mathbf{F}_i e $K = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{p}_i^2 / m_i$ l'energia cinetica totale del sistema. Se il moto è limitato, vale l'identità

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{q}_i \right\rangle, \quad (5.61)$$

dove $\langle (\dots) \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\dots) dt$ indica la media temporale sull'intervallo $[0, \tau]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_i$ il cosiddetto **scalare viriale**: evidentemente $\partial_t (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_i) = 0$ per $i = 1, 2, \dots, N$ quindi, tenendo presenti le equazioni di Hamilton del moto $\dot{\mathbf{q}}_i = [\mathbf{q}_i, H]$ e che $\dot{\mathbf{p}}_i = [\mathbf{p}_i, H]$, si trova

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{q}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{q}_i = 2K + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{q}_i.$$

Prendendo la media temporale sull'intervallo di tempo $[0, \tau]$, si trova $\frac{1}{\tau} (G(\tau) - G(0)) = \langle d_t G \rangle = 2\langle K \rangle + \langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{q}_i \rangle$: il membro a sinistra è nullo se il moto è periodico con periodo τ o se è limitato nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$.

In particolare, se le forze derivano da un potenziale V si ha $\langle K \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \langle \nabla_{\mathbf{q}_i} V, \mathbf{q}_i \rangle_{\mathbb{R}^3}$. Il teorema del viriale è molto utile in Fisica Statistica: da esso, ad esempio, si ricava elementariamente l'equazione di stato di un gas perfetto. In tal caso, il secondo membro può essere sostituito con un integrale di superficie esteso alle pareti del contenitore nel quale il gas è inserito: detto $d\sigma$ l'elemento infinitesimo di superficie ed essendo $d\mathbf{F}_i = -P \hat{\mathbf{n}} d\sigma$ (P indica la pressione del gas), si trova

$$\frac{3}{2} k_B N T = \langle K \rangle = -\frac{P}{2} \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} d\sigma = \frac{P}{2} \int_V \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} d\mathbf{q} = \frac{3}{2} P V \quad \Leftrightarrow \quad P V = N k_B T,$$

avendo richiamato la legge di equipartizione dell'energia ed il teorema della divergenza di Gauss.

TEOREMA (VIRIALE QUANTISTICO) - Sia $(\mathcal{K}(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^n))$ l'operatore "energia cinetica totale" di un sistema fisico \mathcal{S} e sia $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in \mathbb{R}^n tale che l'hamiltoniano $(\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathbf{p}) + \mathcal{V}(\mathbf{q}), \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ è autoaggiunto e densamente definito su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Allora

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \rangle_{\xi} = 2\langle \mathcal{K}(\mathbf{p}) \rangle_{\xi} - \langle \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{V}(\mathbf{q}) \rangle_{\xi}, \quad (5.62)$$

dove $\langle (\dots) \rangle_{\xi} \equiv \langle (\dots)_{\mathbf{x}_{\xi}, \mathbf{x}_{\xi}} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$ con $\mathbf{x}_{\xi} \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ il vettore rappresentativo di $\xi \in \mathcal{PH}_{\mathcal{S}}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{G} \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ l'operatore associato allo scalare viriale, dove $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^{\top}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^{\top}$: gli operatori \mathbf{q} e \mathbf{p} non dipendono esplicitamente dal tempo, per cui $\partial_t(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Applicando la formula di Hamilton–Ehrenfest, si trova allora che

$$\frac{d\langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \rangle_{\xi}}{dt} = i\langle [\mathcal{H}, \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}] \rangle_{\xi} = \frac{i}{2m}\langle [\mathbf{p}^2, \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}] \rangle_{\xi} + \langle [\mathcal{V}(\mathbf{q}), \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}] \rangle_{\xi}.$$

Calcoliamo i due commutatori: osservando che $\mathbf{p}^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$, si ottiene

$$\frac{1}{2m}[\mathbf{p}^2, \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}] = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^n [p_k^2, q_k p_k] = -\frac{i}{m}\sum_{k=1}^n p_k^2 = -2i\mathcal{K}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n).$$

Si noti ora che $([\mathcal{V}(q_1, \dots, q_n), p_k]\psi)(\mathbf{x}) = -i\mathcal{V}\psi_{x_k} + i\partial_{x_k}(\mathcal{V}\psi) = i\mathcal{V}_{x_k}\psi = (i\partial_{x_k}\mathcal{V}(q_1, \dots, q_n)\psi)(\mathbf{x})$, essendo $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ generica; dunque, per il secondo commutatore si trova che

$$[\mathcal{V}(\mathbf{q}), \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}] = \sum_{k=1}^n q_k [\mathcal{V}(q_1, \dots, q_n), p_k] = i\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{V}(\mathbf{q}).$$

Sostituendo le precedenti nella formula di Hamilton–Ehrenfest, troviamo quanto desiderato. \square

In particolare, se $d_t\langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \rangle_{\xi} = 0$ (cioè se il valore di aspettazione è riferito ad uno stato ξ stazionario) si trova un'espressione analoga alla (5.61) nel caso di forze derivabili da un potenziale, ovvero

$$\langle \mathcal{K}(\mathbf{p}) \rangle_{\xi} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{V}(\mathbf{q}) \rangle_{\xi}.$$

Inoltre, notevoli semplificazioni si hanno se \mathcal{V} è omogenea di grado $k \in \mathbb{R}$. In tal caso, vale il noto

TEOREMA (EULERO) - Sia A un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora f è una funzione omogenea di grado $k \in \mathbb{R}$ se e solo se vale l'**identità di Eulero**

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \mathbf{x} \in A. \quad (5.63)$$

Dimostrazione. Sia f omogenea di grado k ed $\alpha \in \mathbb{R}^+$: allora $\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{x} \Rightarrow f(\mathbf{x}') = \alpha^k f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in A$. Differenziando ambo i membri rispetto ad α e tenendo presente che $\partial_{\alpha}\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, troviamo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k\alpha^{k-1} f(x_1, \dots, x_n).$$

Posto $\alpha = 1$ si trova la tesi. Viceversa, supponiamo che f soddisfi la (5.60) e per ogni $\mathbf{x} \in A$ fissato, definiamo la funzione $g(\cdot) : \alpha \in \mathbb{R}^+ \mapsto g(\alpha) = f(\alpha\mathbf{x}) - \alpha^k f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$: differenziamo ambo i membri (g è differenziabile, essendo somma di funzioni differenziabili), cosicché

$$g'(\alpha) = \sum_{i=1}^n f_{x_i} x_i - k\alpha^{k-1} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n f_{x_i} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \alpha x_i - k\alpha^{k-1} f(\mathbf{x}) = \frac{k}{\alpha} g(\alpha).$$

Naturalmente, la soluzione generale della precedente equazione differenziale è $g(\alpha) = ce^{k \ln \alpha}$; d'altra parte $0 = g(1) = c$ per cui $g(\alpha) \equiv 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, ovvero $f(\mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in A$. \square

Applicando quest'ultimo alle relazioni precedenti (posto $N = 1$ nel caso classico) si trova

$$\langle K \rangle = \frac{k}{2} \langle V \rangle, \quad \langle \mathcal{X}(\mathbf{p}) \rangle_\xi = \frac{k}{2} \langle \mathcal{V}(\mathbf{q}) \rangle_\xi.$$

Infine, va notato che l'“operatore viriale” $\mathcal{G} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ è legato al generatore del gruppo delle trasformazioni di scala: il generatore infinitesimo $A = -\frac{1}{2}(\mathbf{qp} + \mathbf{pq})$ tiene conto, a meno del segno, del giusto ordinamento al passaggio dallo scalare classico $G = qp$ allo scalare quantistico $\mathcal{G} = \mathbf{qp}$. Inoltre, il risultato del teorema del viriale quantistico può essere dedotto trasformando $\mathcal{H} = \mathcal{X}(\mathbf{p}) + \mathcal{V}(\mathbf{q})$ rispetto ad \mathcal{S}_t , nell'ipotesi che $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia omogenea di grado k . Posto $n = 1$, si ha che

$$\mathcal{H} - \frac{it}{2} [\mathcal{H}, \mathbf{qp} + \mathbf{pq}] \approx e^{\frac{it}{2}(\mathbf{qp} + \mathbf{pq})} \mathcal{H} e^{-\frac{it}{2}(\mathbf{qp} + \mathbf{pq})} = e^{-2it} \mathcal{X}(\mathbf{p}) + e^{kt} \mathcal{V}(\mathbf{q}) \approx \mathcal{H} - 2it \mathcal{X}(\mathbf{p}) + kt \mathcal{V}(\mathbf{q}),$$

dalla quale, con le dovute semplificazioni, otteniamo la seguente espressione

$$[\mathcal{H}, \mathbf{qp} + \mathbf{pq}] = -4i \mathcal{X}(\mathbf{p}) + 2ik \mathcal{V}(\mathbf{q}).$$

Ne calcoliamo il valore di aspettazione rispetto ad un autostato $\mathbf{x}_\xi \in \mathcal{H}_S$ di \mathcal{H} : per definizione di autostato, dev'essere $\mathcal{H}\mathbf{x}_\xi = \hbar \mathbf{x}_\xi$ con $\hbar \in \mathbb{R}$, essendo per ipotesi $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$, per cui risulta essere

$$\langle [\mathcal{H}, A] \rangle_\xi = \langle \mathcal{H}A\mathbf{x}_\xi, \mathbf{x}_\xi \rangle_{\mathcal{H}_S} - \langle A\mathcal{H}\mathbf{x}_\xi, \mathbf{x}_\xi \rangle_{\mathcal{H}_S} = \langle A\mathbf{x}_\xi, \mathcal{H}\mathbf{x}_\xi \rangle_{\mathcal{H}_S} - \langle A\hbar\mathbf{x}_\xi, \mathbf{x}_\xi \rangle_{\mathcal{H}_S} = 0,$$

indipendentemente dalla scelta di (A, \mathcal{D}_A) con $\overline{\mathcal{D}_A} \subset \mathcal{H}_S$. Allora $\langle [\mathcal{H}, \mathbf{qp} + \mathbf{pq}] \rangle_\xi = 0$ e quindi

$$2 \langle \mathcal{X}(\mathbf{p}) \rangle_\xi = \langle \mathcal{V}(\mathbf{q}) \rangle_\xi.$$

Lo stesso risultato si ottiene nel caso in cui \mathcal{S}_t è una trasformazione di scala in \mathbb{R}^n .

OSSERVAZIONE – Dagli esercizi discussi emerge il seguente fatto: l'azione di un gruppo connesso su $L_2(\mathbb{R}^n)$ lascia invariate le regole di commutazione canonica. Infatti, dai risultati precedenti, troviamo rispettivamente per traslazioni, rotazioni e trasformazioni di scala le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}'_i, \mathbf{p}'_j] &= [\mathbf{q}_i + a_i, \mathbf{p}_j] = [\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] = i \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})}, \\ [\mathbf{q}'_i, \mathbf{p}'_j] &= \left[\sum_{k=1}^3 (\mathcal{R}_\theta)_{ik} \mathbf{q}_k, \sum_{k'=1}^3 (\mathcal{R}_\theta)_{jk'} \mathbf{p}_{k'} \right] = \sum_{k=1}^3 (\mathcal{R}_\theta)_{ik} (\mathcal{R}_\theta^\top)_{kj} [\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k] = i \delta_{ij} \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})}, \\ [\mathbf{q}'_i, \mathbf{p}'_j] &= [e^t \mathbf{q}_i, e^{-t} \mathbf{p}_j] = i \delta_{ij} \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Indicando con τ la trasformazione di simmetria, le precedenti espressioni si condensano nella seguente

$$[\mathbf{q}'_i, \mathbf{p}'_j] = \mathcal{U}_\tau^{-1} [\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j] \mathcal{U}_\tau = \mathcal{U}_\tau^{-1} i \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})} \mathcal{U}_\tau = i \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})},$$

ovvero, l'invarianza delle regole di c.c. è strettamente legata all'unitarietà di \mathcal{U}_τ . Grossomodo, questo è il contenuto del famoso **teorema di Stone–von Neumann** (vedi §B), enunciato di seguito.

TEOREMA (STONE–VON NEUMANN) - *Siano (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ autoaggiunti e densamente definiti su $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ rispettivamente. Se (\mathbf{q}, \mathbf{p}) e $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ soddisfano le regole di c.c., allora esiste un isomorfismo¹⁰⁷*

$$\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \quad \text{tale che} \quad \mathbf{q}' = \mathcal{U}^{-1} \mathbf{q} \mathcal{U}, \quad \mathbf{p}' = \mathcal{U}^{-1} \mathbf{p} \mathcal{U}.$$

Pertanto, tutte le rappresentazioni di \mathcal{H} che lasciano invariate le regole di commutazione canonica sono unitariamente equivalenti alla rappresentazione di Schrödinger, ovvero su $L_2(\mathbb{R}^3)$. In questo senso, un primo risultato, dovuto proprio a Schrödinger e presentato nel 1926, mostra che la rappresentazione su $L_2(\mathbb{R})$ (alla Schrödinger) e quella su $\ell_2(\mathbb{R})$ (alla Heisenberg) sono unitariamente equivalenti. Nello stesso spirito, si può concludere che la rappresentazione delle posizioni e quella degli impulsi sono unitariamente equivalenti, essendo la trasformata di Fourier–Plancherel un operatore unitario.

¹⁰⁷Un isomorfismo $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ è un'applicazione lineare e biunivoca che conserva il prodotto scalare, cioè tale che $\langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$. In particolare, un isomorfismo è una trasformazione unitaria se $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

5.4.1 Evoluzione dinamica e sviluppo in serie di Dyson

Il quarto postulato della Meccanica Quantistica afferma che “l’evoluzione temporale di un sistema fisico \mathcal{S} tra gli istanti t_0 e t è realizzata mediante una trasformazione di simmetria $\mathcal{T}(t, t_0)$ su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ ”. Dall’ultimo degli esempi discussi nel paragrafo precedente è emerso che l’hamiltoniano $(\mathcal{H}, \mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ individua il generatore di tale trasformazione e che la sua azione su $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ è implementata dall’operatore unitario

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = e^{-i(t-t_0)\mathcal{H}} \quad t, t_0 \in \mathbb{R}^+. \quad (5.64)$$

Poiché \mathcal{H} non dipende esplicitamente dal tempo, \mathcal{U}_{t,t_0} è *soluzione forte* del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} = -i\mathcal{H} \mathcal{U}_{t,t_0}, \\ \mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}. \end{cases} \quad (5.65)$$

Si vuol determinare \mathcal{U}_{t,t_0} nel caso in cui \mathcal{H} dipenda esplicitamente dal tempo. Il quarto postulato ed il teorema di Wigner garantiscono che \mathcal{U}_{t,t_0} è ancora unitario ed $\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$; tuttavia, non è detto che $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}^+\}$ formi un gruppo ad un parametro per fissato t_0 , in quanto $\forall t_1 \in [t_0, t]$

$$\mathcal{U}_{t,t_1} \mathcal{U}_{t_1,t_0} = e^{i\omega(t,t_1,t_0)} \mathcal{U}_{t,t_0},$$

dove $\omega(t, t_1, t_0)$ è un fattore di fase dipendente a priori dagli estremi di ciascun intervallo temporale. D’altra parte, l’associatività del gruppo additivo $(\mathbb{R}^+, +)$ impone che $\omega(t, t_1, t_0)$ soddisfi la relazione

$$\omega(t, t_1, t_0) = \tilde{\omega}(t, t_1) + \tilde{\omega}(t_1, t_0) - \tilde{\omega}(t, t_0),$$

per cui possiamo ridefinire $\mathcal{U}_{t,t_0} \mapsto e^{i\tilde{\omega}(t,t_0)} \mathcal{U}_{t,t_0}$ senza perdere in generalità; in questo modo

$$\mathcal{U}_{t,t_1} \mathcal{U}_{t_1,t_0} = \mathcal{U}_{t,t_0}, \quad \forall t_1 \in [t_0, t].$$

Dunque $\{\mathcal{U}_{t,t_0}, t \in \mathbb{R}^+\}$ forma un gruppo ad un parametro di operatori unitari $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$ con $t \geq t_0$. Supponiamo ora che \mathcal{U}_{t,t_0} soddisfi un’equazione analoga alla (5.65): identicamente

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} = \mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,t_0} \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}(t) \equiv i \left(\frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} \right) \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1}.$$

Per come definito, $\mathcal{H}(t)$ è autoaggiunto essendo \mathcal{U}_{t,t_0} unitario (infatti $\mathcal{H}^*(t) = i(d_t \mathcal{U}_{t,t_0}^{-1}) \mathcal{U}_{t,t_0}$ ed $\mathcal{U}^* \mathcal{U} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \Rightarrow d_t \mathcal{U}^* \mathcal{U} = -\mathcal{U}^* d_t \mathcal{U}$) ed è indipendente da t_0 . Occorrerà allora risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,t_0} = -i\mathcal{H}(t) \mathcal{U}_{t,t_0}, \\ \mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}, \end{cases} \quad \iff \quad \mathcal{U}_{t,t_0} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - i \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') \mathcal{U}_{t',t_0} dt'.$$

L’equazione integrale precedente può formalmente essere risolta per iterazione, osservando che

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}_{t,t_0}^{(n)}, \quad \mathcal{U}_{t,t_0}^{(n)} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - i \int_{t_0}^t \mathcal{U}_{t',t_0}^{(n-1)} \mathcal{H}(t') dt', \quad \mathcal{U}_{t,t_0}^{(0)} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}, \quad (5.66)$$

dove il limite è ancora una volta inteso in senso forte. Si genera in questo modo la *serie di Dyson*

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-i)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1. \quad (5.67)$$

Una forma più elegante e compatta della precedente può essere ottenuta introducendo il cosiddetto **prodotto cronologicamente ordinato** (semplicemente *prodotto T-ordinato*) di operatori

$$\mathbb{T}\{\mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n)\} = \sum_{\pi \in S_n} \theta(t_{\pi_1}, t_{\pi_2}, \dots, t_{\pi_n}) \mathcal{H}(t_{\pi_1}) \mathcal{H}(t_{\pi_2}) \cdots \mathcal{H}(t_{\pi_n}),$$

dove S_n è il gruppo delle permutazioni e $\theta(t_1, \dots, t_n)$ è la *funzione di Heaviside* a molteplici argomenti

$$\theta(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_1 > t_2 > \dots > t_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tenendo conto delle precedenti definizioni, il termine n -esimo della (5.67) si riscrive come

$$(-i)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_n} \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \dots \mathcal{H}(t_n) dt_n \dots dt_2 dt_1 = \frac{1}{n!} \mathbb{T} \left(-i \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') dt' \right)^n,$$

e quindi la (5.67) si riscrive elegantemente in termini del cosiddetto **esponenziale T-ordinato**:

$$\mathcal{U}_{t,t_0} = \mathbb{T} e^{-i \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') dt'}. \quad (5.68)$$

Se $[\mathcal{H}(t'), \mathcal{H}(t'')] = \mathbb{O}$ per ogni $t', t'' \in [t_0, t]$, l'ordinamento è irrilevante ed il simbolo \mathbb{T} può essere omissso; inoltre, nel caso in cui \mathcal{H} non dipende esplicitamente dal tempo, la (5.68) si riduce alla (5.64).

Il ragionamento esposto rappresenta grossomodo l'inverso del contenuto del seguente teorema, con la quale si dimostra (tra le altre cose) che la serie di Dyson è convergente uniformemente (ovvero rispetto alla norma di $B(\mathcal{H}_S)$) ad \mathcal{U}_{t,t_0} . Preliminarmente, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE (PROPAGATORE UNITARIO) - Sia $\{\mathcal{U}_{t,s}, t, s \in \mathbb{R}\}$ una famiglia a due parametri di operatori unitari definiti su \mathcal{H} . Diremo che tale famiglia forma un **propagatore unitario** se

$$(a) \quad \mathcal{U}_{t,r} \mathcal{U}_{r,s} = \mathcal{U}_{t,s}, \quad (b) \quad \mathcal{U}_{t,t} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}, \quad (c) \quad \mathcal{U}_{t,s} \text{ è fortemente continuo in } t \text{ ed } s.$$

TEOREMA (SERIE DI DYSON) - Sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ e $t \mapsto \mathcal{H}(t)$ fortemente continua da \mathbb{R} in $B(\mathcal{H})$. Esiste allora un propagatore unitario $\{\mathcal{U}_{t,s}, t, s \in \mathbb{R}\}$ t.c. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ il vettore $\mathbf{x}_s(t) = \mathcal{U}_{t,s} \mathbf{x}$ soddisfa l'equazione

$$\mathbf{x}'_s(t) = -i \mathcal{H}(t) \mathbf{x}_s(t), \quad \mathbf{x}_s(s) = \mathbf{x}.$$

Dimostrazione. Si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATH...*, vol. 2, pgg. 282-283. Per sommi capi il teorema parte dalla definizione della serie di Dyson per $\mathcal{U}_{s,t}$ e dimostra che essa converge uniformemente ad $\mathcal{U}_{s,t}$; fatto questo è banale verificare che $\mathcal{U}_{t,s}$ soddisfa le proprietà di un propagatore unitario. Infine, l'equazione per $\mathbf{x}_s(t)$ la si ottiene differenziando lo sviluppo di Dyson di $\mathcal{U}_{s,t}$ termine a termine e notando che la serie risultante è ancora uniformemente convergente. \square

Il teorema richiede che $\mathcal{H} \in B(\mathcal{H})$: ciò non rappresenta una grossa limitazione dal momento che, nella maggior parte dei casi, la dipendenza di \mathcal{H} dal tempo è dovuta al termine potenziale \mathcal{V} , ovvero $\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathbf{p}) + \mathcal{V}(\mathbf{q}, t)$ e l'operatore $\mathcal{K}(\mathbf{p})$ è (in generale) non limitato ed autoaggiunto. In tal caso la serie di Dyson è di aiuto: passando in **rappresentazione d'interazione**, definiamo

$$\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q}, t) := e^{it\mathcal{K}(\mathbf{p})} \mathcal{V}(\mathbf{q}, t) e^{-it\mathcal{K}(\mathbf{p})}. \quad (5.69)$$

Pertanto, se $t \mapsto \mathcal{V}(\cdot, t)$ soddisfa le ipotesi del teorema, lo stesso vale per $t \mapsto \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, t)$ ed esiste quindi un propagatore unitario $\{\tilde{\mathcal{U}}_{t,s}, t, s \in \mathbb{R}\}$ ad essa associato; dunque, definendo con

$$\mathcal{U}_{t,s} \equiv e^{-it\mathcal{K}(\mathbf{p})} \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}(\mathbf{p})},$$

troviamo che, formalmente, l'operatore $\mathcal{U}_{t,s}$ soddisfa la seguente equazione

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t,s} = -i \mathcal{K} e^{-it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}} - i e^{-it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{V}}(t) \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}} = -i (\mathcal{K} + \mathcal{V}(t)) \mathcal{U}_{t,s},$$

per cui $\mathbf{x}_s(t) = \mathcal{U}_{t,s} \mathbf{x}$ è soluzione in senso forte dell'equazione

$$\mathbf{x}'_s(t) = -i (\mathcal{K}(\mathbf{p}) + \mathcal{V}(\mathbf{q}, t)) \mathbf{x}_s(t), \quad \mathbf{x}_s(s) = \mathbf{x}. \quad (5.70)$$

La precedente può creare alcuni problemi: l'operatore $\mathcal{K} \mathcal{U}_{t,s} \mathbf{x} = e^{-it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{U}}_{t,s} e^{is\mathcal{K}} \mathbf{x}$ può non esser definito, dal momento che $\tilde{\mathcal{U}}_{t,s} \mathbf{x}$ può non appartenere al dominio di \mathcal{K} , sebbene \mathbf{x} lo sia. Si può tuttavia dimostrare che la (5.70) ha senso se la mappa $t \mapsto [\mathcal{K}, \mathcal{V}(t)]$ è fortemente continua.

Lo sviluppo di Dyson è molto utile, ad esempio, nel calcolo delle probabilità di transizione. Sia \mathcal{K} l'hamiltoniano di particella libera e $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ due autostati di \mathcal{K} corrispondenti agli autovalori $\lambda_k, \lambda_l \in \mathbb{R}$, rispettivamente: in assenza di un potenziale esterno, se \mathbf{x}_k è lo stato iniziale del sistema si ha che $e^{it\mathcal{K}} \mathbf{x}_k = e^{i\lambda_k t} \mathbf{x}_k$ ed \mathcal{S} resterà in \mathbf{x}_k ; se però accendiamo per un certo intervallo di tempo un potenziale $\mathcal{V}(t)$, la dinamica sarà data da $e^{-it\mathcal{K}} \mathcal{U}_{t,0} \mathbf{x}_k$ e la probabilità che \mathcal{S} al tempo t sia in \mathbf{x}_l è data dal modulo quadro del prodotto scalare

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_l, e^{it\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{U}}_{t,0} \mathbf{x}_k \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} &= \langle \mathbf{x}_l, e^{-it\mathcal{K}} \mathbf{x}_k \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - i \int_0^t \langle \mathbf{x}_l, e^{-it_1\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{V}}(t_1) \mathbf{x}_k \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} dt_1 + \dots \\ &= -i \int_0^t e^{-i\lambda_l t} e^{-i(\lambda_k - \lambda_l)t_1} \langle \mathbf{x}_l, \mathcal{V}(t_1) \mathbf{x}_k \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} dt_1 + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned}$$

dove i termini contenuti in $\mathcal{O}(t^2)$ possono essere stimati calcolando le code della serie di Dyson [ReS975].

5.4.2 Formula di Lie–Trotter ed integrale lungo i cammini di Feynman

Concludiamo il capitolo con l'analogo per spazi di Hilbert infinito dimensionali della formula di Lie (5.13), che avevamo dimostrato nel §5.1.2 per spazi di dimensione finita. Quanto enunceremo di seguito costituisce un caso particolare di un teorema dimostrato da *H. Trotter*, specializzato al caso di gruppi ad un parametro di operatori unitari generati dalla somma di due operatori autoaggiunti.

(FORMULA DI LIE–TROTTER) - *Siano (A, \mathcal{D}_A) e (B, \mathcal{D}_B) autoaggiunti e densamente definiti su \mathcal{H} , con \mathcal{H} di Hilbert; sia inoltre $(A + B, \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B)$ autoaggiunto. Allora, vale la **formula di Lie–Trotter***

$$e^{it(A+B)} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{itA/n} e^{itB/n} \right)^n. \quad (5.71)$$

Dimostrazione. Si veda *M. Reed, B. Simon, METHODS OF MODERN MATH..., vol. 1, pgg. 295–297.* \square

Si può dimostrare che la formula (5.71) è ancora valida se $A = A^*$, $B = B^*$ e se $(A + B, \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B)$ è essenzialmente autoaggiunto [ReS980]; inoltre, se A e B sono inferiormente limitati, si ha che

$$e^{-t(A+B)} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n} \right)^n. \quad (5.72)$$

La formula di Lie–Trotter ha grande utilità in Meccanica Quantistica ed in Teoria dei Campi; ne descriviamo qui una delle principali applicazioni. Sia $(\mathbf{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}))$ l'operatore di Laplace su $L_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{K}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2$ l'hamiltoniano di particella libera: si è visto che $\sigma(\mathcal{K}(\mathbf{p})) = \sigma(\mathbf{p}^2) = \mathbb{R}^+$ e dalla formula di Riesz–Dunford si è ricavata l'espressione (5.47). Lo stesso ragionamento può ripetersi per $(\mathbf{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3))$ e $\mathcal{K}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2)$: dalla (5.47) e dalla commutatività delle componenti di \mathbf{p} , segue che

$$\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3) \quad (e^{-it\mathcal{K}(\mathbf{p})} \psi)(\mathbf{x}) = \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{im}{2t} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (5.73)$$

Sia ora $\mathcal{V} \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_{\infty}(\mathbb{R}^3)$: poiché $(\mathbf{p}^2, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3))$ è autoaggiunto, è possibile invocare il teorema di Kato–Rellich e concludere che l'operatore hamiltoniano $(\mathcal{H} \equiv \mathcal{K} + \mathcal{V}, \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3))$ è autoaggiunto. Applicando allora la formula di Lie–Trotter, troviamo che $\forall \psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ risulta essere

$$(e^{-it\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \psi)(\mathbf{x}) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(e^{-it\frac{\mathcal{K}(\mathbf{p})}{n}} e^{-it\frac{\mathcal{V}(\mathbf{q})}{n}} \right) \dots \left(e^{-it\frac{\mathcal{K}(\mathbf{p})}{n}} e^{-it\frac{\mathcal{V}(\mathbf{q})}{n}} \right)}_{n\text{-volte}} \right] \psi(\mathbf{x}).$$

Calcoliamo uno degli n termini coinvolti nel limite: per semplicità, sia $\mathcal{A} \equiv e^{-it\mathcal{K}/n} e^{-it\mathcal{V}/n}$, allora

$$(\mathcal{A}\psi)(\mathbf{x}) = \left(e^{-\frac{it}{n}\mathcal{K}(\mathbf{p})} e^{-\frac{it}{n}\mathcal{V}(\mathbf{q})} \psi \right)(\mathbf{x}) = \left(\frac{nm}{2\pi it} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{inm}{2t}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 - \frac{it}{n}\mathcal{V}(\mathbf{x}')} \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

essendo $(\mathcal{V}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)\psi)(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{V}(x_1, x_2, x_3)\psi(x_1, x_2, x_3)$; quindi, avremo che

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}(\mathcal{A}\psi)](\mathbf{x}) &= \left(\frac{nm}{2\pi it} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{inm}{2t}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 - \frac{it}{n}\mathcal{V}(\mathbf{x}')} (\mathcal{A}\psi)(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \left(\frac{nm}{2\pi it} \right)^{\frac{3 \cdot 2}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{inm}{2t}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 + |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|^2) - \frac{it}{2}(\mathcal{V}(\mathbf{x}') + \mathcal{V}(\mathbf{x}''))} \psi(\mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

In definitiva, introdotte le variabili $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}'$ ed $\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{x}''$, troviamo al passo n -esimo

$$(\mathcal{A}^n \psi)(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{nm}{2\pi it} \right)^{\frac{3n}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \dots \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{it}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m \frac{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|^2}{t/n} - \mathcal{V}(\mathbf{x}_k) \right)} \psi(\mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_n \dots d\mathbf{x}_1.$$

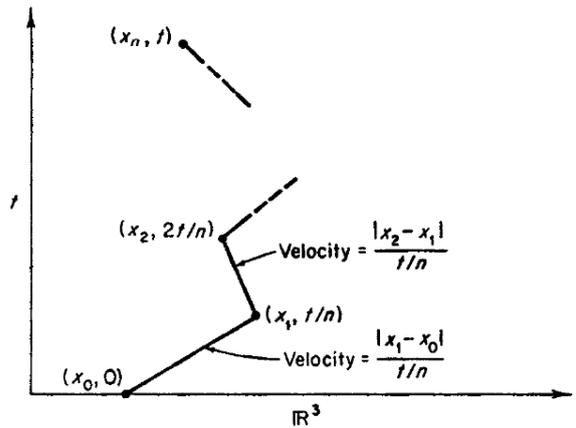
Passando ora al limite per $n \rightarrow \infty$, otteniamo come risultato la seguente espressione

$$\begin{aligned} (e^{-it\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \psi)(\mathbf{x}_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nm}{2\pi it} \right)^{\frac{3n}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \dots \int_{\mathbb{R}^3} e^{iS_n(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n; t)} \psi(\mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_n \dots d\mathbf{x}_1, \\ S_n(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n; t) &\equiv \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m \frac{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|^2}{t/n} - \mathcal{V}(\mathbf{x}_k) \right). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Oltre ad essere soluzione esplicita dell'equazione di Schrödinger temporale con condizione iniziale $\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}_0)$, la formula (5.74) "introduce" il concetto di **integrale funzionale**, dedotto da R. P. Feynman nel 1948 sulla base di considerazioni puramente fisiche. Per dare un'idea del ragionamento seguito da Feynman, facciamo corrispondere ad $m \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ed $(\mathbf{x}_0, 0)$ rispettivamente la massa di una particella classica, il potenziale al quale essa è soggetta e lo stato iniziale del moto della stessa nello spazio delle configurazioni. Se allora (\mathbf{x}, t) indica lo stato finale del sistema, sappiamo che a ciascun **cammino ammissibile** $\mathbf{x}(\tau)$ (ovvero di estremi $(\mathbf{x}_0, 0)$ ed (\mathbf{x}, t)) è associato il **funzionale azione**

$$S[\mathbf{x}(\cdot)]_0^t := \int_0^t L(\dot{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{x}(\tau)) d\tau = \int_0^t \left(\frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}(\tau)|^2 - \mathcal{V}(\mathbf{x}(\tau)) \right) d\tau, \quad (5.75)$$

dove $L = L(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau))$ è la funzione lagrangiana associata al sistema. In accordo col *principio di minima azione di Lagrange*, la traiettoria classica della particella sarà descritta dal cammino $\mathbf{x}_{cl}(\tau)$ che rende stazionaria l'azione, e cioè soddisfacente l'equazione di *Eulero-Lagrange* $m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$. A questo punto, suddividiamo l'intervallo temporale $[0, t]$ in n -sottointervalli di ampiezza Δt ed individuiamo nei vettori $\{\mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}(k\Delta t)\}_{k=0,1,\dots,n}$ i vertici di una poligonale Γ_n approssimante il cammino ammissibile $\mathbf{x}(\tau)$ (vedi figura); in questo modo, la quantità $S_n(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n; t)$ corrisponde proprio all'azione classica (5.75) calcolata lungo Γ_n : infatti, nel limite per $n \rightarrow \infty$ si ha che $\Delta t \rightarrow 0$ e quindi



$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n; t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m \frac{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|^2}{\Delta t} - \mathcal{V}(\mathbf{x}_k) \right) \Delta t = S[\mathbf{x}(\cdot)]_0^t.$$

Naturalmente $\Gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(\tau)$ dunque, detto $\mathcal{C}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t) := \{\mathbf{x}(\tau) : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\}$ l'insieme di tutti i cammini ammissibili tra $(\mathbf{x}_0, 0)$ ed (\mathbf{x}, t) , troviamo che la (5.74) si riscrive elegantemente come

$$\left(e^{-it\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \psi \right) (\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{C}} e^{iS[\mathbf{x}(\tau)]_0^t} \psi(\mathbf{x}(\tau)) \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau), \quad \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nm}{2\pi it} \right)^{\frac{3n}{2}} \prod_{k=1}^n d\mathbf{x}_k. \quad (5.76)$$

L'integrale (5.76) prende il nome di *integrale di Feynman lungo i cammini* e l'insieme $\mathcal{C}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$ è detto *spazio dei cammini di Feynman*. Dal punto di vista matematico, l'integrale (5.76) non definisce rigorosamente un integrale funzionale: si può infatti dimostrare [Fey948] che i cammini di Feynman sono continui ma non differenziabili in alcun punto (dunque $e^{iS[\mathbf{x}(\tau)]_0^t}$ diverge) e che la quantità $\mathcal{D}\mathbf{x}(\tau)$, formalmente introdotta in (5.76), non soddisfa la proprietà di σ -additività (dunque non definisce una misura su $\mathcal{C}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$). Tuttavia, l'integrale di Feynman può essere reso rigoroso prolungando analiticamente la (5.76) tramite la cosiddetta *rotazione di Wick* $t \rightarrow it$: in questo modo, l'integrando decresce esponenzialmente e la misura, nota ora come **misura di Wiener**¹⁰⁸, è ben definita.

Dal punto di vista fisico, la formula (5.76) descrive l'evoluzione del sistema dallo stato iniziale $(\mathbf{x}_0, 0)$ a quello finale (\mathbf{x}, t) . Introducendo quindi il cosiddetto *propagatore quantistico*

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) := \int_{\mathcal{C}} e^{iS[\mathbf{x}(\tau)]_0^t} \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau), \quad (5.77)$$

(detto anche *nucleo integrale* di $e^{-it\mathcal{H}}$ o *funzione di Green dell'op.di Schrödinger* e spesso indicato con $\mathcal{K}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$ o $\langle \mathbf{x}_0, 0 | \mathbf{x}, t \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathcal{U}_{t,0} | \mathbf{x}_0 \rangle$, in notazione di Dirac), la (5.76) si scrive equivalentemente come

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) \psi(\mathbf{x}_0, 0) d\mathbf{x}_0. \quad (5.78)$$

La formula (5.78) evidenzia il contenuto dell'interpretazione di Feynman dell'evoluzione temporale:

ogni cammino indipendente $\mathbf{x}(\tau) \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t)$ contribuisce alla probabilità $\mathcal{P}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t) \propto |\mathcal{G}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t)|^2$ che il sistema evolva da $(\mathbf{x}_0, 0)$ ad (\mathbf{x}, t) con un fattore di fase $e^{iS[\mathbf{x}(\tau)]_0^t}$, dove $S[\mathbf{x}(\tau)]_0^t$ è l'azione classica associata al cammino $\mathbf{x}(\tau)$ e $\mathcal{G}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t)$ è il propagatore (5.77).

In altre parole, l'idea di Feynman¹⁰⁹ è quella di associare un'ampiezza di probabilità ad ogni cammino ammissibile ed ottenere l'ampiezza totale sommando su tutte possibili alternative disgiunte, in accordo con il *principio di sovrapposizione*. Questo fatto va letto con cautela: ciascun cammino, infatti, contribuisce con un fattore di modulo unitario e la somma è estesa ad infiniti cammini; ciononostante, l'integrale in (5.76) è una quantità finita. La chiave di questa apparente contraddizione risiede nel modo col quale *cammini diversi interferiscono tra loro*¹¹⁰: ciò che si scopre è che *gli unici contributi non nulli all'integrale (5.76) sono dovuti a cammini $\mathbf{x}(\tau)$ prossimi al cammino classico $\mathbf{x}_{cl}(\tau)$* , in corrispondenza del quale l'azione è stazionaria. Ciò emerge in modo naturale ripristinando nella rappresentazione di posizione di \mathbf{p} su $L_2(\mathbb{R}^3)$ il fattore \hbar , sicché la (5.76) si riscrive come

$$\left(e^{-\frac{i}{\hbar} t\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \psi \right) (\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{x}(\tau)]_0^t} \psi(\mathbf{x}(\tau)) \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau). \quad (5.79)$$

¹⁰⁸Già nel 1925 N. Wiener aveva introdotto il concetto di integrale funzionale lungo un *random walk* nello studio dei processi di diffusione. La connessione con l'integrale di Feynman non è casuale: sotto rotazione di Wick, la Schrödinger temporale è un'equazione di Fokker-Planck, l'equazione di riferimento nello studio dei processi di diffusione normale.

¹⁰⁹Già P. A. M. Dirac nel 1933 aveva avanzato un'idea simile: egli era giunto ad affermare che il propagatore infinitesimo doveva "corrispondere" alla quantità e^{iS} , dove S è l'azione classica calcolata lungo il cammino classico. Fu merito di Feynman esprimere il propagatore finito come *infinite convoluzioni* del propagatore infinitesimo secondo la (5.76) mostrando, inoltre, che ad esso *contribuisce equivalentemente* ogni cammino ammissibile e non solo quello classico. Si veda [Fey948] per approfondimenti e [Fey965] per una descrizione delle idee e delle vicende che hanno condotto alla formula (5.77).

¹¹⁰Un analogo dell'esperimento delle due fenditure, nel quale il sistema attraversa simultaneamente ciascun cammino.

Siano quindi $\mathbf{x}(\tau), \mathbf{x}(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t)$ tali che $\mathbf{x}(\tau, \varepsilon) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon \eta(\tau)$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrariamente piccolo ed $\eta = \eta(\tau)$ continua su $[0, t]$ e tale per cui $\eta(0) = \mathbf{0} = \eta(t)$ (in caso contrario $\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)$ non sarebbe un cammino ammissibile). Sviluppando $S[\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)]_0^t$ in un "intorno" di $\mathbf{x}(\tau)$ si trova quanto segue:

$$S[\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)]_0^t = \int_0^t L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) d\tau + \varepsilon \int_0^t \left(\frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \eta d\tau + \frac{\varepsilon^2}{2!} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_a \partial \mathbf{x}_b} \eta_a \eta_b + 2 \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_a \partial \dot{\mathbf{x}}_b} \eta_a \dot{\eta}_b + \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{\mathbf{x}}_a \partial \dot{\mathbf{x}}_b} \dot{\eta}_a \dot{\eta}_b \right) d\tau + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Introducendo quindi l'operatore di derivata funzionale di $S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]$ rispetto al cammino $\tilde{\mathbf{x}}(\tau)$

$$\frac{\delta S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t}{\delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau, \varepsilon)]_0^t - S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t}{\varepsilon} = \int_0^t \left(\frac{\partial L(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau))}{\partial \tilde{\mathbf{x}}(\tau)} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau))}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau)} \right) d\tau, \quad (5.80)$$

possiamo riscrivere $S[\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)]$ come uno sviluppo in *serie funzionale di Taylor* intorno ad $\mathbf{x}(\tau)$:

$$S[\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)]_0^t = S[\mathbf{x}(\tau)]_0^t + \varepsilon \frac{\delta S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t}{\delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\delta^2 S[\tilde{\mathbf{x}}]_0^t}{\delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)^2} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.81)$$

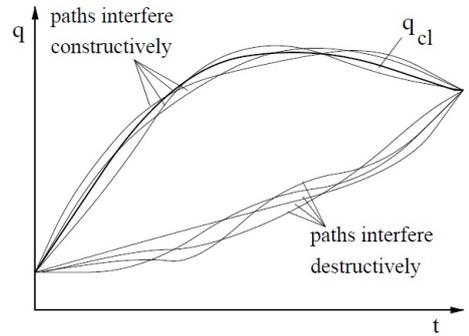
Poiché i contributi in ampiezza dovuti a ciascun cammino si sommano, troviamo dalla (5.81) che

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_0, 0; \mathbf{x}, t) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{x}(\tau)]_0^t} \left(1 + \exp \left\{ \frac{\varepsilon}{\hbar} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}} S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} + \frac{\varepsilon^2}{2\hbar} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}^2} S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} \right\} \right),$$

avendo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore al secondo in ε . Troviamo così che il termine che contribuisce alla differenza di fase tra i due cammini, e che quindi regola l'interferenza tra i corrispondenti contributi in ampiezza, è

$$\exp \left\{ \frac{\varepsilon}{\hbar} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}} S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} + \frac{\varepsilon^2}{2\hbar} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}^2} S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} \right\}.$$

Di conseguenza, se $\mathbf{x}(\tau)$ è un cammino generico, non conta quanto piccola sia la variazione $\varepsilon \eta(\tau)$: nel limite per $\hbar \rightarrow 0$ la differenza di fase tra i cammini sarà comunque grande e l'*interferenza distruttiva*. Se invece $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_{cl}(\tau)$, allora $\delta_{\tilde{\mathbf{x}}} S[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)]_0^t \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_{cl}} = 0$ ed alla differenza di fase contribuisce maggiormente il termine in ε^2 , per cui nel limite $\hbar \rightarrow 0$ a piccole variazioni di $\mathbf{x}_{cl}(\tau)$ corrispondono piccole differenze di fase e l'interferenza tra i cammini è *costruttiva* (figura a destra). Pertanto, se il problema è classico (ovvero se $S[\mathbf{x}(\cdot)]_0^t \gg \hbar$), la maggior parte del contributo al path integral proviene dai cammini ammissibili prossimi al cammino classico.



6 Distribuzioni e trasformata di Fourier

Sovente in Fisica risulta necessario generalizzare il concetto di funzione (e.g. per descrivere una carica puntiforme in Elettrodinamica oppure un punto materiale in Meccanica), sostituendolo con quello di *funzionale*, i.e. un'applicazione da un opportuno spazio di funzioni in un campo \mathbb{K} . In questa sezione analizzeremo le proprietà di una particolare classe di funzionali, detti *distribuzioni*¹¹¹. Cominciamo con l'elencare alcune proprietà elementare alle quali tali entità devono soddisfare [Rud973]:

- a) ogni funzione continua dev'essere una distribuzione;
- b) le derivate parziali di una distribuzione devono essere ancora distribuzioni;
- c) per funzioni differenziabili la nuova nozione di derivata deve coincidere con quella usuale;
- d) devono essere soddisfatte le usuali regole di calcolo;
- e) deve esistere una nozione di convergenza tale da gestire gli usuali processi di limite.

Al fine di motivare le definizioni che verranno, restringiamo per un attimo l'attenzione al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ed $n = 1$. Sia $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ (vedi Esempi, §4.4), con Ω un aperto non-vuoto di \mathbb{R} e ϕ una “funzione di prova” (equiv. “funzione test”) appartenente ad un'opportuno spazio: l'idea è reinterpretare f come quell'applicazione che assegna a ciascuna ϕ il numero $\int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx$. Occorre allora specificare un'opportuna classe di funzioni di prova. A tal proposito, introduciamo la cosiddetta [ReS975]

(NOTAZIONE MULTI-INDICE) - Sia $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Chiameremo **multi-indice** α la n -upla $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; inoltre, posto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definiamo con i simboli $\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})$ e $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha$ le quantità

$$\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial_{\mathbf{x}}^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (6.1)$$

dove $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ è detto ordine della derivata e $\partial_{x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ per $i = 1, 2, \dots, n$.

Ricordiamo inoltre le seguenti definizioni relative ad insiemi e funzioni a supporto compatto.

DEFINIZIONE (INSIEME COMPATTO) - Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed Ω' un suo sottoinsieme. Diremo che Ω' è **compatto** in Ω sse Ω' è limitato ed $\overline{\Omega'} \subset \Omega$; scriveremo quindi $\Omega' \Subset \Omega$.

DEFINIZIONE (FUNZIONE A SUPPORTO COMPATTO) - Sia $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Detto $\mathcal{O} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$, definiamo supporto di f in Ω l'insieme $\text{supp}(f) := \overline{\mathcal{O}}$. In particolare, se $\text{supp}(f) \Subset \Omega$ diremo che f è una funzione a **supporto compatto** in Ω .

6.1 Spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni di prova

Sia ora $C_0^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. In $C_0^\infty(\Omega)$ è possibile introdurre una nozione di convergenza, basata sulla seguente

DEFINIZIONE (SUCCESIONE NULLA IN $C_0^\infty(\Omega)$) - La successione di funzioni $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, $\varphi_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ è una **successione nulla** di $C_0^\infty(\Omega)$ sse soddisfa le seguenti condizioni:

- i) esiste un compatto $K \subset \Omega$ t.c. $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$;
- ii) per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\{\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi_\nu(\mathbf{x})\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a zero, i.e.

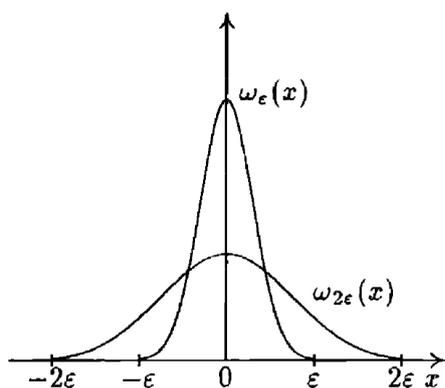
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi_\nu(\mathbf{x})|\} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \quad (6.2)$$

¹¹¹Per una trattazione più approfondita, rimandiamo il lettore alle monografie: I. M. GEL'FAND, G. E. SHILOV – *Generalized functions. Vol. I, III*, Academic Press (1984); V. S. VLADIMIROV – *Methods of the Theory of Generalized functions*, Taylor & Francis (2002).

Segue che, data $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, allora $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu} \varphi$ in $C_0^\infty(\Omega)$ se $\{\varphi_\nu - \varphi\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è una successione nulla. Indichiamo quindi con τ la topologia indotta su $C_0^\infty(\Omega)$ dal precedente concetto di convergenza.

DEFINIZIONE (SPAZIO DELLE FUNZIONI DI PROVA) - Si definisce **spazio delle funzioni di prova** $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio topologico $\mathcal{D}(\Omega) := (C_0^\infty(\Omega), \tau)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora φ è detta funzione di prova.

Naturalmente se $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \mathcal{D}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\Omega_2)$ e dalla convergenza in $\mathcal{D}(\Omega_1)$ segue la convergenza in $\mathcal{D}(\Omega_2)$ [Vla002]. Un esempio di funzione di prova non-nulla è la funzione a cappello



$$w_\varepsilon(x) := \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & x \in \mathcal{U}_\varepsilon, \\ 0, & x \notin \mathcal{U}_\varepsilon, \end{cases} \quad (6.3)$$

con $\mathcal{U}_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e dove C_ε soddisfa la condizione $\int_{\mathbb{R}} w_\varepsilon(x) dx = 1$ (infatti w_ε svolgerà tra breve il ruolo di funzione di media). Si noti che $\{\frac{1}{\nu} w(x)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è una successione nulla, mentre $\{\frac{1}{\nu} w(\frac{x}{\nu})\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ed $\{\frac{1}{\nu} w(\nu x)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ non lo sono in quanto non soddisfano la *v*) e la *u*), rispettivamente.

La (6.3) permette di costruire famiglie di funzioni di prova. E.g., sia A un generico sottoinsieme di \mathbb{R}^n ed $A^\varepsilon \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \varepsilon, \forall \mathbf{y} \in \partial A\}$ lo ε -intorno dell'insieme A . Detta χ_{A^ε} la funzione caratteristica di A^ε , introduciamo la funzione

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A^{2\varepsilon}}(\mathbf{x}') w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (6.4)$$

Si verifica banalmente che la famiglia di funzioni $\{\eta_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ soddisfa le seguenti proprietà [Vla002]:

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in A^\varepsilon, \\ 0, & \mathbf{x} \notin A^{3\varepsilon}, \end{cases} \quad 0 \leq \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 1, \quad |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \mathcal{K}_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|},$$

in altre parole $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vale allora il seguente

LEMMA (FUNZIONI DI PROVA) - Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ; allora $\forall \Omega' \Subset \Omega$ esiste $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.c.

$$\eta(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega', \quad 0 \leq \eta(\mathbf{x}) \leq 1.$$

Dimostrazione. Si scelgano $A \equiv \Omega'$ e $\varepsilon = \frac{1}{3} \inf_{\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{x}' \in \partial \Omega} \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\}$ nel ragionamento precedente. \square

Occorre notare che lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ non è metrizzabile, nel senso che la topologia τ' indotta dalla nozione di convergenza su di esso definita su non può essere descritta in termini di una metrica. Per dimostrare questo assunto, è sufficiente verificare che in $\mathcal{D}(\Omega)$ non funziona un procedimento diagonale tipico degli spazi metrici, descritto dal seguente [Rud973]

LEMMA (PROCEDURA DIAGONALE STANDARD) - Sia (X, d) uno spazio metrico ed $\{\{x_\nu^{(\mu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ un insieme di successioni convergenti ad $\{x^{(\mu)}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ rispettivamente, con $\{x^{(\mu)}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ convergente ad x . Allora

- (1) $\exists \{\nu_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ strettamente crescente t.c. $x_{\nu_\mu}^{(\mu)}$ converge ad x ;
- (2) $\exists \{\mu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ non-decrescente t.c. $x_{\mu_\nu}^{\mu_\nu}$ converge ad x .

Dimostrazione. Per def. $\forall \mu \in \mathbb{N}$, $\exists \{\nu_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ stret. crescente t.c. $d(x_{\nu_\mu}^{(\mu)}, x^{(\mu)}) < 2^{-\mu}$, $\forall \nu \geq \nu_\mu$, per cui

$$d(x_{\nu_\nu}^{(\mu)}, x) \leq d(x_{\nu_\nu}^{(\mu)}, x^{(\mu)}) + d(x^{(\mu)}, x) < \frac{1}{2^\mu} + d(x^{(\mu)}, x) \xrightarrow{\mu \rightarrow +\infty} 0,$$

da cui segue la (1). Per provare la (2), procediamo per induzione. Passo 1: $x^{(\mu)} \rightarrow x \Rightarrow \exists \mu_1 \in \mathbb{N}$

t.c. $d(x^{(\mu_1)}, x) \leq 2^{-1}$, mentre $x_\nu^{(\mu_1)} \rightarrow x^{(\mu_1)} \Rightarrow \exists \nu_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $d(x_\nu^{(\mu_1)}, x^{\mu_1}) < 2^{-1}$, $\forall \nu \geq \nu_1$, per cui $d(x_\nu^{(\mu_1)}, x) < 1$, $\forall \nu \geq \nu_1$. Passo 2: $x^{(\mu)} \rightarrow x \Rightarrow \exists \mu_2 > \mu_1$ t.c. $d(x^{(\mu_2)}, x) < 2^{-2}$, mentre $x_\nu^{(\mu_2)} \rightarrow x^{(\mu_2)} \Rightarrow \exists \nu_2 > \nu_1$ t.c. $d(x_\nu^{(\mu_2)}, x^{\mu_2}) < 2^{-2}$, $\forall \nu \geq \nu_2$, per cui $d(x_\nu^{(\mu_2)}, x) < 2^{-1}$, $\forall \nu > \nu_2$. Per $\nu_1 \leq \nu < \nu_2$ si pone $\mu_\nu = \mu_1$, cosicché per tali ν è $d(x_\nu^{(\mu_\nu)}, x) < 1$ (per i ν precedenti, si può scegliere ancora $\mu_\nu = \mu_1$, ma non c'è stima della distanza da x). Passo 3: $x^{(\mu)} \rightarrow x \Rightarrow \exists \mu_3 > \mu_2$ t.c. $d(x^{(\mu_3)}, x) < 2^{-3}$, mentre $x_\nu^{(\mu_3)} \rightarrow x^{(\mu_3)} \Rightarrow \exists \nu_3 > \nu_2$ t.c. $d(x_\nu^{(\mu_3)}, x^{\mu_3}) < 2^{-3}$, $\forall \nu \geq \nu_3$; per cui $d(x_\nu^{(\mu_3)}, x) < 2^{-2}$, $\forall \nu \geq \nu_3$. Per $\nu_2 \leq \nu < \nu_3$ si pone $\mu_\nu = \mu_2$, cosicché per tali ν si ha $d(x_\nu^{(\mu_\nu)}, x) < 2^{-1}$. Passi n ed $n+1$: si sono determinate le sequenze $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ e $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n$ tali per cui

$$d(x^{(\mu_i)}, x) < 2^{-i}, \quad d(x_\nu^{(\mu_i)}, x) < 2^{i-1}, \quad \forall \nu \geq \nu_i;$$

si pone $\mu_\nu = \mu_{i-1}$ per $\nu_{i-1} \leq \nu < \nu_i$, sicché $d(x_\nu^{(\mu_\nu)}, x) < 2^{i-1}$. Ma n è arbitrario, da cui la tesi. \square

Possiamo allora verificare la non-metrizzabilità di $\mathcal{D}(\Omega)$ scegliendo, e.g., la famiglia di funzioni

$$\varphi_\nu^{(\mu)}(x) \equiv \frac{1}{\nu} w_1 \left(\frac{x}{\mu} \right), \quad \nu, \mu \in \mathbb{N},$$

la quale è in $\mathcal{D}(\Omega)$, ma non gode delle proprietà descritte dal precedente lemma: infatti, nessuna diagonale $\varphi_{\nu_\mu}^{(\mu)}$ può soddisfare la proprietà (1). Ciononostante, come vedremo tra breve, la non-metrizzabilità di $\mathcal{D}(\Omega)$ rappresenta un problema minore nella costruzione della teoria.

Torniamo alle proprietà dello spazio topologico $\mathcal{D}(\Omega)$; si è visto che esiste dunque un buon numero di funzioni di prova in $\mathcal{D}(\Omega)$. Vogliamo mostrare ora che tale numero è sufficiente a garantire che lo spazio dei funzionali lineari continui costruiti su $\mathcal{D}(\Omega)$ sia altrettanto grande. A questo proposito, sia $f \in L_{p,loc}(\Omega)$ ed f_ε il prodotto di convoluzione di f con w_ε , i.e.

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv (f * w_\varepsilon)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}') w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{\mathbb{R}^n} w(\mathbf{x}') f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (6.5)$$

Laddove definita, f_ε è detta *funzione media* di f . Se $f \in L_p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ ed $f(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \notin \Omega$, allora $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (a fronte delle proprietà di f e della definizione (6.5)) e vale la disuguaglianza

$$\|f_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \quad (6.6)$$

La (6.6) segue dalla *disuguaglianza di Young* per funzioni sommabili, secondo la quale se $f \in L_p(\Omega)$ e $g \in L_1(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, allora $f * g \in L_p(\Omega)$ ed $\|f * g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)}$; nel nostro caso

$$\|f_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} = \|f * w_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|w_\varepsilon\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)},$$

essendo $\int_{\Omega} w_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq 1$ alla luce della normalizzazione. Equivalentemente, possiamo dimostrare la (6.6) invocando la *disuguaglianza di Hölder*, secondo la quale se $f \in L_p(\Omega)$ e $g \in L_q(\Omega)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ t.c. $p^{-1} + q^{-1} = 1$, allora $fg \in L_1(\Omega)$ ed $\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}$; troviamo infatti

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}') w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right|^p d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x}') w_\varepsilon^{1/p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') w_\varepsilon^{1/q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')| d\mathbf{x}' \right)^p d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x}') w_\varepsilon^{1/p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')|^p d\mathbf{x}' \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w_\varepsilon^{1/q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')|^q d\mathbf{x}'' \right)^{p/q} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(\mathbf{x}')|^p w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \left(\int_{\mathbb{R}^n} w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' \right)^{p-1} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x} \right) |f(\mathbf{x}')|^p d\mathbf{x}' \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

avendo adoperato al penultimo il *teorema di Fubini-Tonelli*. Il caso $p = \infty$ segue in modo analogo.

TEOREMA (CONVERGENZA DELLA MEDIA) - Sia $f \in L_{p,0}(\Omega)$, i.e. $f \in L_p(\Omega)$ a supporto compatto in Ω ; sia inoltre $f(\mathbf{x}) = 0$ q.o. $\forall \mathbf{x} \notin \Omega'$, con $\Omega' \Subset \Omega$. Allora $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega) \forall \varepsilon < \inf_{\mathbf{x} \in \Omega', \mathbf{x}' \in \partial\Omega} \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\}$ ed

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f \quad \begin{cases} \text{in } C^0(\overline{\Omega}) & \text{se } f \in C_0^0(\Omega), \\ \text{in } L_p(\Omega), p \in [1, +\infty) & \text{se } f \in L_{p,0}(\Omega), \\ \text{q.o. in } \Omega & \text{se } f \in L_{\infty,0}(\Omega). \end{cases} \quad (6.7)$$

Dimostrazione. Si noti che se $\varepsilon < \inf_{\mathbf{x} \in \Omega', \mathbf{x}' \in \partial\Omega} \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\}$, allora f_ε ha supporto compatto in Ω ; ma $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, sicché $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sia ora $f \in C_0^0(\Omega)$ (continua a supporto compatto); segue che

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})] w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right| \\ &\leq \max_{\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \mathcal{U}_\varepsilon} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})| \int_{\mathbb{R}^n} w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \max_{\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \mathcal{U}_\varepsilon} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})|, \end{aligned}$$

con $\mathbf{x} \in \Omega$. Ma f è uniformemente continua $\Rightarrow f_\varepsilon(\mathbf{x}) \Rightarrow f(\mathbf{x})$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Sia ora $f \in L_{p,0}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$ arbitrario: allora $\exists g \in C_0^0(\Omega)$ t.c. $\|f - g\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\delta}{3}$; inoltre $\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\|g - g_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} < \delta/3 \forall \varepsilon < \varepsilon_0$. Combinando la (6.6) con la *disuguaglianza di Minkowsky* (i.e. se $f, g \in L_p(\Omega)$ ed $f + g \in L_p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, allora $\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}$) si trova

$$\begin{aligned} \|f - f_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} &\leq \|f - g\|_{L_p(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} + \|(g - f)_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L_p(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta. \end{aligned}$$

Dunque $f_\varepsilon \rightarrow f$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in $L_p(\Omega)$. Infine, se $f \in L_{\infty,0}(\Omega)$, è possibile costruire una successione di funzioni di $C_0^0(\Omega)$ convergente ad f q.o. in Ω , sicché $f_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ q.o. in Ω . \square

Dal precedente teorema è possibile dedurre il seguente, importante corollario [Vla002].

COROLLARIO (DENSITÀ DI $\mathcal{D}(\Omega)$) - Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $L_p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$.

6.2 Spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni di Schwartz

Consideriamo ora lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle *funzioni a rapida decrescenza*, i.e. l'insieme delle funzioni infinitamente differenziabili su \mathbb{R}^n che decrescono insieme a tutte le loro derivate più rapidamente di qualsiasi potenza inversa di $|\mathbf{x}|$, per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Più formalmente, si consideri la seguente

DEFINIZIONE (SPAZIO DI SCHWARTZ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; φ è a **rapida decrescenza** (o di **Schwartz**) se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \exists \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\varphi) \in \mathbb{R}^+$ con $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\varphi) < +\infty$ tale che

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\beta \varphi(\mathbf{x})| \leq \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

Come per $\mathcal{D}(\Omega)$, anche lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ può essere munito della struttura di spazio topologico, essendo la topologia τ' indotta ora dalla seguente nozione di convergenza [Vla002]:

DEFINIZIONE (SUCCESIONE NULLA IN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è nulla in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sse

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\varphi_\nu\|_{\alpha,\beta} = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

DEFINIZIONE (SPAZIO DELLE FUNZIONI DI PROVA DI SCHWARTZ) - Sia τ' come prima. Definiamo **spazio delle funzioni di prova di Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio topologico $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau')$.

OSSERVAZIONE – La convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è molto restrittiva. E.g., si consideri la successione di funzioni $\varphi_\nu(x) \equiv \frac{1}{2\nu} e^{-(\nu x)^2}$: essa è uniform. nulla, i.e. $\|\varphi_\nu\|_{0,0} \rightarrow 0$, ma non è nulla di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, in quanto già

$$\|\varphi_\nu\|_{1,0} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{x}{2\nu} e^{-(\nu x)^2} \right\} = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{y e^{-y^2}\} = (2e)^{-1/2} \neq 0.$$

Valgono le seguenti inclusioni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \equiv (C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ed $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p \leq \infty$; per la prima è sufficiente osservare che $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ risulta essere

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi(\mathbf{x})|\} = \|\varphi\|_{0,0} < \infty;$$

La seconda, invece, può essere dimostrata verificandola dapprima per $p = 1$, i.e.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ |(1 + |\mathbf{x}|^2)\varphi(\mathbf{x})| \right\} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{x}}{1 + |\mathbf{x}|^2} \leq \mathcal{K} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ |\varphi(\mathbf{x})| + \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{x}|^2 |\varphi(\mathbf{x})| \right\} \leq \mathcal{K} \left[\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi(\mathbf{x})|\} + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\mathcal{M}^2(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})|\} \right] = \mathcal{K}(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0}), \end{aligned}$$

avendo notato che $\sup_{\mathbf{x}} \{|\mathbf{x}|^2\} \leq \sup_{\mathbf{x}} \{\mathcal{M}^2(\mathbf{x})\}$, quindi per $p > 1$:

$$\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi(\mathbf{x})|\} \right)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \|\varphi\|_{0,0}^{p-1} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Naturalmente $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, infatti $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni e^{-|\mathbf{x}|^2} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Vale però il seguente [Rud973]

TEOREMA ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vs. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (rispetto alle relative topologie).

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\psi(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_1$; allora $f_r(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x})\psi(r\mathbf{x}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\forall r \in \mathbb{R}^+$. Indicando con \mathcal{P} un generico polinomio di \mathbb{R}^n e con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-indice, troviamo

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha (f - f_r)(\mathbf{x}) = \mathcal{P}(\mathbf{x}) \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\alpha}{\beta} r^{|\beta|} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha-\beta} f(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\beta [1 - \psi(r\mathbf{x})], \quad (6.8)$$

alla luce della formula di Leibnitz¹¹². Per costruzione risulta che $\forall \beta \in \mathbb{N}_0^n$ è $\partial_{\mathbf{x}}^\beta [1 - \psi(r\mathbf{x})] = 0$ laddove $|\mathbf{x}| \leq r^{-1}$ e poiché $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sarà $\mathcal{P} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha-\beta} f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\mathcal{P} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha-\beta} f \rightarrow 0$ per $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$, $\forall \beta \leq \alpha$. Pertanto la (6.8) tende a zero uniformemente in \mathbb{R}^n per $r \rightarrow 0$, i.e. $f_r \rightarrow f$ per $r \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

COROLLARIO (DENSITÀ DI $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L_p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$.

Dimostrazione. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = L_p(\mathbb{R}^n)$; ma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = L_p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [1, \infty)$. \square

Lo spazio di Schwartz è più ricco in struttura rispetto a $\mathcal{D}(\Omega)$. Per cominciare, si noti che l'applicazione $\|(\cdot)\|_{\alpha,\beta} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}_0^+$ soddisfa gli assiomi di una **semi-norma** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$: difatti $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} \geq 0$, $\|\mathcal{K}\varphi\|_{\alpha,\beta} = |\mathcal{K}| \|\varphi\|_{\alpha,\beta}$ per ogni $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$ e $\forall \varphi, \varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale la disuguaglianza triangolare $\|\varphi + \varphi'\|_{\alpha,\beta} \leq \|\varphi\|_{\alpha,\beta} + \|\varphi'\|_{\alpha,\beta}$. Tuttavia $\|(\cdot)\|_{\alpha,\beta}$ non può essere una norma, poiché la proprietà $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ vale sse $\beta = (0, 0, \dots, 0)$ (e.g., la funzione di prova identica $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ ha $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = 0$ per ogni $\beta \neq (0, 0, \dots, 0)$). Possiamo dimostrare che, rispetto alla semi-norma introdotta, lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è *completo* (i.e. è uno *spazio di Frechét* [Rud973]).

¹¹²Ricordiamo che, date $f, g \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, la derivata di ordine $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$ di fg è data dalla *formula di Leibnitz*:

$$\partial_{\mathbf{x}}^\alpha (fg)(\mathbf{x}) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_{\mathbf{x}}^\beta f(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^{\beta-\alpha} g(\mathbf{x}), \quad \binom{\alpha}{\beta} \equiv \prod_{k=1}^n \binom{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad (6.9)$$

avendo indicato simbolicamente con $\alpha! \equiv \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ il fattoriale del multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

TEOREMA ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ È DI FRECHÉT) - Lo spazio $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|(\cdot)\|_{\alpha,\beta})$ è completo $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Dimostrazione. Sia $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ di Cauchy rispetto alla topologia indotta dalla semi-norma, i.e.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists \mathcal{N}_{\alpha,\beta}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\| \leq \varepsilon, \quad \forall \nu, \mu > \mathcal{N}_{\alpha,\beta}(\varepsilon).$$

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\{\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}}^\beta \varphi_\nu(\mathbf{x})\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto ad $\|(\cdot)\|_\infty$ e converge a $\psi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, che è di Banach; in particolare $\varphi_\nu \rightarrow \psi_{0,0} \equiv \psi$. È sufficiente dimostrare che $\psi_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = (\mathcal{M}^\alpha \partial_{\mathbf{x}}^\beta \psi)(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sicché $\|\psi\|_{\alpha,\beta} = \|\psi\|_{0,0} < \infty$ e cioè $\psi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si consideri dunque l'identità

$$(\mathcal{M}^\alpha \partial_{\mathbf{x}}^\gamma \varphi_\nu)(\mathbf{x}) = (\mathcal{M}^\alpha \partial_{\mathbf{x}}^\gamma \varphi_\nu)(\mathbf{0}) + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \left[\partial_{\mathbf{y}} (\mathcal{M}^\alpha \partial_{\mathbf{y}}^\gamma \varphi_\nu) \right](\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Essendo la convergenza uniforme, invochiamo il teorema di passaggio del limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}) &= \psi_{\alpha,\gamma}(\mathbf{0}) + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \left[\mathcal{M}(\alpha) (\mathcal{M}^{\alpha-1} \partial_{\mathbf{y}}^\gamma \varphi_\nu)(\mathbf{y}) + (\mathcal{M}^\alpha \partial_{\mathbf{y}}^{\gamma+1} \varphi_\nu)(\mathbf{y}) \right] d\mathbf{y} \\ &= \psi_{\alpha,\gamma}(\mathbf{0}) + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \left[\mathcal{M}(\alpha) \psi_{\alpha-1,\gamma}(\mathbf{y}) + \psi_{\alpha,\gamma+1}(\mathbf{y}) \right] d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

dove $\gamma - 1 = (\gamma_1 - 1, \gamma_2 - 1, \dots, \gamma_n - 1)$ ed avendo osservato che $(\partial_{\mathbf{x}} \mathcal{M}^\alpha)(\mathbf{x}) = \mathcal{M}(\alpha) \mathcal{M}^{\alpha-1}(\mathbf{x})$, con $\mathcal{M}(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. Pertanto $\psi_{\alpha,\gamma}$ è differenziabile $\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ e risulta essere

$$\partial \psi_{\alpha,\gamma} = \mathcal{M}(\alpha) \psi_{\alpha-1,\gamma} + \psi_{\alpha,\gamma+1}.$$

Per $\alpha = 0$ è $\partial \psi_{0,\gamma} = \psi_{0,\gamma+1}$, i.e. $\psi_{0,\gamma} = \partial^\gamma \psi$ per cui $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, tenendo presente che $\mathcal{M}^\alpha \psi_{0,\gamma+1} = \partial(\mathcal{M}^\alpha \psi_{0,\gamma}) - \mathcal{M}(\alpha) \mathcal{M}^{\alpha-1} \psi_{0,\gamma}$, dall'identità precedente troviamo

$$\psi_{\alpha,\gamma+1} - \mathcal{M}^\alpha \psi_{0,\gamma+1} = \partial(\psi_{\alpha,\gamma} - \mathcal{M}^\alpha \psi_{0,\gamma}) - \mathcal{M}(\alpha)(\psi_{\alpha-1,\gamma} - \mathcal{M}^{\alpha-1} \psi_{0,\gamma}),$$

iterando la quale, scopriamo che $\psi_{\alpha,\gamma+1} - \mathcal{M}^\alpha \psi_{0,\gamma+1}$ può essere scritta come combinazione lineare della quantità $\psi_{\alpha,0} - \mathcal{M}^\alpha \psi_{0,0}$. Perché $\psi_{\alpha,\gamma} = \mathcal{M}^\alpha \partial^\gamma \psi$ è allora sufficiente far vedere che $\psi_{\alpha,0} = \mathcal{M}^\alpha \psi$:

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha,0} - \mathcal{M}^\alpha \psi| &\leq |\psi_{\alpha,0} - \mathcal{M}^\alpha \varphi_\nu| + |\mathcal{M}^\alpha(\varphi_\nu - \psi)| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\psi_{\alpha,0} - \mathcal{M}^\alpha \varphi_\nu|\} + \\ &+ |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})| \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi_\nu - \psi|\} \leq \varepsilon(1 + |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})|), \quad \forall \nu > \mathcal{N}(\varepsilon), \end{aligned}$$

dove sia ε che $\mathcal{N}(\varepsilon)$ sono indipendenti da $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (in virtù dell'uniforme convergenza). \square

OSSERVAZIONE - L'applicazione $\mathfrak{D}(\cdot, \cdot) : (\varphi, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathfrak{D}(\varphi, \tilde{\varphi}) \in \mathbb{R}_0^+$ definita come

$$\mathfrak{D}(\varphi, \tilde{\varphi}) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \frac{\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\alpha,\beta}}{1 + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\alpha,\beta}}, \quad (6.10)$$

soddisfa gli assiomi di una metrica, rispetto alla quale $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{D})$ è completo [Rud973].

Concludiamo con due proprietà delle funzioni di prova di Schwartz. La prima segue dalla convergenza di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e riguarda l'invarianza di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sotto l'azione delle operazioni di differenziazione $\varphi \mapsto \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi$ e di trasformazione lineare $\varphi(\mathbf{x}) \mapsto \varphi(\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{a})$, con $\mathcal{A} \in \text{End}(n, \mathbb{R})$ ed $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. La seconda riguarda invece la moltiplicazione di una funzione $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per una funzione in $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$: in generale $a\varphi \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (e.g. $e^{-|\mathbf{x}|^2} e^{|\mathbf{x}|^2} = 1 \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Ciononostante, è possibile rendere la mappa $\varphi \mapsto a\varphi$ lineare e continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una volta introdotta la seguente classe di funzioni.

DEFINIZIONE (MULTIPLICATORI IN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è un **moltiplicatore di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$** se

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists C_\alpha, m_\alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.c.} \quad |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha a(\mathbf{x})| \leq C_\alpha (1 + |\mathbf{x}|^{m_\alpha}). \quad (6.11)$$

Lo spazio $C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei moltiplicatori di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, individua quindi l'insieme delle funzioni infinitamente differenziabili su \mathbb{R}^n che crescono, insieme a tutte le loro derivate, meno rapidamente di qualsiasi polinomio per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$; per questo, nella letteratura, ci si riferisce spesso a $C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ come allo spazio delle *funzioni a lenta crescita*. A tal spazio appartengono allora tutte le funzioni razionali della forma $\varphi(\mathbf{x}) = (1 + |\mathbf{x}|^2)^m$ con $m \in \mathbb{R}$. $C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ ha un ruolo rilevante nella teoria, in virtù del seguente

TEOREMA (MOLTIPLICAZIONE IN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - Sia $a \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \mapsto a\varphi$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Cominciamo dal caso $n = 1$: posti $\alpha = \ell$ e $\beta = m$, risulta

$$\begin{aligned} \|a\varphi\|_{\ell,m} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x^\ell (\partial_x^m (a\varphi))(x)| \right\} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x|^\ell \sum_{k \leq m} \binom{m}{k} |\partial_x^k \varphi(x)| |\partial_x^{m-k} a(x)| \right\} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x|^\ell \sum_{k \leq m} \binom{m}{k} C_{m-k} |\partial_x^k \varphi(x)| (1 + |x|^{m-k}) \right\}; \end{aligned}$$

detto $\mu \equiv \max_{k \leq m} \{m_{m-k}\}$ ed indicando con q il più piccolo naturale t.c. $q \geq \mu + \ell$, si ha

$$\|a\varphi\|_{\ell,m} \leq C_\mu \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ (1 + |x|^\mu) |x|^\ell \sum_{k \leq m} \binom{m}{k} |\partial_x^k \varphi(x)| \right\} \leq \mathcal{K} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x^q \partial_x^p \varphi(x)| \right\} = \mathcal{K} \|\varphi\|_{q,p},$$

avendo tenuto conto delle proprietà di $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Per $n > 1$, troviamo invece

$$\|a\varphi\|_{\alpha,\beta} \leq C_\mu \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1 + |\mathbf{x}|^\mu) |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial_{\mathbf{x}}^\gamma \varphi(\mathbf{x})| \right\},$$

dove $\mu \equiv \max_{\gamma \leq \beta} \{m_{\beta-\gamma}\} \in \mathbb{N}_0$; tenendo presente che $|\mathbf{x}|^\mu \leq |\mathcal{M}(\mathbf{x})|^\mu$ per $\mathbf{x} > \mathbf{1}$ ed indicando con $\zeta \in \mathbb{N}_0^n$ il più piccolo multi-indice t.c. $\zeta \geq \alpha + \mu$, otteniamo in definitiva

$$\|a\varphi\|_{\alpha,\beta} \leq C_\mu \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ |\mathcal{M}^\zeta(\mathbf{x})| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial_{\mathbf{x}}^\gamma \varphi(\mathbf{x})| \right\} \leq \mathcal{K} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ |(\mathcal{M}^\zeta \partial_{\mathbf{x}}^\eta \varphi)(\mathbf{x})| \right\} = \mathcal{K} \|\varphi\|_{\zeta,\eta},$$

avendo nuovamente invocato le proprietà di $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Esempi

◦ FUNZIONI GAUSSIANE E FUNZIONI DI HERMITE

Proviamo che $\mathbf{x} \mapsto e^{-|\mathbf{x}|^2}$ è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A tal fine, si noti che, dato $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ è

$$(\partial_{\mathbf{x}}^\beta e^{-|\mathbf{x}|^2})(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\beta|} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \prod_{k=1}^n \mathcal{P}_{\beta_k}(x_k) e^{-x_k^2} \equiv \mathcal{P}_{|\beta|}(\mathbf{x}) e^{-|\mathbf{x}|^2},$$

dove $\mathcal{P}_{|\beta|}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{P}_{\beta_1}(x_1) \mathcal{P}_{\beta_2}(x_2) \dots \mathcal{P}_{\beta_n}(x_n)$ rappresenta simbolicamente un multi-polinomio di ordine β_1 in x_1 , β_2 in x_2 e così via. In tal notazione, sarà $\mathcal{M}^\alpha \mathcal{P}_{|\beta|} \equiv \mathcal{P}_{|\alpha+\beta|}$, quindi

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} \mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\beta e^{-|\mathbf{x}|^2} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} \mathcal{P}_{|\alpha+\beta|}(\mathbf{x}) e^{-|\mathbf{x}|^2} = 0$$

e $\|e^{-|\mathbf{x}|^2}\|_{\alpha,\beta} \leq +\infty$. È immediato allora convincersi del fatto che per ogni polinomio $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{x})$ la funzione $\mathcal{P}(\mathbf{x}) e^{-|\mathbf{x}|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (come del resto segue dal teorema di moltiplicazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Alla precedente famiglia appartengono, in particolare, le funzioni di Hermite definite nel §2.7.

6.3 Distribuzioni e spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni

In questa sezione analizzeremo alcune proprietà delle distribuzioni e dei corrispondenti “spazi distribuzionali”. A seconda dello spazio delle funzioni di prova, i.e. $\mathcal{D}(\Omega)$ od $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, distingueremo tra *distribuzioni* e *distribuzioni temperate*, rispettivamente. Cominciamo dalla prima tipologia.

DEFINIZIONE (DISTRIBUZIONE) - Definiamo **distribuzione** un funzionale lineare e continuo $(\mathcal{T}, \cdot) : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto (\mathcal{T}, \varphi) \in \mathbb{K}$. Diremo allora che \mathcal{T} è una *distribuzione reale* (complessa) se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Per prendere confidenza con la notazione, si noti che \mathcal{T} è *lineare* su $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\forall \varphi, \varphi' \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ è $(\mathcal{T}, \alpha\varphi + \beta\varphi') = \alpha(\mathcal{T}, \varphi) + \beta(\mathcal{T}, \varphi')$; inoltre \mathcal{T} è *continuo* su $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\forall \{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.c. $\varphi_\nu \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ per $\nu \rightarrow +\infty$, risulta $(\mathcal{T}, \varphi_\nu) \rightarrow (\mathcal{T}, \varphi)$ per $\nu \rightarrow +\infty$ ¹¹³. Siano ora \mathcal{T} e \mathcal{T}' due distribuzioni su $\mathcal{D}(\Omega)$: diremo che \mathcal{T} e \mathcal{T}' sono *uguali* in Ω se $(\mathcal{T}, \varphi) = (\mathcal{T}', \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni definite su $\mathcal{D}(\Omega)$: tal insieme soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale, dal momento che $\forall \mathcal{T}, \mathcal{Q} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ risulta $(\alpha\mathcal{T} + \beta\mathcal{Q}, \varphi) = \alpha(\mathcal{T}, \varphi) + \beta(\mathcal{Q}, \varphi) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. È possibile dunque introdurre in $\mathcal{D}'(\Omega)$ la seguente nozione di convergenza.

DEFINIZIONE (CONVERGENZA DEBOLE) - $\{\mathcal{T}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ **converge debolmente** a $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$(\mathcal{T}_\nu, \varphi) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} (\mathcal{T}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La precedente induce su $\mathcal{D}'(\Omega)$ la topologia $\tilde{\tau}$, in termini della quale si definisce lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega) := (\mathcal{D}'(\Omega), \tilde{\tau})$. La notazione non è casuale: $\mathcal{D}'(\Omega)$ il *duale topologico* di $\mathcal{D}(\Omega)$ (si veda §2.4).

DEFINIZIONE (SPAZIO $\mathcal{D}'(\Omega)$) - Definiamo **spazio delle distribuzioni** su $\mathcal{D}(\Omega)$ il duale $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Naturalmente $\Omega' \subset \Omega \Rightarrow \mathcal{D}'(\Omega') \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ e la convergenza in $\mathcal{D}'(\Omega)$ implica la convergenza in $\mathcal{D}'(\Omega')$; dunque ogni $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ammette un'unica restrizione su qualsiasi aperto $\Omega' \subset \Omega$ t.c. $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega')$. Si prova inoltre che $\mathcal{D}'(\Omega)$ è *completo*, nel senso che dato un generico funzionale \mathcal{T} definito su $\mathcal{D}(\Omega)$ e considerata la successione $\{\mathcal{T}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ debolmente convergente a \mathcal{T} , allora $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ [V1a002].

Dimostriamo quindi il seguente teorema di caratterizzazione per distribuzioni in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

TEOREMA (TEST DI CONTINUITÀ IN $\mathcal{D}'(\Omega)$) - Sia \mathcal{T} lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$; allora $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sse

$$\forall \Omega' \Subset \Omega, \quad \exists \mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Omega'} \in \mathbb{R}^+, \quad m = m_{\Omega'} \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |(\mathcal{T}, \varphi)| \leq \mathcal{K} \|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega}')}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega'). \quad (6.12)$$

Dimostrazione. (\Leftarrow) Banale. (\Rightarrow) Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ed $\Omega' \Subset \Omega$; supponiamo per assurdo che la (6.12) non sia soddisfatta: dovrà allora esistere una successione $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di $\mathcal{D}(\Omega')$ t.c.

$$|(\mathcal{T}, \varphi_\nu)| \geq \mathcal{K} \|\varphi_\nu\|_{C^\nu(\overline{\Omega}')} := \sup_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}', |\beta| \leq \nu} \left\{ |\partial_{\mathbf{x}}^\beta \varphi_\nu(\mathbf{x})| \right\}. \quad (6.13)$$

D'altronde, la successione $\{\psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ con $\psi_\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{\nu}} \varphi_\nu \|\varphi_\nu\|_{C^\nu(\overline{\Omega}')}^{-1}$, converge debolmente a zero in $\mathcal{D}(\Omega)$, essendo $\text{supp}(\psi_\nu) \subset \Omega' \Subset \Omega$ e poiché $\forall k \leq |\beta|$ risulta essere

$$|\partial_{\mathbf{x}}^\beta \psi_\nu(\mathbf{x})| = \frac{|\partial_{\mathbf{x}}^\beta \varphi_\nu(\mathbf{x})|}{\sqrt{\nu} \|\varphi_\nu\|_{C^\nu(\overline{\Omega}')}} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0.$$

Pertanto $(\mathcal{T}, \psi_\nu) \rightarrow 0$ per $\nu \rightarrow \infty$. Ma alla luce della (6.13), abbiamo al contempo che

$$|(\mathcal{T}, \psi_\nu)| = \frac{|(\mathcal{T}, \varphi_\nu)|}{\sqrt{\nu} \|\varphi_\nu\|_{C^\nu(\overline{\Omega}')}} \geq \sqrt{\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} +\infty,$$

il che è assurdo, per cui la disuguaglianza (6.12) dev'essere soddisfatta. \square

¹¹³Equivalentemente, in virtù della linearità di \mathcal{T} , è possibile verificarne la continuità nell'origine, i.e. \mathcal{T} è lineare se $\forall \{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ nulla in $\mathcal{D}(\Omega)$ per $\nu \rightarrow +\infty$, la successione numerica $\{(\mathcal{T}, \varphi_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ tende a zero per $\nu \rightarrow +\infty$.

Le distribuzioni in $\mathcal{D}'(\Omega)$ possono essere classificate in base alle proprietà di ordine e regolarità. Cominciamo dalla prima, la quale fa uso della disuguaglianza (6.12) introdotta nel teorema precedente.

DEFINIZIONE (ORDINE DI UNA DISTRIBUZIONE) - $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è di **ordine finito** se $\exists m \in \mathbb{N}$ indep. da $\Omega' \Subset \Omega$ t.c. vale la (6.12); chiameremo **ordine** di \mathcal{T} in Ω il più piccolo $m \in \mathbb{N}$ soddisf. tale condizione.

Un classico esempio di distribuzione di *ordine infinito* in \mathbb{R}^+ è dato dalla distribuzione

$$(\mathcal{T}, \varphi) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \varphi^{(\nu)}(\nu), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Discutiamo ora la proprietà di regolarità di una distribuzione. Per farlo, mostriamo preliminarmente che ogni funzione localmente sommabile su un aperto Ω di \mathbb{R}^n definisce una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si consideri pertanto una funzione $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ ed a partire da essa si costruisca il funzionale

$$(\mathcal{T}_f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (6.14)$$

Proviamo che $\mathcal{T}_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Evidentemente \mathcal{T}_f è ben definito, dal momento che per definizione $f\varphi \in L_{1,loc}(\Omega)$ (essendo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$), e lineare (in virtù della linearità dell'integrale). Resta da provare la continuità su Ω , al qual fine è sufficiente verificarne la continuità in zero. Sia quindi $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una successione nulla in $\mathcal{D}(\Omega)$: allora $\exists \Omega' \Subset \Omega$ t.c. $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset \Omega'$ per $\nu = 1, 2, \dots$ e dunque

$$|(\mathcal{T}_f, \varphi_\nu)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi_\nu(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})\varphi_\nu(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega'} \{|\varphi_\nu(\mathbf{x})|\} \int_{\Omega'} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0,$$

dal momento che $\varphi_\nu \rightrightarrows 0$ su Ω' per $\nu \rightarrow +\infty$. In modo analogo si prova che il funzionale

$$(\mathcal{T}_{f,\alpha}, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (6.15)$$

è una distribuzione $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\forall f \in L_{1,loc}(\Omega)$. Alla luce di tanto, si usa dare la seguente

DEFINIZIONE (DISTRIBUZIONI REGOLARI E SINGOLARI) - Sia $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Diremo che \mathcal{T} è **regolare** su Ω se $\exists f \in L_{1,loc}(\Omega)$ t.c. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$; in caso contrario, diremo che \mathcal{T} è **singolare**.

Intesa come applicazione da $L_{1,loc}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, la (6.14) individua q.o. una corrispondenza uno-ad-uno tra funzioni localmente sommabili e distribuzioni regolari. Per verificarlo, introduciamo il seguente

LEMMA (DU BOIS-REYMOND) - Sia $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ e $\mathcal{T}_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come in (6.14). Allora

$$f(\mathbf{x}) = 0 \text{ q.o. in } \Omega \iff (\mathcal{T}_f, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dimostrazione. (\Rightarrow) Banale. (\Leftarrow) Sia $\Omega' \Subset \Omega$ e $\chi_{\Omega'}$ una funzione caratteristica ad esso associata. In virtù del teorema "convergenza della media" $\exists \{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ t.c. $\varphi_\nu(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i \text{Arg} f(\mathbf{x})} \chi_{\Omega'}(\mathbf{x})$ q.o. in Ω' ed $|\varphi_\nu(\mathbf{x})| \leq 1$ q.o. in Ω' . Dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (nel senso di Lebesgue) e poiché per ipotesi $(\mathcal{T}_f, \varphi) = 0 \, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, risulta

$$\int_{\Omega'} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i \text{Arg} f(\mathbf{x})} \chi_{\Omega'}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi_\nu(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_f, \varphi_\nu) = 0,$$

sicché $f(\mathbf{x}) = 0$ q.o. in $\Omega' \Rightarrow f(\mathbf{x}) = 0$ q.o. in Ω , essendo $\Omega' \Subset \Omega$ arbitrario. \square

Di conseguenza, l'immersione $\mathcal{T}_{(\cdot)} : f \in L_{1,loc}(\Omega) \mapsto \mathcal{T}_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definita come in (6.14) è *iniettiva*, per cui ad ogni funzione localmente sommabile corrisponde una ed una sola distribuzione regolare e viceversa.

Esempi

◦ DISTRIBUZIONE DI HEAVISIDE E DISTRIBUZIONE CARATTERISTICA

Cominciamo con l'osservare che se $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria, allora il funzionale

$$(\mathcal{T}_c, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} c\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

è ben definito, lineare e continuo, i.e. $\mathcal{T}_c \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Sia ora $\theta = \theta(x)$ la “funzione” di Heaviside: $\theta \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, quindi $\forall n \in \mathbb{N}_0$ definisce la distribuzione

$$(\theta_n, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\varphi^{(n)}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} \varphi^{(n)}(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+). \quad (6.16)$$

La continuità della (6.16) è evidente: data $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ nulla in $\mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+)$ per $\nu \rightarrow +\infty$, è $|(\theta_n, \varphi_\nu)| \leq \mu \sup_{x \in [0, \mu]} \{|\varphi_\nu^{(n)}(x)|\} \rightarrow 0$ per $\nu \rightarrow +\infty$, con $\mu \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\text{supp}(\varphi_\nu u) \subset [0, \mu]$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Sia infine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: la funzione caratteristica associata definisce la distribuzione regolare

$$(\chi_\Omega, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (6.17)$$

◦ DISTRIBUZIONE DELTA DI DIRAC

Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ ed $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ una costante. Definiamo **delta di Dirac** il funzionale

$$(\delta_{\mathbf{a}}, \cdot) : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = \varphi(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}. \quad (6.18)$$

Per come definito, $\delta_{\mathbf{a}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Linearità: $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$(\delta_{\mathbf{a}}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(\mathbf{a}) + \beta\varphi_2(\mathbf{a}) = \alpha(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi_1) + \beta(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi_2).$$

Per provarne la continuità, invece, sia $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ nulla in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$|(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi_\nu)| = |\varphi_\nu(\mathbf{a})| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi_\nu(\mathbf{x})|\} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0.$$

La delta di Dirac è una *distribuzione singolare*, i.e. $\delta_{\mathbf{a}} \notin L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Per assurdo, sia $f_{\mathbf{a}} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$; come funzione di prova in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, scegliamo la seguente $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv w_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, con w_ε definita come in (6.3). Allora $(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi_\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\mathbf{a}) = 1/e$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} = |(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi_\varepsilon)| &\leq \int_{u_\varepsilon(\mathbf{a})} \left| e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2}} \right| |f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in u_\varepsilon(\mathbf{a})} \left\{ e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2}} \right\} \int_{u_\varepsilon(\mathbf{a})} |f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = \frac{1}{e} \|f_{\mathbf{a}}\|_{L_1(u_\varepsilon(\mathbf{a}))}; \end{aligned}$$

ma $f_{\mathbf{a}} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, sicché $\|f_{\mathbf{a}}\|_{L_1(u_\varepsilon(\mathbf{a}))} \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, da cui

$$\frac{1}{e} = |(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi_\varepsilon)| \leq \frac{1}{e} \|f_{\mathbf{a}}\|_{L_1(u_\varepsilon(\mathbf{a}))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

il che è assurdo, dunque la distribuzione di Dirac è *non-regolare*. Ciononostante, nella letteratura si usa spesso introdurre la distribuzione $\delta_{\mathbf{a}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ in forma integrale secondo l'espressione

$$(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{a}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Sebbene si tratti di notazione conveniente ai fini del calcolo, è bene ricordare che essa costituisce solo di un modo formale per rappresentare l'azione del funzionale $\delta_{\mathbf{a}}$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

6.4 Distribuzioni temperate e δ -famiglie

Passiamo all'analisi della famiglia delle distribuzioni definite sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni di prova di Schwartz. In virtù delle precedenti considerazioni per $\mathcal{D}'(\Omega)$, diamo da subito le seguenti

DEFINIZIONE (DISTRIBUZIONE TEMPERATA) - Definiamo **distribuzione temperata** un funzionale lineare e continuo $(\mathcal{T}, \cdot) : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathcal{T}, \varphi) \in \mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

DEFINIZIONE (SPAZIO $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Definiamo **spazio delle distribuzioni temperate** il duale $\mathcal{S}'(\Omega)$.

Naturalmente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e la convergenza in \mathcal{S}' implica la convergenza in \mathcal{D}' ; inoltre, vale il duale del teorema " $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vs. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ", i.e. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Come per $\mathcal{D}'(\Omega)$, anche per $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vale un criterio di continuità, legato alla limitatezza rispetto alle semi-norme $\|(\cdot)\|_{\alpha, \beta}$.

TEOREMA (TEST DI CONTINUITÀ IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia \mathcal{T} lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora $\mathcal{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sse

$$\exists \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^+, \mathcal{N} \equiv \mathcal{N}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |(\mathcal{T}, \varphi)| \leq \mathcal{K} \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\varphi\|_{\alpha, \beta}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.19)$$

Dimostrazione. (\Leftarrow) Sia $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sicché

$$|(\mathcal{T}, \varphi_\nu) - (\mathcal{T}, \varphi)| = |(\mathcal{T}, \varphi_\nu - \varphi)| \leq \mathcal{K} \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\varphi_\nu - \varphi\|_{\alpha, \beta} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0,$$

dunque $\mathcal{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. (\Rightarrow) Sia $\mathcal{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; in particolare, \mathcal{T} è continua per $\varphi = 0$, per cui $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\mathfrak{D}(\psi, 0) < \delta \Rightarrow |(\mathcal{T}, \psi)| < 1$, con $\mathfrak{D} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definita come in (6.10). Scegliamo dunque $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ t.c. $\sum_{\alpha \wedge \beta > \mathcal{N}^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} < \frac{\delta}{2}$: ne segue che $\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\psi\|_{\alpha, \beta} \leq \frac{\delta}{2}$ e quindi

$$\mathfrak{D}(\psi, 0) = \sum_{\alpha, \beta \geq 0} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \frac{\|\psi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\psi\|_{\alpha, \beta}} \leq \sum_{\alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\psi\|_{\alpha, \beta} + \sum_{\alpha \wedge \beta > \mathcal{N}^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |(\mathcal{T}, \psi)| \leq 1.$$

Di conseguenza, per ogni funzione di prova di Schwartz $0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, posto

$$\psi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta}{2} \left(\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\varphi\|_{\alpha, \beta} \right)^{-1} \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

troviamo

$$\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\psi\|_{\alpha, \beta} = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \frac{\delta}{2} \left(\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\varphi\|_{\alpha, \beta} \right)^{-1} \|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \frac{\delta}{2}$$

da cui

$$|(\mathcal{T}, \psi)| = \frac{2}{\delta} \left(\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\varphi\|_{\alpha, \beta} \right) |(\mathcal{T}, \varphi)| < \frac{2}{\delta} \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \mathcal{N}^n} \|\varphi\|_{\alpha, \beta}. \quad \square$$

OSSERVAZIONE - In virtù del teorema precedente, la distribuzione delta di Dirac definita in (6.18) è una distribuzione temperata su \mathbb{R}^n dal momento che $|(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi)| = \varphi(\mathbf{a}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi(\mathbf{x})|\} = \|\varphi\|_{0,0}$.

Discutiamo ora le proprietà di regolarità delle distribuzioni temperate. Nel §6.3 si è visto come ogni funzione localmente sommabile definisca una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$ secondo la (6.14). Non tutte le $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ sono temperate: e.g. la funzione $\mathbf{x} \mapsto e^{|\mathbf{x}|}$ è in $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ ma non in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ poiché $\int_{\mathbb{R}^n} e^{|\mathbf{x}|} e^{-\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2}} d\mathbf{x}$ non esiste finito, essendo $e^{|\mathbf{x}|} e^{-\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2}} \rightarrow 1$ per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Occorre allora imporre qualche limitazione sulla crescita ad $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$. Cominciamo dalle funzioni p -sommabili¹¹⁴.

¹¹⁴Ricordiamo che $L_p(\mathbb{R}^n) \subset L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < +\infty$ (e.g. la funzione costante $f(\mathbf{x}) = c$ è sommabile localmente, ma non globalmente) e che $L_1(\mathbb{R}^n) \supset L_p(\mathbb{R}^n)$ per $p > 1$ (più in generale $L_p(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^n)$ per $p > q$).

TEOREMA ($L_p(\mathbb{R}^n)$ vs. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$; allora $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con

$$(\mathfrak{T}_f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.20)$$

Dimostrazione. Sia $p = 1$ ed $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$: allora $|(\mathfrak{T}_f, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{0,0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \equiv \mathcal{K}\|\varphi\|_{0,0}$ con $\mathcal{K} \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathcal{K} < +\infty$, per cui $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (teorema “test di continuità in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ”). Sia ora $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$: è sufficiente notare che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^n)$ (vedi §6.2) e scegliere $q \in [1, +\infty]$ t.c. $p^{-1} + q^{-1} = 1$; applicando la disuguaglianza di Hölder, si trova $|(\mathfrak{T}_f, \varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$. Ma le norme in $L_p(\mathbb{R}^n)$ si esprimono in termini delle semi-norme in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sicché $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. \square

Per allargare l'insieme delle funzioni che definiscono delle distribuzioni temperate, diamo la seguente

DEFINIZIONE (FUNZIONE TEMPERATA) - Diremo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ è una **funzione temperata** se

$$\exists n_f \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{t.c.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|(1 + |\mathbf{x}|^2)^{-n_f} \, d\mathbf{x} < +\infty.$$

Si noti che f è temperata sse $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$: l'implicazione diretta è evidente; proviamone l'inversa. Sia $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $f\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e l'integrale (6.20) esiste (essendo $(1 + |\mathbf{x}|^2)^{-n_f} \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$); inoltre, posto $m = n_f - \mu$, con $\mu \equiv \mu(n) \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|(1 + |\mathbf{x}|^2)^{-n_f} \, d\mathbf{x} \leq \mathcal{C} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^2)^m (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-n_f} \, d\mathbf{x} \leq \mathcal{C} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{x}}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^\mu} \equiv \mathcal{K}_\mu < +\infty,$$

dove $\mathcal{K}_\mu \equiv \mathcal{C}\Pi_\mu < +\infty$, avendo scelto $\mu \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\Pi_\mu \equiv \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-\mu} \, d\mathbf{x}$ esista finito.

TEOREMA ($L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ vs. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ temperata e \mathfrak{T}_f definito come in (6.20), allora

$$|(\mathfrak{T}_f, \varphi)| \leq \mathcal{C} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^{m_f}) |\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \mathcal{K}_\mu \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1 + |\mathbf{x}|^\zeta) |\psi(\mathbf{x})| \right\}, \quad \psi(\mathbf{x}) \equiv (1 + |\mathbf{x}|^{m_f}) \varphi(\mathbf{x}),$$

essendo ζ il più piccolo naturale t.c. $\zeta \geq 2\mu$ (e.g. $\zeta = \lceil 2\mu \rceil$). Ma $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sicché $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$|(\mathfrak{T}_f, \varphi)| \leq \mathcal{K}_\mu \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ |\psi(\mathbf{x})| \} + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ |\mathcal{M}^\zeta(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})| \} \right) = \mathcal{K} (\|\psi\|_{0,0} + \|\psi\|_{\zeta,0});$$

sicché dal teorema “test di continuità in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ” segue che $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il che prova la tesi. \square

Ogni funzione temperata definisce una distribuzione temperata regolare, ma *non* vale il viceversa: e.g. $x \mapsto \partial_x(\cos e^x) = -e^x \sin e^x$ non è temperata, ma definisce una distribuzione temperata:

$$(\partial_x(\cos e^x), \varphi) = - \int_{\mathbb{R}} \cos e^x \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Mostriamo ora che $f \in L_{1,loc} \cap C_M^\infty \mapsto \mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'$ è *suriettiva*, i.e. ogni distribuzione temperata definisce una ed una sola funzione temperata. A tal proposito, siano $f_1, f_2 \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.c. $(\mathfrak{T}_{f_1}, \varphi) = (\mathfrak{T}_{f_2}, \varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. In virtù della linearità dei funzionali \mathfrak{T}_{f_1} e \mathfrak{T}_{f_2} , risulta

$$(\mathfrak{T}_{f_1 - f_2}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 - f_2)(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

la quale, una volta posto $g(\mathbf{x}) \equiv (f_1 - f_2)(\mathbf{x})$, può essere riscritta equivalentemente nella seguente forma

$$(\mathfrak{T}_g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^{n/2}} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \psi(\mathbf{x}) \equiv (1 + |\mathbf{x}|^2)^{n/2} \varphi(\mathbf{x}).$$

con $\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, essendo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Detta quindi $h(\mathbf{x}) \equiv \frac{g(\mathbf{x})}{(1+|\mathbf{x}|^2)^{m/2}}$, segue dalle proprietà della funzione $g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ e di $(1+|\mathbf{x}|^2)^{m/2}$ che $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$, sicché

$$h \in L_1(\mathbb{R}^n) \quad \text{t.c.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

D'altronde se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora $\mathbf{y} \mapsto \psi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per cui la precedente è soddisfatta sse $(h * \psi)(\mathbf{y}) = 0, \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Data l'arbitrarietà di $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, scegliamo la funzione parametrica gaussiana $\psi_a(\mathbf{x}) \equiv a e^{-\pi a^2 |\mathbf{x}|^2}$: nel §6.5 vedremo che la collezione di funzioni $\{\psi_a, a \in \mathbb{R}_0^+\}$ individua una δ -famiglia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nel senso che $\psi_a \rightarrow \delta$ per $a \rightarrow +\infty$, dove δ è la distribuzione delta di Dirac; nel §6.5 mostreremo inoltre che δ rappresenta l'elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\delta * \varphi = \varphi$. Alla luce di tanto, è evidente che $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è $(\psi_a * h)(\mathbf{y}) \rightarrow h(\mathbf{y})$ per $a \rightarrow +\infty$, per cui $0 = (\psi_n * h)(\mathbf{y}) \rightarrow h(\mathbf{y}) \Leftrightarrow h(\mathbf{y}) = 0$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ovvero $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$ q.o. su \mathbb{R}^n .

A completamento della sezione, discutiamo le proprietà di convergenza nello spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIZIONE (CONVERGENZA IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\{\mathfrak{T}_a, a \in \mathbb{R}\}$ una famiglia in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Diremo che $\{\mathfrak{T}_a, a \in \mathbb{R}\}$ converge a \mathfrak{T} in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ per $a \rightarrow a_0$ e scriveremo $\mathfrak{T}_a \rightarrow \mathfrak{T}$ per $a \rightarrow a_0$, sse

$$(\mathfrak{T}_a, \varphi) \xrightarrow{a \rightarrow a_0} (\mathfrak{T}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.21)$$

Si noti che il funzionale $\mathfrak{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ definito dalla (6.21) è una distribuzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in virtù delle proprietà di linearità e di continuità di ciascun \mathfrak{T}_a . Ad esempio, sia $\mathfrak{T}_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$(\mathfrak{T}_a, \varphi) = a^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{iax} \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N};$$

integrando n volte per parti, e tenendo conto della rapida decrescenza di φ , troviamo

$$|(\mathfrak{T}_a, \varphi)| = \left| \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{iax} \varphi^{(n)}(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} |\varphi^{(n)}(x)| \, dx \leq \frac{\pi}{a} (\|\varphi\|_{0,n} + \|\varphi\|_{2,n}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0,$$

ovvero $\mathfrak{T}_a \rightarrow 0$ per $a \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Si consideri ora la famiglia di distribuzioni

$$(\mathfrak{T}_a, \varphi) = \frac{a}{2} \int_{-1/a}^{1/a} \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \quad (6.22)$$

integrando una volta per parti e valutando il limite per $a \rightarrow +\infty$, troviamo

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{T}_a - \delta, \varphi)| &= \left| \frac{1}{2} [\varphi(1/a) + \varphi(-1/a)] - \varphi(0) - \frac{a}{2} \int_{-1/a}^{1/a} x \varphi'(x) \, dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} [\varphi(1/a) + \varphi(-1/a)] - \varphi(0) \right| + \sup_{x \in [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]} \{|x \varphi'(x)|\} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

in virtù della continuità di φ ; pertanto $\mathfrak{T}_a \rightarrow \delta$ per $a \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Diverse famiglie di distribuzioni temperate regolari convergono alla distribuzione delta di Dirac in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Data la loro importanza (in particolare nel contesto dell'algebra delle distribuzioni rispetto al prodotto di convoluzione) si usa dare la seguente

DEFINIZIONE (δ -FAMIGLIE E δ -SUCCESIONI) - Sia $\{f_a, a \in \mathbb{R}\} \subset L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\{f_a\}_a$ è una δ -famiglia sse $f_a \rightarrow \delta$ per $a \rightarrow a_0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se $a \in \mathbb{N}$, allora $\{f_a\}_a$ è una δ -successione.

Un esempio noto è dato dalla famiglia di funzionali $\{\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon}\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, così definiti

$$(\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon}, \varphi) := \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.23)$$

Verifichiamo che $\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; evidentemente $\psi_{\mathbf{a},\varepsilon}(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2} \varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, essendo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Invochiamo la solita maggiorazione in termini di Π_μ , cosicché

$$|(\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon}, \varphi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\mathbf{x}|^2)^\mu \psi_{\mathbf{a},\varepsilon}(\mathbf{x})}{(1+|\mathbf{x}|^2)^\mu} d\mathbf{x} \right| \leq \Pi_\mu \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1+|\mathbf{x}|^\zeta) |\psi_{\mathbf{a},\varepsilon}(\mathbf{x})| \right\} \leq \Pi_\mu \left(\|\psi_{\mathbf{a},\varepsilon}\|_{0,0} + \|\psi_{\mathbf{a},\varepsilon}\|_{\zeta,0} \right),$$

con $\zeta \equiv [2\mu]$ e Π_μ come prima; per cui $\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. Resta da verificare che $\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon} \rightarrow \delta_{\mathbf{a}}$ per $\varepsilon \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: a tal fine,   sufficiente osservare che $\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \equiv \varphi(\sqrt{2\varepsilon}\mathbf{y} + \mathbf{a}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{a})$ su \mathbb{R}^n per $\varepsilon \rightarrow +\infty$ (infatti, essendo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$   $\sup_{\mathbf{y}} \{|\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{a})|\} \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow +\infty$); possiamo allora invocare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, in virt  del quale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} (\mathfrak{T}_{\mathbf{a},\varepsilon}, \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi^{n/2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{y}|^2} \varphi(\sqrt{2/\varepsilon}\mathbf{y} + \mathbf{a}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{y}|^2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \varphi(\sqrt{2/\varepsilon}\mathbf{y} + \mathbf{a}) \right] d\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Un'altra famiglia convergente alla delta in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,   definita dalla famiglia di funzioni

$$f_{a,\varepsilon}(x) \equiv \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{(x-a)^2 + \varepsilon^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \quad (6.24)$$

Proviamo che $\mathfrak{T}_{f_{a,\varepsilon}} \rightarrow \delta_a$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Per cominciare, si noti che la funzione   sommabile e normalizzata ad uno $\forall a \in \mathbb{R}_0^+$ e $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$; seguendo un ragionamento diverso dal precedente, assumiamo $a \in \mathbb{R}_0^+$ e mostriamo che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si verifica l'annullarsi dell'integrale

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}_0^+} \frac{\varphi(a+x) + \varphi(a-x) - 2\varphi(a)}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} dx.$$

Spezziamo l'integrale nelle parti $\int_0^{\mathcal{B}}$ e $\int_{\mathcal{B}}^{+\infty}$. Il modulo di quest'ultimo ammette la maggiorazione

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \left| \int_{\mathcal{B}}^{+\infty} \frac{\varphi(a+x) + \varphi(a-x) - 2\varphi(a)}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} dx \right| \leq \frac{4}{\pi} \|\varphi\|_{0,0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mathcal{B}}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0,$$

per ogni $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^+$ finito. Per l'integrale restante, invochiamo invece la formula di Lagrange, i.e. $\varphi(x \pm a) = \varphi(a) \pm x\varphi'(x')$ (essendo x' un punto nell'intervallo considerato), sostituendo la quale troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\pi} \left| \int_0^{\mathcal{B}} \frac{\varphi(a+x) + \varphi(a-x) - 2\varphi(a)}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \left| \int_0^{\mathcal{B}} \frac{x[\varphi'(\xi) - \varphi'(\xi')]}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \sup_{x \in [0, \mathcal{B}]} \{|\varphi'(x)|\} \int_0^{\mathcal{B}} \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{\pi} \|\varphi\|_{0,1} \log \left[\left(\frac{\mathcal{B}}{\varepsilon}\right)^2 + 1 \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Le famiglie (6.23) e (6.24) suggeriscono una procedura generale utile a costruire δ -famiglie a partire da funzioni temperate; esse, infatti, possono essere ottenute deformando rispettivamente le funzioni $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$ ed $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}$ per mezzo del parametro $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ nel modo seguente

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\varepsilon^n} f(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|\mathbf{x}|^2}, \quad f_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon} f(x/\varepsilon) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Possiamo quindi dimostrare il seguente criterio per la costruzione di δ -famiglie in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA (δ -FAMIGLIE) - Sia $f \in L_{1,loc} \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ non-negativa t.c. $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ e sia

$$f_{\mathbf{a},\varepsilon}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.25)$$

Allora $\{f_{\mathbf{a},\varepsilon}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ forma una $\delta_{\mathbf{a}}$ -famiglia in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Dimostrazione. La prova segue banalmente dal *teorema della convergenza dominata* secondo Lebesgue (si veda, e.g. [Sus004]), secondo il quale se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili su un opportuno spazio di misura di insieme X , se $f_n \rightarrow f$ su X e se f_n è dominata (i.e. $\exists g \in L_{1,loc}(X)$ t.c. $|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \mathbf{x} \in X$), allora è possibile portare il limite sotto il segno di integrale. Nel caso in questione, la famiglia $\{f_{\mathbf{a},\varepsilon}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ definisce la famiglia di distribuzioni temperate

$$(\mathfrak{T}_{f_{\mathbf{a},\varepsilon}}, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\varepsilon}\right) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Adoperando il cambiamento di variabile $\varepsilon \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ ed osservando che $\mathcal{J}(\varepsilon) = \varepsilon^n$, troviamo

$$(\mathfrak{T}_{f_{\mathbf{a},\varepsilon}}, \varphi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y} + \mathbf{a}) \, d\mathbf{y}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Essendo φ ed f continue, è $f(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y} + \mathbf{a}) \rightarrow f(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{a})$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; inoltre, posto $\psi_\varepsilon(\mathbf{y}) \equiv f(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y} + \mathbf{a})$, troviamo che ciascuna ψ_ε è dominata su \mathbb{R}^n , in quanto

$$|\psi_\varepsilon(\mathbf{y})| = |f(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y} + \mathbf{a})| \leq \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \{|\varphi(\mathbf{y})|\} |f(\mathbf{y})| = \|\varphi\|_{0,0} |f(\mathbf{y})|$$

ed f è localmente sommabile. Dal teorema sulla convergenza dominata segue pertanto che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathfrak{T}_{f_{\mathbf{a},\varepsilon}}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y} + \mathbf{a}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{a}) \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{a}),$$

per cui $\mathfrak{T}_{f_{\mathbf{a},\varepsilon}} \rightarrow \delta_{\mathbf{a}}$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero $\{f_{\mathbf{a},\varepsilon}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ è una δ -famiglia, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. \square

È banale allora verificare che tutte le funzioni riportate di seguito individuano delle δ -famiglie:

$$f(x) = \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}(x), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\theta(x)}{x^{3/2}} e^{-1/4x}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{\pi x}, \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{\pi x^2}.$$

OSSERVAZIONE – L'applicazione $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \mathfrak{T}_\varphi \in \mathcal{S}'$ immerge con continuità lo spazio delle funzioni di prova di Schwartz \mathcal{S} nello spazio duale delle distribuzioni temperate \mathcal{S}' , infatti $\forall a, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha che

$$\begin{aligned} \|a\varphi\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left| \mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_{\mathbf{x}}^\gamma a(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma} \varphi(\mathbf{x}) \right| \right\} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left| \mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\gamma a(\mathbf{x}) \right| \left| \partial_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma} \varphi(\mathbf{x}) \right| \right\} \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left| \mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\gamma a(\mathbf{x}) \right| \right\} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left| \partial_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma} \varphi(\mathbf{x}) \right| \right\} \leq \sum_{\gamma \leq \beta} \mathcal{C}_{\gamma,\beta} \|a\|_{\alpha,\gamma} \|\varphi\|_{0,\beta-\gamma} < \infty \end{aligned}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, i.e. $a\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La precedente, combinata con la solita maggiorazione, implica che

$$|(\mathfrak{T}_a, \varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\mathbf{x}|^2)^\mu |a(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})|}{(1+|\mathbf{x}|^2)^\mu} \, d\mathbf{x} \leq \Pi_\mu \left(\|a\varphi\|_{0,0} + \|a\varphi\|_{\zeta,0} \right),$$

con $\zeta = \lceil 2\mu \rceil$. La mappa $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \mathfrak{T}_\varphi \in \mathcal{S}'$ è iniettiva ma *non* suriettiva, nel senso che non tutte le distribuzioni temperate sono generate da funzioni a rapida decrescenza. Ciononostante, il seguente risultato (del quale diamo solo una dimostrazione sommaria), mostra che \mathcal{S} è denso in \mathcal{S}' .

TEOREMA ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vs. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - *Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una δ -successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dunque $\{f_n * \mathfrak{T}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni temperate convergente a \mathfrak{T} in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ne segue che ciascuna $\psi_{n,\varepsilon}(\mathbf{x}) \equiv (f_n * \mathfrak{T})(\mathbf{x}) e^{-\varepsilon|\mathbf{x}|^2}$ è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per cui $\{\psi_{n,\varepsilon}, \varepsilon \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente a $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Esempi

- UNA DISTRIBUZIONE APPARTENENTE A $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ MA NON APPARTENENTE AD $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Sia $\mathcal{G} \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n e^{n^2}$, allora $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \not\ni \mathcal{G} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $(\mathcal{G}, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\delta_n e^{n^2}, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{n^2} \varphi(n)$ converge per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ma può divergere se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (si prenda, e.g. $\varphi(n) = e^{-n^2}$).

- DISTRIBUZIONE VALOR PRINCIPALE (DI CAUCHY) DI $1/x$

La funzione $1/x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ha una singolarità non-integrabile in $x = 0$, dunque non definisce una distribuzione regolare. Possiamo, tuttavia, adoperare una procedura di limite utile a definire una distribuzione temperata singolare, nota come *distribuzione valor principale* (di Cauchy di $1/x$) ed indicata simbolicamente P.v. $\frac{1}{x}$. Definiamo quindi il funzionale P.v. $\frac{1}{x} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ in termini del *valor principale di Cauchy* dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, ovvero

$$\left(\text{P.v.} \frac{1}{x}, \varphi \right) := \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (6.26)$$

Il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ nella (6.26) esiste, a fronte della cancellazione dei contributi non-integrabili di $1/x$ per¹¹⁵ $x < 0$ ed $x > 0$; in virtù del teorema fondamentale del calcolo, risulta

$$\left(\text{P.v.} \frac{1}{x}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Proviamo che la funzione integranda è limitata in $x = 0$: per $x > 0$ troviamo infatti che

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \int_{-x}^x \varphi'(\xi) d\xi \leq 2\|\varphi\|_{0,1}.$$

Dalla precedente segue la continuità di P.v. $\frac{1}{x}$ su \mathcal{S} : spezzando $\int_{\mathbb{R}_+^+}$ nelle parti $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \left(\text{P.v.} \frac{1}{x}, \varphi \right) \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| dx + \int_1^{+\infty} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| dx \\ &\leq 2\|\varphi\|_{0,1} + \int_1^{+\infty} \left| \frac{x[\varphi(x) - \varphi(-x)]}{x^2} \right| dx \leq 2(\|\varphi\|_{0,1} + \|\varphi\|_{1,0}). \end{aligned}$$

Dunque P.v. $\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, in virtù del teorema “test di continuità in \mathcal{S}' ”.

In letteratura si usa spesso dare del valore principale di Cauchy di un integrale una definizione equivalente alla (6.26), nella quale si mantengono fissi gli estremi di integrazione e si deforma parametricamente la funzione integranda; ne riportiamo di seguito l'espressione

$$\text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx. \quad (6.27)$$

Per provarne l'equivalenza con la (6.26), procediamo a ritroso nel ragionamento precedente:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}_0^+} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(-x)] dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx =: \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \end{aligned}$$

avendo, al terzo passaggio, invocato il teorema sulla convergenza dominata. Quanto verificato per il funzionale P.v. $\frac{1}{x}$ a partire dalla (6.26), può allora essere ripetuto in termini della (6.27).

¹¹⁵Essendo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ liscia, risulta essere $\varphi(\pm x) = \varphi(0) \pm x\psi(x)$, con $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c. $\psi(0) = \varphi'(0)$, sicché

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{\Lambda} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{\Lambda} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} \psi(x) dx,$$

con $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ finito t.c. $\Lambda > \varepsilon$. Poiché l'ultimo integrale esiste, esiste anche il limite nella (6.26).

◦ DISTRIBUZIONE PARTE FINITA (DI HADAMARD) DI $|\mathbf{x}|^{-2}$

Consideriamo ora la “funzione” $1/|\mathbf{x}|^2 : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$: per cominciare, osserviamo che $1/|\mathbf{x}|^2$ ammette una singolarità integrabile nell’origine per $n \geq 3$, in quanto passando in coordinate ipersferiche in \mathbb{R}^n , l’integrale radiale $\int_0^1 r^{-2} r^{n-1} dr$ è finito sse $n \geq 3$. In tal caso, la funzione $|\mathbf{x}|^{-2} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap C_M^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ definisce la distribuzione temperata

$$\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}, \varphi \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (6.28)$$

Per $n = 1, 2$, la funzione ammette invece una singolarità non-integrabile nell’origine, dunque non definisce una distribuzione regolare. Tuttavia, procedendo come per P.v. $\frac{1}{x}$, è possibile definire una distribuzione singolare nota come *distribuzione parte finita* (di Hadamard) di $|\mathbf{x}|^{-2}$ ed indicata F.p. $|\mathbf{x}|^{-2}$. Per semplicità, sia $n = 1$ (la generalizzazione ad $n = 2$ è immediata). Definiamo F.p. $x^{-2} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ come la parte finita di Hadamard di $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx$ [Ang009]

$$\left(\text{F.p.} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) := \text{F.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right], \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (6.29)$$

Il limite nella (6.29) esiste: essendo φ liscia su \mathbb{R} , le singolarità provenienti da $1/x^2$ si annullano per $x < 0$ ed $x > 0$. Inoltre il primo contributo alla (6.29) può essere riscritto nella forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx + \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right].$$

Combinando quindi con la (6.29), ed in virtù del teorema fondamentale del calcolo, troviamo

$$\left(\text{F.p.} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx. \quad (6.30)$$

Verifichiamo che F.p. $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; l’integranda in (6.30) è limitata in $x = 0$, infatti per $x > 0$ si ha

$$\left| \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x dy \int_{-y}^y |\varphi''(\xi)| d\xi \leq \|\varphi\|_{0,2}.$$

Di conseguenza, il funzionale lineare F.p. $\frac{1}{x^2} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è continuo in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, in quanto

$$\begin{aligned} \left| \left(\text{F.p.} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} \right| dx + \int_1^{+\infty} \left| \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} \right| dx \\ &\leq \|\varphi\|_{0,2} + 4 \sup_{x \in [1, +\infty)} \left\{ |\varphi(x)| \right\} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \|\varphi\|_{0,2} + 4\|\varphi\|_{0,0}. \end{aligned}$$

◦ FORMULA DI PLEMELJ–SOKHOTSKI

Nello studio delle proprietà spettrali degli operatori, così come in Teoria della risposta lineare, ci si imbatte spesso nella seguente identità, nota come *formula di Plemelj–Sokhotski*:

$$\frac{1}{x - a \pm i\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{P.v.} \frac{1}{x - a} \mp i\pi\delta_a, \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (6.31)$$

La dimostrazione della (6.31) segue dalle formule (6.27) e (6.24), sicché $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è

$$\left(\frac{1}{x - a \pm i\varepsilon}, \varphi \right) = \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{(x - a)\varphi(x)}{(x - a)^2 + \varepsilon^2} dx \mp i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{(x - a)^2 + \varepsilon^2} dx \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\text{P.v.} \frac{1}{x - a} \mp i\pi\delta_a, \varphi \right).$$

6.5 Calcolo distribuzionale

L'importanza della teoria delle distribuzioni emerge nel momento in cui si estendono alcune operazioni fondamentali di calcolo, quali e.g. la derivazione o la trasformazione secondo Fourier, allo spazio delle distribuzioni. Ciò permette di collocare in un contesto rigoroso alcune proprietà di calcolo altrimenti mal definite, come può esserlo per esempio la derivata (nel senso usuale) della delta di Dirac.

Cominciamo dall'operazione di coniugazione complessa in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$; se $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è regolare, allora la distribuzione complessa coniugata $\overline{\mathfrak{T}_f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ad essa associata sarà definita come

$$(\overline{\mathfrak{T}_f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{\varphi(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}} = \overline{(\mathfrak{T}_f, \overline{\varphi})}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Quest'ultima uguaglianza può essere adoperata come definizione per generiche distribuzioni temperate.

DEFINIZIONE (CONIUGAZIONE COMPLESSA IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definiamo $\overline{\mathfrak{T}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\overline{\mathfrak{T}}, \varphi) := \overline{(\mathfrak{T}, \overline{\varphi})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.32)$$

La delta di Dirac, e.g. è una distribuzione singolare *reale*, essendo $(\overline{\delta_{\mathbf{a}}}, \varphi) = \varphi(\mathbf{a}) = (\delta_{\mathbf{a}}, \varphi)$.

Consideriamo ora l'operazione di moltiplicazione in \mathcal{S}' . Essendo \mathcal{S}' vettoriale, esso è per definizione chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare; tuttavia, non forma un'algebra rispetto all'usuale prodotto, nel senso che $\forall \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'$, in generale¹¹⁶ $\mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{T}_2 \notin \mathcal{S}'$. Supponiamo invece che $\mathfrak{T}_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sia regolare, i.e. $(\mathfrak{T}_g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ e che $f \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$: in virtù del teorema di “moltiplicazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ” (si veda §6.2), abbiamo che $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per cui

$$(f\mathfrak{T}_g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (fg)(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) (f\varphi)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (\mathfrak{T}_g, f\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

La precedente suggerisce pertanto la seguente definizione di moltiplicazione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIZIONE (MOLTIPLICAZIONE IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - $f \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; definiamo $f\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(f\mathfrak{T}, \varphi) := (\mathfrak{T}, f\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.33)$$

E.g., nel caso della delta di Dirac troviamo che $\forall f \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è $(f\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = (\delta_{\mathbf{a}}, f\varphi) = (f\varphi)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi)$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ovvero $f\delta_{\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})\delta_{\mathbf{a}}$. L'operazione di moltiplicazione può essere ulteriormente estesa, e.g. il prodotto $f\delta_{\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})\delta_{\mathbf{a}}$ continua ad aver senso $\forall f \in C(\mathbb{R}^n)$.

Vediamo ora come si trasformano le distribuzioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ rispetto ad un opportuno *cambiamento di scala*; al solito, consideriamo dapprima il caso semplice di una distribuzione regolare. Sia quindi $\mathfrak{s}_{\mathbf{a}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, l'operatore di cambiamento di scala così definito

$$\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}(\cdot) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (6.34)$$

con $\mathcal{A} \equiv \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Presa quindi la distribuzione regolare $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$(\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\det \mathcal{A}| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathcal{A}\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\det \mathcal{A}| (\mathfrak{T}_f, \mathfrak{s}_{\mathbf{a}}^{-1}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

dove $\det \mathcal{A} = a_1 a_2 \cdots a_n$ ed $\mathcal{A}^{-1} \equiv \text{diag}\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\}$. La precedente motiva la seguente

DEFINIZIONE (CAMBIAMENTO DI SCALA IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; definiamo $\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}\mathfrak{T}, \varphi) := |\det \mathcal{A}| (\mathfrak{T}, \mathfrak{s}_{\mathbf{a}}^{-1}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.35)$$

¹¹⁶Più avanti vedremo come sia possibile munire \mathcal{S}' della struttura di algebra rispetto al prodotto di convoluzione.

Nel caso della distribuzione delta di Dirac, troviamo in particolare $(\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}\delta_{\mathbf{b}}, \varphi) = |\det \mathcal{A}|(\delta_{\mathbf{b}}, \mathfrak{s}_{\mathbf{a}}^{-1}\varphi) = |\det \mathcal{A}|\varphi(\mathcal{A}\mathbf{b}) = |\det \mathcal{A}|(\delta_{\mathcal{A}\mathbf{b}}, \varphi)$, essendo $\mathcal{A}\mathbf{b} = (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n) \in \mathbb{R}^n$, sicché

$$\mathfrak{s}_{\mathbf{a}}\delta_{\mathbf{b}} = |\det \mathcal{A}|\delta_{\mathcal{A}\mathbf{b}}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Un caso particolarmente importante è l'operatore di riflessione $\mathfrak{r} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definito come $\mathfrak{r} := \mathfrak{s}_{-1}$, i.e. $(\mathfrak{r}f)(\mathbf{x}) := f(-\mathbf{x})$. In virtù della (6.35), definiamo l'operazione di riflessione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIZIONE (RIFLESSIONE IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; definiamo $\mathfrak{r}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{T}, \varphi) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{r}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.36)$$

Applicando la (6.36) alla delta di Dirac, ritroviamo la nota proprietà di parità $\mathfrak{r}\delta = \delta$.

Sia ora $\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}(\cdot) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ l'operatore di traslazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'azione di $\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}$ su una distribuzione regolare $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è data dalla relazione

$$(\mathfrak{T}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \, d\mathbf{x} = (\mathfrak{T}_f, \mathfrak{t}_{-\mathbf{a}}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Possiamo allora dare la seguente definizione di traslazione di una distribuzione.

DEFINIZIONE (TRASLAZIONE IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; definiamo $\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}\mathfrak{T}, \varphi) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{t}_{-\mathbf{a}}\varphi), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.37)$$

Nel caso della delta, risulta $\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}\delta_{\mathbf{b}} = \delta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$; quest'ultima, unita all'invarianza sotto riflessioni rispetto all'origine, implica $(\mathfrak{r}\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = (\mathfrak{r}\mathfrak{t}_{\mathbf{a}}\delta, \varphi) = (\mathfrak{r}\delta, \mathfrak{t}_{-\mathbf{a}}\varphi) = (\delta, \mathfrak{t}_{-\mathbf{a}}\varphi) = \varphi(\mathbf{a})$, i.e. $\mathfrak{r}\delta_{\mathbf{a}} = \delta_{\mathbf{a}}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Le operazioni precedenti si riassumono in termini di una generica trasformazione lineare in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sia dunque $\mathfrak{g}(\cdot) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathfrak{g}f)(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{A} \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, il rappresentativo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ della mappa $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$; presa $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$(\mathfrak{T}_{\mathfrak{g}f}, \varphi) = |\det \mathcal{A}| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\varphi(\mathcal{A}\mathbf{y} + \mathbf{a}) \, d\mathbf{y} = |\det \mathcal{A}|(\mathfrak{T}_f, \mathfrak{g}^{-1}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

La precedente motiva la seguente definizione di trasformazione lineare di una distribuzione.

DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE LINEARE IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{g}(\cdot) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathfrak{g}f)(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ come prima. Definiamo la distribuzione trasformata $\mathfrak{g}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{T}, \varphi) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{g}^{-1}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.38)$$

La (6.38) permette di studiare le proprietà di invarianza delle distribuzioni rispetto ad opportune trasformazioni (e.g. rotazioni, trasformazioni di Galilei, trasformazioni di Lorentz, etc.).

Esempi

- IDENTITÀ DISTRIBUZIONALI $x\text{P.v.}1/x = 1$ ED $x^2\text{F.p.}1/x^2 = 1$

Poniamo $f(x) \equiv x$ e $g(x) \equiv x^2$; è evidente che sia f che g sono a lenta crescita. Del resto, negli esempi al §6.3 si è visto che $\text{P.v.}x^{-1}, \text{F.p.}x^{-2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, essendo $\text{P.v.}x^{-1}$ definita come in (6.26) e $\text{F.p.}x^{-2}$ come in (6.29). In virtù della definizione (6.33), troviamo dunque che $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sono

$$\begin{aligned} (x\text{P.v.}\frac{1}{x}, \varphi) &= (\text{P.v.}\frac{1}{x}, x\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi = (1, \varphi), \\ (x^2\text{F.p.}\frac{1}{x^2}, \varphi) &= (\text{F.p.}\frac{1}{x^2}, x^2\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2\varphi(x)}{x^2} - \frac{2x^2\varphi(x)|_{x=0}}{\varepsilon} \right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx = (1, \varphi). \end{aligned}$$

6.5.1 Derivata distribuzionale, prodotto diretto e prodotto di convoluzione

Introduciamo ora il concetto di derivata di una distribuzione. Come in precedenza, partiamo dal caso semplice di una distribuzione regolare: sia quindi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la distribuzione regolare ad essa associata. Integrando $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$ volte per parti, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, scopriamo che l'azione della distribuzione regolare¹¹⁷ $\mathfrak{T}_{\partial^\alpha f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sulla funzione di prova di Schwartz $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è descritta dalla relazione

$$(\mathfrak{T}_{\partial^\alpha f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}_f, \varphi).$$

La seguente definizione estende dunque l'operazione di derivazione allo spazio delle distribuzioni.

DEFINIZIONE (DERIVATA DISTRIBUZIONALE) - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-indice. Chiameremo **derivata distribuzionale α -esima** di \mathfrak{T} la distribuzione $\partial^\alpha \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definita come

$$(\partial^\alpha \mathfrak{T}, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.39)$$

La (6.39) definisce effettivamente una distribuzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; la linearità della mappa $\partial^\alpha \mathfrak{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ è ovvia, mentre la continuità segue dalla continuità di \mathfrak{T} e di ∂^α in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: infatti, se $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sarà $\partial^\alpha \varphi_\nu \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sicché

$$(\partial^\alpha \mathfrak{T}, \varphi_\nu) = (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \partial^\alpha \varphi_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha \mathfrak{T}, \varphi).$$

Ciascuna distribuzione temperata è dunque differenziabile, i.e. lo spazio \mathcal{S}' è un'estensione dello spazio delle funzioni chiuso rispetto all'operazione di derivazione. Il seguente teorema di struttura, del quale tuttavia omettiamo la dimostrazione, mostra come \mathcal{S}' individui, in realtà, la più piccola estensione dello spazio delle funzioni temperate, chiuso rispetto alla differenziazione.

TEOREMA (STRUTTURA DI \mathcal{S}') - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; allora $\exists f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ temperata ed $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ t.c.

$$\mathfrak{T} = \partial^\alpha f, \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.40)$$

Dimostrazione. Si veda e.g. V. S. Vladimirov – METHODS OF THE THEORY OF ..., §5.4, pg. 80–81. \square

OSSERVAZIONE I – Dalla definizione (6.39) segue che se $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è regolare, allora

$$\partial^\alpha \mathfrak{T}_f = \mathfrak{T}_{\partial^\alpha f}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

In particolare, se $\partial^\alpha \mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è essa stessa regolare, allora $\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ che definisce $\partial^\alpha \mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\partial^\alpha \mathfrak{T}_f = \mathfrak{T}_g$. Alla luce dell'osservazione precedente, abbiamo quindi che $\mathfrak{T}_g = \mathfrak{T}_{\partial^\alpha f}$, ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) (\partial^\alpha \varphi)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.41)$$

Si usa allora affermare che g è la α -esima derivata debole di f e si scrive $g = \partial^\alpha f$. Confrontando la (6.41) con la definizione (4.22) di derivata debole introdotta nel §4.4, è evidente che l'operatore D^α altro non è che una restrizione in $L_2(\mathbb{R}^n)$ dell'operatore ∂^α di derivazione distribuzionale.

Vediamo ora come implementare in \mathcal{S}' l'operazione di prodotto diretto. Per cominciare, siano $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{T}_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ due distribuzioni regolari; presa $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, risulta

$$(\mathfrak{T}_f \times \mathfrak{T}_g, \varphi) = \iint_{\mathbb{R}^{n+m}} (f \times g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} = (\mathfrak{T}_f, (\mathfrak{T}_g, \varphi)).$$

in virtù del teorema di Fubini–Tonelli; equivalentemente $(\mathfrak{T}_f \times \mathfrak{T}_g, \varphi) = (\mathfrak{T}_g, (\mathfrak{T}_f, \varphi))$. Nel seguito adopereremo la prima espressione come definizione del *prodotto diretto* su \mathcal{S}' .

¹¹⁷Ricordiamo che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è invariante rispetto alla mappa $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

DEFINIZIONE (PRODOTTO DIRETTO IN \mathcal{S}') - $\mathfrak{T}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; def. $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ come

$$(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2, \varphi) := (\mathfrak{T}_1, (\mathfrak{T}_2, \varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m}). \quad (6.42)$$

Il fatto che la (6.42) sia in \mathcal{S}' , segue dal prossimo lemma, del quale diamo una dimostrazione parziale.

LEMMA I - $\forall \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ e $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, si ha che $\psi(\mathbf{x}) \equiv (\mathfrak{T}, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed $(\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \psi)(\mathbf{x}) = (\mathfrak{T}, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Inoltre, se $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, allora

$$\psi_\nu(\mathbf{x}) = (\mathfrak{T}, \varphi_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} \psi(\mathbf{x}), \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Si dimostra che $\psi \in C(\mathbb{R}^n)$ e $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \psi(\mathbf{x}) = (\mathfrak{T}, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (si veda V. S. Vladimirov - METHODS OF THE ..., §3.1, pgg. 41-42); dunque $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Verifichiamo che $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: essendo $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, dalla continuità segue che $\exists \mathcal{K} \in \mathbb{R}^+$ ed $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\psi(\mathbf{x})| = |(\mathfrak{T}, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))| \leq \mathcal{K} \sum_{0 \leq \gamma, \varepsilon \leq \mathcal{N}^m} \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\mathcal{M}^\gamma(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{y}}^\varepsilon \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \right\}.$$

D'altronde si è visto che $\partial_{\mathbf{x}}^\beta \psi(\mathbf{x}) = (\mathfrak{T}, \partial_{\mathbf{x}}^\beta \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, sicché

$$|\partial_{\mathbf{x}}^\beta \psi(\mathbf{x})| \leq \mathcal{K} \sum_{0 \leq \gamma, \varepsilon \leq \mathcal{N}^m} \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\mathcal{M}^\gamma(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{y}}^\varepsilon \partial_{\mathbf{x}}^\beta \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \right\}, \quad (6.43)$$

la quale è soddisfatta, essendo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. Ma allora $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, in quanto

$$\|\psi\|_{\alpha, \beta} \leq \mathcal{K} \sum_{0 \leq \gamma, \varepsilon \leq \mathcal{N}^m} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \mathcal{M}^\gamma(\mathbf{y}) (\partial_{\mathbf{x}}^\beta \partial_{\mathbf{y}}^\varepsilon \varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \right\},$$

ed il membro di sinistra è limitato $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Proviamo infine la convergenza. Sia dunque $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$: applicando la (6.43) a $\varphi_\nu - \varphi$ per dato $\nu \in \mathbb{N}$, si ha

$$\|\psi_\nu - \psi\|_{\alpha, \beta} \leq \mathcal{K} \sum_{0 \leq \gamma, \varepsilon \leq \mathcal{N}^m} \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m}} \left\{ |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) \mathcal{M}^\gamma(\mathbf{y}) [\partial_{\mathbf{x}}^\beta \partial_{\mathbf{y}}^\varepsilon (\varphi_\nu - \varphi)](\mathbf{x}, \mathbf{y})| \right\} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0,$$

ovvero $\{\psi_\nu - \psi\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è una successione nulla in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, per $\nu \rightarrow +\infty$. \square

Il prodotto diretto permette di fattorizzare rigorosamente la distribuzione delta in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in termini di distribuzioni delta unidimensionali; infatti, posto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ possiamo rivedere $\delta_{\mathbf{a}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come il prodotto diretto di n delta distribuzioni $\delta_{a_i} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ognuna centrata in $a_i \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\delta_{\mathbf{a}} = \delta_{a_1} \times \delta_{a_2} \times \dots \times \delta_{a_n}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (6.44)$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, essendo $(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = \varphi(\mathbf{a}) = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\delta_{a_1}, (\delta_{a_2}, \dots, (\delta_{a_n}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) \dots)) = (\delta_{a_1} \times \delta_{a_2} \times \dots \times \delta_{a_n}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n))$, con $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Il prodotto diretto gode di alcune importanti proprietà, riassunte nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ DEL PRODOTTO DIRETTO) - Valgono le seguenti proprietà:

1) *commutatività del prodotto diretto*, i.e. $\forall \mathfrak{T}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ risulta essere

$$\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_1; \quad (6.45)$$

2) *associatività del prodotto diretto*, i.e. $\forall \mathfrak{T}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ e $\mathfrak{T}_3 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ si ha

$$\mathfrak{T}_1 \times (\mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3) = (\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2) \times \mathfrak{T}_3; \quad (6.46)$$

3) *moltiplicazione del prodotto diretto*, i.e. $\forall \mathfrak{T}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ risulta

$$a_1(\mathbf{x})a_2(\mathbf{y})(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2) = (a_1(\mathbf{x})\mathfrak{T}_1) \times (a_2(\mathbf{y})\mathfrak{T}_2), \quad \forall a_1 \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n), \forall a_2 \in C_M^\infty(\mathbb{R}^m); \quad (6.47)$$

4) *differenziazione del prodotto diretto*, i.e. $\forall \mathfrak{T}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ risulta

$$\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_{\mathbf{y}}^\beta (\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2) = (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \mathfrak{T}_1) \times (\partial_{\mathbf{y}}^\beta \mathfrak{T}_2), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall \beta \in \mathbb{N}_0^m. \quad (6.48)$$

Dimostrazione. Cominciamo dalla (6.45) e verifichiamo che sia soddisfatta sullo spazio delle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ tali che $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x})v(\mathbf{y})$, con $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. La prova è immediata, infatti

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T}_1, (\mathfrak{T}_2, u(\mathbf{x})v(\mathbf{y}))) &= (\mathfrak{T}_1, u(\mathbf{x})(\mathfrak{T}_2, v(\mathbf{y}))) = (\mathfrak{T}_2, v(\mathbf{y}))(\mathfrak{T}_1, u(\mathbf{x})) \\ &= (\mathfrak{T}_2, v(\mathbf{y})(\mathfrak{T}_1, u(\mathbf{x}))) = (\mathfrak{T}_2, (\mathfrak{T}_1, u(\mathbf{x})v(\mathbf{y}))) = (\mathfrak{T}_2, (\mathfrak{T}_1, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))). \end{aligned}$$

In virtù della linearità di $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$, la (6.45) vale anche nel sottospazio delle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ della forma $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^N u_k(\mathbf{x})v_k(\mathbf{y})$, con $u_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed $v_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ per $k = 1, 2, \dots, N$. L'estensione della (6.44) a tutto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ si ottiene dimostrando che il precedente sottospazio di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ [Vla002]. Proviamo quindi l'associatività: presa $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m+k})$, risulta

$$\begin{aligned} ((\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2) \times \mathfrak{T}_3, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) &= (\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2, (\mathfrak{T}_3, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))) = (\mathfrak{T}_1, (\mathfrak{T}_2, (\mathfrak{T}_3, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})))) \\ &= (\mathfrak{T}_1, (\mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))) = (\mathfrak{T}_1 \times (\mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3), \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})). \end{aligned}$$

Per la proprietà di differenziazione (6.48), è sufficiente invocare la definizione (6.39) di derivata distribuzionale e la proprietà di commutatività (6.45); presa quindi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, troviamo

$$\begin{aligned} (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_{\mathbf{y}}^\beta (\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2), \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} (\mathfrak{T}_1, (\mathfrak{T}_2, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_{\mathbf{y}}^\beta \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) = (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}_1, (\partial_{\mathbf{y}}^\beta \mathfrak{T}_2, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (\partial_{\mathbf{y}}^\beta \mathfrak{T}_2, (\mathfrak{T}_1, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) = (\partial_{\mathbf{y}}^\beta \mathfrak{T}_2, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \mathfrak{T}_1, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) = ((\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \mathfrak{T}_1) \times (\partial_{\mathbf{y}}^\beta \mathfrak{T}_2), \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \beta \in \mathbb{N}_0^m$. Verifichiamo infine la (6.47): siano $a_1 \in C_M^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed $a_2 \in C_M^\infty(\mathbb{R}^m)$, allora

$$\begin{aligned} (a_1(\mathbf{x})a_2(\mathbf{y})(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2), \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= (\mathfrak{T}_1(\mathfrak{T}_2, a_1(\mathbf{x})a_2(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) = (\mathfrak{T}_1, a_1(\mathbf{x})(\mathfrak{T}_2, a_2(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) \\ &= (a_1(\mathbf{x})\mathfrak{T}_1, (a_2(\mathbf{y})\mathfrak{T}_2, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) = ((a_1(\mathbf{x})\mathfrak{T}_1) \times (a_2(\mathbf{y})\mathfrak{T}_2), \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \end{aligned}$$

avendo osservato, al secondo passaggio, che $a_1 a_2 \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ (teorema “moltiplicazione in \mathcal{S} ”). \square

Discutiamo infine le proprietà del prodotto di convoluzione in \mathcal{S}' . Cominceremo dallo spazio delle funzioni di prova $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per poi estendere la definizione anche allo spazio delle distribuzioni.

DEFINIZIONE (CONVOLUZIONE IN \mathcal{S}) - Siano $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; def. **convoluzione** di ψ e φ l'integrale

$$(\psi * \varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (6.49)$$

La (6.49) gode delle proprietà *commutativa* ed *associativa*. La prima è banale; per l'associatività, invece, è sufficiente invocare il teorema di Fubini–Tonelli, sicché per ogni $\psi, \varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\begin{aligned} ((\psi * \varphi) * \phi)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi * \varphi)(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z})\varphi(\mathbf{y} - \mathbf{z})\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{z} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y} - \mathbf{z})\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{z} \stackrel{\tilde{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y} + \mathbf{z}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\tilde{\mathbf{y}})\phi((\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \tilde{\mathbf{y}}) d\tilde{\mathbf{y}} \right] d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z})(\varphi * \phi)(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} = (\psi * (\varphi * \phi))(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Inoltre, il prodotto di convoluzione è invariante sotto traslazioni, i.e. commuta con $\mathbf{t}_{\mathbf{a}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{a}}(\psi * \varphi) = (\mathbf{t}_{\mathbf{a}}\psi) * \varphi = \psi * (\mathbf{t}_{\mathbf{a}}\varphi), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.50)$$

Si noti che, nel definire la (6.49), si è tacitamente assunto che $\psi * \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Verifichiamo quindi che la mappa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \psi \mapsto \psi * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lineare e continua, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

LEMMA II - Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora $f * g \in B(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, i.e. è lineare e continuo in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. La linearità è banale; per la continuità, invece, si trova che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ è

$$\|f * g\|_{\alpha, \beta} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x}) [\partial_{\mathbf{x}}^\beta (f * g)](\mathbf{x})| \right\} \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})| |f(\mathbf{y})| |\partial_{\mathbf{z}}^\beta g(\mathbf{z})| d\mathbf{y} \right\},$$

essendo $\mathbf{z} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Esprimiamo ora $\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})$ in termini di \mathbf{z} ed \mathbf{y} : per definizione $\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (y_1 + z_1)^{\alpha_1} (y_2 + z_2)^{\alpha_2} \cdots (y_n + z_n)^{\alpha_n}$, per cui

$$\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{z} + \mathbf{y}) = \prod_{1 \leq j \leq n} \sum_{k_j \leq \alpha_j} \binom{\alpha_j}{k_j} y_j^{k_j} z_j^{\alpha_j - k_j} = \sum_{k \leq \alpha} \binom{\alpha}{k} \mathcal{M}^k(\mathbf{y}) \mathcal{M}^{\alpha-k}(\mathbf{z}).$$

Di conseguenza, tenendo presente che $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, si trova

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\alpha, \beta} &\leq \sum_{k \leq \alpha} \binom{\alpha}{k} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}^k(\mathbf{y}) f(\mathbf{y})| |\mathcal{M}^{\alpha-k}(\mathbf{z}) \partial_{\mathbf{z}}^\beta g(\mathbf{z})| d\mathbf{y} \right\} \\ &= \sum_{k \leq \alpha} \binom{\alpha}{k} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\mathbf{y}|^2)^\mu}{(1 + |\mathbf{y}|^2)^\mu} |\mathcal{M}^k(\mathbf{y}) f(\mathbf{y})| |\mathcal{M}^{\alpha-k}(\mathbf{z}) \partial_{\mathbf{z}}^\beta g(\mathbf{z})| d\mathbf{y} \right\} \\ &\leq \Pi_\mu \sum_{k \leq \alpha} \binom{\alpha}{k} (\|f\|_{k, 0} + \|f\|_{k+\zeta, 0}) \|g\|_{\alpha-k, \beta}, \end{aligned}$$

essendo $\zeta \equiv \lceil 2\mu \rceil$ e $\mu \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\Pi_\mu \equiv \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{y}|^2)^{-\mu} d\mathbf{y}$ sia finito. Pertanto $f * g \in B(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. \square

OSSERVAZIONE II - Il teorema precedente mostra che il prodotto di convoluzione di funzioni a rapida decrescenza esiste ed è esso stesso a rapida decrescenza; esistono, tuttavia, altri criteri di esistenza per il prodotto di convoluzione. E.g. se $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ e se $\text{supp}(f) \subset \mathcal{A}$, $\text{supp}(g) \subset \mathcal{B}$, con $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ t.c. per ogni $R \in \mathbb{R}^+$ l'insieme $\mathcal{T}_R \equiv \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq R\}$ è limitato in \mathbb{R}^{2n} , allora $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$; infatti, invocando nuovamente il teorema di Fubini-Tonelli, si ottiene

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq R} |(f * g)(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \iint_{|\mathbf{x}| \leq R} |f(\mathbf{y})| |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} d\mathbf{x} \leq \iint_{\mathcal{T}_R} |f(\mathbf{y})| |g(\mathbf{z})| d\mathbf{y} d\mathbf{z} < +\infty.$$

In particolare, se f e g sono a supporto compatto, allora \mathcal{T}_R è limitato. La definizione (6.49) vale anche per funzioni sommabili; in tal caso, se $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, allora $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Infatti, scelti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, $t, s \geq 1$ t.c. $r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} = 1$, $\alpha r = p = (1 - \alpha)s$ e $\beta r = q = (1 - \beta)t$ risulta $p(1 + rs^{-1}) = r = q(1 + rt^{-1})$ per cui, invocando la disuguaglianza di Hölder ed il teorema di Fubini-Tonelli, si ottiene

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}^r &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})|^\alpha |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^\beta |f(\mathbf{y})|^{1-\alpha} |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1-\beta} d\mathbf{x} \right]^r \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})|^{\alpha r} |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{\beta r} d\mathbf{y} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})|^{(1-\alpha)s} d\mathbf{y} \right]^{r/s} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{(1-\beta)t} d\mathbf{y} \right]^{r/t} d\mathbf{x}; \end{aligned}$$

si è così dimostrato, nella sua forma più generale, la *disuguaglianza di Young* (vedi §5.3.2 e §6.1):

$$\|f * g\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty. \quad (6.51)$$

Passiamo ora allo spazio delle distribuzioni. L'estensione della convoluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ non è priva di complicazioni; per motivare le definizioni che verranno, partiamo dal caso di distribuzioni regolari. Siano dunque $\mathfrak{T}_f, \mathfrak{T}_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ regolari, con $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per semplicità. Alla luce di quanto osservato, $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e dunque definisce la distribuzione regolare $\mathfrak{T}_{f * g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definita come

$$(\mathfrak{T}_{f * g}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{t}_{\mathbf{y}} g)(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} = \left(\mathfrak{T}_f, (\mathfrak{T}_g, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \right).$$

In virtù della definizione (6.42) del prodotto diretto $\mathfrak{T}_f \times \mathfrak{T}_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, si ottiene

$$(\mathfrak{T}_{f * g}, \varphi) = (\mathfrak{T}_f \times \mathfrak{T}_g, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.52)$$

Si potrebbe allora pensare di prendere la precedente come definizione di prodotto di convoluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; tuttavia, se $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora in generale¹¹⁸ $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ e dunque la (6.52) può non esistere nel caso di generiche distribuzioni. Per individuare le ipotesi sotto le quali la (6.52) individua un prodotto di convoluzione tra distribuzioni, è conveniente riscrivere la stessa nella forma [Vla002]

$$(\mathfrak{T}_{f * g}, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\mathfrak{T}_f \times \mathfrak{T}_g, \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (6.53)$$

dove $\{\eta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è una successione di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ convergente ad uno in \mathbb{R}^{2n} . L'equivalenza tra la (6.52) e la (6.53), è evidente alla luce del teorema sulla convergenza dominata: infatti $c|f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})|$ è integrabile su \mathbb{R}^{2n} e domina la successione $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$.

La (6.53) suggerisce la seguente definizione di prodotto di convoluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIZIONE (CONVOLUZIONE IN \mathcal{D}') - Siano $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ ammetta l'estensione¹¹⁹ $(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ della forma $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$. Definiamo $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2, \varphi) := \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (6.54)$$

Il fatto che $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ segue (a fronte della completezza di \mathcal{D}) dalla continuità in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ di $(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2, \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. La verifica è immediata: presa $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ nulla in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow +\infty$, si ha che $\eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, essendo $\{\eta_\nu\}_\nu \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$; ma $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$, dunque è continuo e quindi $(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \rightarrow 0$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Laddove esista, il prodotto di convoluzione (6.54) soddisfa le proprietà elencate di seguito.

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE IN \mathcal{D}') - Valgono le seguenti proprietà:

- 1) *commutatività del prodotto di convoluzione, i.e. $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ risulta*

$$\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 * \mathcal{T}_1; \quad (6.55)$$

- 2) *associatività, i.e. $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ t.c. esistano $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 * \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2 * \mathcal{T}_3$ e $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_3$, si ha*

$$\mathcal{T}_1 * (\mathcal{T}_2 * \mathcal{T}_3) = (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2) * \mathcal{T}_3; \quad (6.56)$$

- 3) *traslazione e riflessione del prodotto di convoluzione, i.e. $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$(\mathfrak{t}_{\mathbf{a}} \mathcal{T}_1) * \mathcal{T}_2 = \mathfrak{t}_{\mathbf{a}} (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1 * (\mathfrak{t}_{\mathbf{a}} \mathcal{T}_2), \quad (\mathfrak{r} \mathcal{T}_1) * (\mathfrak{r} \mathcal{T}_2) = \mathfrak{r} (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2); \quad (6.57)$$

- 4) *prodotto di convoluzione con la delta di Dirac, $\forall \mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, risulta*

$$\mathcal{T} * \delta = \mathcal{T}; \quad (6.58)$$

¹¹⁸E.g., di prenda $\varphi(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e^{-|\mathbf{x}|^2} e^{-|\mathbf{y}|^2} e^{-2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}$, ma $e^{-2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

¹¹⁹Nel senso che, dati $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, allora esiste il limite $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))$, indipendentemente dalla successione $\{\eta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ convergente ad uno in \mathbb{R}^{2n} .

5) *differenziazione del prodotto di convoluzione, i.e.* $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$(\partial^\alpha \mathcal{T}_1) * \mathcal{T}_2 = \partial^\alpha (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1 * (\partial^\alpha \mathcal{T}_2), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \quad (6.59)$$

Dimostrazione. Commutatività ed associatività seguono dalle analoghe proprietà per il prodotto diretto. Per la traslazione, invece, si noti che $(\mathbf{t}_\mathbf{a}(\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2), \varphi) = (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{a}))$ per cui, interpretando $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{a})$ come il risultato dell'azione di $\mathbf{t}_{-\mathbf{a}}$ sulle variabili \mathbf{x} ed \mathbf{y} rispettivamente, troviamo

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_1 * (\mathbf{t}_\mathbf{a} \mathcal{T}_2), \varphi) &= (\mathcal{T}_1, (\mathcal{T}_2, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{a}))) = (\mathbf{t}_\mathbf{a}(\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2), \varphi) \\ &= (\mathcal{T}_2, (\mathcal{T}_1, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{a}))) = (\mathcal{T}_2, (\mathbf{t}_\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = ((\mathbf{t}_\mathbf{a} \mathcal{T}_1) * \mathcal{T}_2, \varphi). \end{aligned}$$

Si dimostra in modo analogo la proprietà (6.56) di riflessione del prodotto di convoluzione, i.e.

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}(\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2), \varphi) &= (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \varphi(-\mathbf{x} - \mathbf{y})) = (\mathcal{T}_1, (\mathbf{r} \mathcal{T}_2, \varphi(\mathbf{y} - \mathbf{x}))) \\ &= (\mathbf{r} \mathcal{T}_2, (\mathbf{r} \mathcal{T}_1, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = ((\mathbf{r} \mathcal{T}_1) \times (\mathbf{r} \mathcal{T}_2), \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = ((\mathbf{r} \mathcal{T}_1) * (\mathbf{r} \mathcal{T}_2), \varphi). \end{aligned}$$

Per la convoluzione con la delta, è sufficiente notare che $(\mathcal{T} * \delta, \varphi) = (\mathcal{T}(\mathbf{x}), (\delta(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = (\mathcal{T}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = (\mathcal{T}, \varphi)$, dove la notazione serve ad evidenziare la variabile sulla quale il funzionale agisce. Infine, per la proprietà di (6.59) troviamo $(\partial^\alpha (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2), \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2, \partial^\alpha \varphi)$ sicché

$$(\partial^\alpha (\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2), \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (\mathcal{T}_1, (\mathcal{T}_2, \partial_y^\alpha \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = (\mathcal{T}_1, (\partial_y^\alpha \mathcal{T}_2, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = (\mathcal{T}_1 * \partial^\alpha \mathcal{T}_2, \varphi).$$

La seconda identità nella (6.59) segue invocando la proprietà commutativa (6.55). \square

Dalla proprietà (6.58) si deducono in modo elementare le seguenti importanti espressioni:

$$\partial^\alpha \mathcal{T} = \delta * \partial^\alpha \mathcal{T} = \partial^\alpha \delta * \mathcal{T}, \quad (6.60)$$

$$\mathbf{t}_\mathbf{a} \mathcal{T} = \delta_\mathbf{a} * \mathcal{T}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.61)$$

con $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la prima delle quali si ottiene in virtù della proprietà di traslazione $\mathbf{t}_\mathbf{a} \delta = \delta_\mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, mentre per la seconda è sufficiente invocare la proprietà di differenziazione (6.59).

OSSERVAZIONE III – La (6.57) mostra come il prodotto di convoluzione di distribuzioni, laddove definito, ammetta unità; in altre parole, indicando con $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il sottospazio di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sul quale $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ ammette estensione, potremo affermare che $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), *)$ forma un'algebra abeliana di distribuzioni con unità.

OSSERVAZIONE IV – La relazione $\mathcal{T} * \delta = \mathcal{T}$ può essere equivalentemente interpretata affermando che ogni distribuzione può esprimersi come somma di infinite distribuzioni deltiformi, formalmente

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{T}(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.62)$$

La scrittura simbolica (6.62) è particolarmente cara ai fisici, poiché in essa è racchiusa l'idea secondo la quale ciascun corpo materiale può essere interpretato come somma di infinite masse puntiformi, oppure ogni distribuzione di carica è somma di infinite cariche puntiformi, e così via.

OSSERVAZIONE V – In virtù della (6.57), le δ -famiglie definite in (6.25) sono anche note come **approssimazioni dell'identità**; tale terminologia segue in particolare dal fatto che $L_1(\mathbb{R}^n)$ è chiuso rispetto al prodotto di convoluzione *ma* non ammette identità, in quanto $1 \notin L_1(\mathbb{R}^n)$. Le δ -famiglie $\{f_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ rivestono pertanto il ruolo di approssimazioni dell'identità, nel senso che

$$g(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (g * f_\varepsilon)(\mathbf{x}), \quad \text{q. o. in } \mathbb{R}^n, \quad (6.63)$$

dove l'operazione di limite è intesa rispetto alla topologia di L_1 .

Resta da chiarire sotto quali ipotesi il prodotto di convoluzione (6.54) esiste. A questo proposito, occorre osservare che $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è nulla su un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ se $(\mathcal{T}, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{A}$, con $\text{supp}(\varphi) \subseteq \mathcal{A}$. Si può allora dimostrare che, data la collezione $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ degli aperti di \mathbb{R}^n sulle quali la distribuzione $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è nulla, allora $\mathcal{T} = 0$ su $\varphi \in \bigcup_\lambda \mathcal{A}_\lambda$ [Vla002].

DEFINIZIONE (SUPPORTO DI UNA DISTRIBUZIONE) - Definiamo **supporto della distribuzione** $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, il complemento in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dell'aperto massimale sul quale \mathcal{T} è nulla.

Essendo Ω unione di aperti, allora $\text{supp}(\mathcal{T})$ è chiuso. In particolare, diremo che $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è a **supporto compatto**¹²⁰ se $\text{supp}(\mathcal{T}) \Subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e scriveremo $\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Vale allora il seguente

TEOREMA (ESISTENZA DELLA CONVOLUZIONE IN \mathcal{D}') - $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{E}(\Omega) \Rightarrow \exists \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2, \varphi) = (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \eta(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (6.64)$$

dove $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ è uguale ad uno in un intorno del supporto di \mathcal{T}_2 .

Dimostrazione. Si veda V. S. Vladimirov – METHODS OF THE ..., §4.3, pgg. 57–58. □

Il precedente teorema si estende banalmente allo spazio delle distribuzioni temperate, essendo $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. In particolare, è possibile dimostrare che la convoluzione è un'operazione continua da \mathcal{S}' in sé.

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA CONVOLUZIONE IN \mathcal{S}') - $\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists \mathcal{T} * \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathcal{T} * \mathfrak{T}, \varphi) = (\mathcal{T} \times \mathfrak{T}, \eta(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (6.65)$$

dove $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vale uno in un intorno di $\text{supp}(\mathcal{T})$. La mappa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ni \mathfrak{T} \mapsto \mathcal{T} * \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è continua.

Dimostrazione. In virtù del precedente teorema, $\exists \mathcal{T} * \mathfrak{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, rappresentato nella forma (6.64) con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Proviamo che il membro di destra della (6.64) definisce una mappa lineare e continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé. Sia quindi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: essendo $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è $\eta(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ e poiché $\mathcal{T} \times \mathfrak{T}$ è lineare, allora anche il membro di destra della (6.64) è lineare in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per provare la continuità, sia $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ risulta

$$\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})\mathcal{M}^\beta(\mathbf{y})\partial^\gamma[\eta(\mathbf{y})\varphi_\nu(\mathbf{x} + \mathbf{y})] \xrightarrow[\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n]{\nu \rightarrow +\infty} \mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})\mathcal{M}^\beta(\mathbf{y})\partial^\gamma[\eta(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})],$$

per cui

$$\eta(\mathbf{y})\varphi_\nu(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} \eta(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Ma $\mathcal{T} \times \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, da cui segue la continuità del membro di destra della (6.64) su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Esempi

- DERIVATA PRIMA E SECONDA DELLA DISTRIBUZIONE $f(x) = x\theta(x)$

Sia $f(\cdot) : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x\theta(x) \in \mathbb{R}$; per come definita, f è lipshitziana in \mathbb{R} ma non differenziabile per $x = 0$. D'altronde essa genera la distribuzione temperata $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definita come

$$(\mathfrak{T}_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} x\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

¹²⁰Si noti che ogni distribuzione a supporto compatto è di ordine finito e temperata [Vla002].

È evidente che $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, infatti $|(\mathfrak{T}_f, \varphi)| \leq \frac{\pi}{2}(\|\varphi\|_{1,0} + \|\varphi\|_{3,0})$; l'azione della derivata distribuzionale su f sarà quindi $(Df, \varphi) = (\mathfrak{T}'_f, \varphi) = -(\mathfrak{T}_f, \partial\varphi)$ ed integrando per parti

$$(D(x\theta), \varphi) = - \int_{\mathbb{R}_0^+} x\varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_0^+} \varphi'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\varphi(x) dx = (\theta, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Consideriamo ora la derivata distribuzionale seconda di $f = x\theta$: essendo $\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (come è immediato verificare) ed in virtù delle proprietà di differenziazione in \mathcal{S}' , si ha

$$(\theta', \varphi) = - \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_0^+} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

e cioè

$$(x\theta)'' = \theta' = \delta, \tag{6.66}$$

nel senso distribuzionale. Sia ora $g(\cdot) : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) \equiv x\theta(x) - x\theta(-x) \in \mathbb{R}$; evidentemente $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, essendo combinazione lineare del prodotto di una funzione a crescita polinomiale (i.e. $f(x) = x$) e di una distribuzione temperata. Alla luce della (6.66), risulta

$$g'(x) = \theta(x) + \theta(-x) + x[\theta'(x) + \theta'(-x)] = \text{sg}(x) + 2x\delta(x),$$

avendo invocato la parità della delta e definito $\text{sg}(x) := \theta(x) + \theta(-x)$ la *distribuzione segno*. D'altra parte $x^m\delta(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\forall m \in \mathbb{N}$, dal momento che $(x^m\delta, \varphi) = (\delta, x^m\varphi) = x^m\varphi(x)|_{x=0} = 0, \forall m \in \mathbb{N}$; vale allora l'identità distribuzionale $g' = \text{sg}$.

- DERIVATA PRIMA E SECONDA DELLA DISTRIBUZIONE $\ln|x| = \theta(x)\ln x + \theta(-x)\ln(-x)$
Sia $\ln|x| = \theta(x)\ln x + \theta(-x)\ln(-x)$; evidentemente $\ln|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, essendo combinazione lineare del prodotto di una funzione a lenta crescita e di una distribuzione temperata. Calcoliamo la derivata distribuzionale di $\ln|x|$: tenendo conto del fatto che $\ln|x|$ è singolare in $x = 0$, scriviamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \ln|x|, \varphi\right) &= -(\ln|x|, \varphi') = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} [\theta(x)\ln x + \theta(-x)\ln(-x)] \varphi'(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln x \varphi'(x) dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)]. \end{aligned}$$

D'altronde $\varphi(\pm\varepsilon) = \varphi(0) \pm \varphi'(0)\varepsilon$ e quindi $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 2\varphi'(0)\varepsilon$; inserendo quanto osservato nella precedente, tenendo presente il limite notevole $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ e richiamando infine la definizione (6.26) per il valor principale di Cauchy di $1/x$, troviamo in definitiva

$$\left(\frac{d}{dx} \ln|x|, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + 2\varphi'(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = \left(\text{P.v.} \frac{1}{x}, \varphi\right), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Consideriamo ora la derivata distribuzionale del valor principale di Cauchy. Negli esempi al §6.4 si è visto che $\text{P.v.} \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, i.e. è una distribuzione temperata, indi per cui

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \text{P.v.} \frac{1}{x}, \varphi\right) &= -\left(\text{P.v.} \frac{1}{x}, \varphi'\right) = -\text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(x)}{x} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \frac{\varphi(x)}{x} \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{\varphi(x)}{x} \Big|_{+\varepsilon}^{+\infty} \right] \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi'(0)}{\varepsilon} \right] = -\left(\text{F.p.} \frac{1}{x^2}, \varphi\right), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Pertanto le derivate distribuzionali prima e seconda di $\ln|x|$ corrispondono rispettivamente al valor principale di Cauchy di $1/x$ ed alla parte finita di Hadamard di $1/x^2$ (vedi equazione (6.29)), i.e.

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln|x| = \frac{d}{dx} \text{P.v.} \frac{1}{x} = -\text{F.p.} \frac{1}{x^2}. \quad (6.67)$$

◦ COMPOSIZIONE DELLA DELTA DI DIRAC CON UNA FUNZIONE C^1

Sia $a \in C^1(\mathbb{R})$ ed $\{f_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ una δ -famiglia t.c. $\mathcal{T}_{f_\varepsilon} \rightarrow \delta$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Definiamo la *distribuzione composta* $\delta \circ a$ come il limite debole in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della composizione $f_\varepsilon \circ a$, i.e.

$$\delta \circ a := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon \circ a.$$

Si dimostra che $\delta \circ a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ [Vla002]. Per semplicità, indichiamo con $\delta(a(x)) \equiv (\delta \circ a)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(a(x))$; supponiamo inoltre che a ammetta zeri semplici nei punti $\{x_k\}_{k=1,2,\dots,N}$. Vale allora la seguente identità distribuzionale

$$\delta(a(x)) = \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}. \quad (6.68)$$

È sufficiente provare la (6.68) in un intorno del k -esimo zero. Sia pertanto $\varphi \in \mathcal{D}([x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k])$, con $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_0^+$ t.c. $a(x)$ sia monotona in $[x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k]$; avremo quindi

$$\begin{aligned} (\delta(a(x)), \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} f_\varepsilon(a(x)) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a(x_k - \varepsilon_k)}^{a(x_k + \varepsilon_k)} f_\varepsilon(y) \varphi(a^{-1}(y)) \frac{dy}{|a'(a^{-1}(y))|} \\ &= \left(\delta_{a(x_k)}, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|} \right) = \frac{\varphi(x_k)}{|a'(x_k)|} = \left(\delta_{x_k}, \frac{\varphi(x_k)}{|a'(x_k)|} \right) = \left(\frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}, \varphi \right). \end{aligned}$$

Si noti che se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ e se \mathcal{I} non contiene zeri a , allora $(\delta(a(x)), \varphi) = 0$; inoltre, se $a(x)$ non ha zeri, allora $\delta(a(x)) = 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Due classici esempi di composizione con la delta sono

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x - a) + \delta(x + a)), \quad \delta(\sin(x)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - k\pi). \quad (6.69)$$

◦ EQUAZIONI DISTRIBUZIONALI NOTEVOLI

L'equazione omogenea $x^m u(x) = 0$, $m \in \mathbb{N}$ finito, ammette in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la soluzione non banale

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (6.70)$$

La verifica è immediata: presa $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e per $k = 0, 1, \dots, m-1$ fissato, si trova

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = (-1)^k \left(\delta, \frac{d^k}{dx^k} (x^m \varphi(x)) \right) = \frac{d^k (x^m \varphi(x))}{dx^k} \Big|_{x=0} = 0,$$

avendo invocato le proprietà (6.33) e (6.39) in \mathcal{S}' . Proviamo che la (6.70) individua una soluzione generale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ di $x^m u(x) = 0$. A questo proposito, si noti che $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è liscia in un intorno di $x = 0$ ed ivi sviluppabile in serie di Taylor; sia dunque [Vla971]

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

avendo osservato che ψ è combinazione lineare di funzioni in $\mathcal{S}(R)$. Di conseguenza, avremo

$$\begin{aligned} (u, \varphi) &= \left(u, x^m \psi(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (u, x^k) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, \varphi \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

dove $c_k \equiv \frac{(-1)^k}{k!} (u, x^k)$, per $k = 0, 1, \dots, m-1$. Verifichiamo ora che

$$xu(x) = 1 \quad \text{ammette in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ la soluzione} \quad u = c\delta + \text{P.v.} \frac{1}{x}, \quad (6.71)$$

$$x^2u(x) = 1 \quad \text{ammette in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ la soluzione} \quad u = c\delta + \tilde{c}\delta' + \text{F.p.} \frac{1}{x^2}, \quad (6.72)$$

$$xu(x) = \text{sg}(x), \quad \text{ammette in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ la soluzione} \quad u = c\delta + \text{P.v.} \frac{1}{|x|}. \quad (6.73)$$

Negli esempi al §6.5 si è provato che $x\text{P.v.} \frac{1}{x} = 1$ ed $x^2\text{F.p.} \frac{1}{x^2} = 1$; tali soluzioni saranno uniche a meno delle soluzioni delle equazioni omogenee associate, i.e. $xu(x) = 0$ ed $x^2u(x) = 0$, rispettivamente. In virtù della (6.70), troviamo allora che $xu(x) = 1$ ha soluzione $u = c\delta + \text{P.v.} x^{-1}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ed $x^2u(x) = 1$ ha soluzione $u = c\delta + \tilde{c}\delta' + \text{F.p.} x^{-2}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, con $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Per verificare la (6.74), invece, proviamo dapprima che $\text{P.v.} |x|^{-1}$ soddisfa l'equazione $x\text{P.v.} |x|^{-1} = \text{sg}$, dove $\text{sg}(x) \equiv \theta(x) - \theta(-x)$ è la distribuzione segno. La verifica è immediata, dal momento che

$$\begin{aligned} \left(x\text{P.v.} \frac{1}{|x|}, \varphi \right) &= \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{|x|} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} [\varphi(x) - \varphi(-x)] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_0^+} [\varphi(x) - \varphi(-x)] dx = \int_{\mathbb{R}} [\theta(x) - \theta(-x)] \varphi(x) dx = (\text{sg}, \varphi), \end{aligned}$$

per cui, alla luce della (6.70), si trova $u = c\delta + \text{P.v.} |x|^{-1}$. Infine, si noti che le soluzioni (6.71), (6.72) implicano le seguenti soluzioni in \mathcal{S}' di equazioni differenziali ordinarie non-omogenee:

$$xu'(x) = 1 \quad \text{ammette in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ la soluzione} \quad u = c_1 + c_2\theta + \ln|x|, \quad (6.74)$$

$$x^2u'(x) = 1 \quad \text{ammette in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ la soluzione} \quad u = c_1 + c_2\theta + c_3\delta - \text{P.v.} \frac{1}{x}, \quad (6.75)$$

dove nella (6.74) e nella (6.75) si sono invocate rispettivamente la prima e la seconda tra le identità distribuzionali riportate in (6.67). Si noti che, diversamente dalle classiche soluzioni alle equazioni differenziali ordinarie, le soluzioni distribuzionali possono (in generale) dipendere da più costanti.

6.6 Trasformata di Fourier di funzioni di prova di Schwartz

Un'importante proprietà dello spazio di Schwartz \mathcal{S} è che esso, diversamente da \mathcal{D} , è chiuso rispetto alla trasformazione secondo Fourier. In questa sezione discuteremo tal proprietà, mostrando in particolare, come la trasformata di Fourier individui un'applicazione continua ed uno-ad-uno da \mathcal{S} in sé. Nel §6.7 estenderemo per dualità tali proprietà allo spazio delle distribuzioni temperate \mathcal{S}' .

Cominciamo col dare la definizione di trasformata ed anti-trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIZIONE (TRASFORMATA E TRASFORMATA INVERSA DI FOURIER IN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) - Definiamo **trasformata di Fourier** della funzione $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la funzione $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.76)$$

Definiamo inoltre **trasformata inversa di Fourier** di φ la funzione $\check{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$\check{\varphi}(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.77)$$

Tenendo presente che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L_1(\mathbb{R}^n)$, la trasformata e la trasformata inversa di Fourier sono ben definite su \mathcal{S} , infatti $\|\hat{\varphi}\|_{0,0} = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n} \{|\hat{\varphi}(\mathbf{k})|\} \leq \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ e così anche $\|\check{\varphi}\|_{0,0} = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n} \{|\check{\varphi}(\mathbf{k})|\} \leq \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$. Definiamo quindi gli operatori di trasformata e di trasformata inversa di Fourier come

$$\mathcal{F}(\cdot) : \varphi \in \mathcal{S} \mapsto \mathcal{F}\varphi := \hat{\varphi} \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}^*(\cdot) : \varphi \in \mathcal{S} \mapsto \mathcal{F}^*\varphi := \check{\varphi} \in \mathcal{S}, \quad (6.78)$$

rispettivamente. Alla luce delle (6.76) ed (6.77), risulta $(\mathcal{F}^*\varphi)(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(-\mathbf{k})$ e cioè $\mathcal{F}^* = \mathbf{r}\mathcal{F}$.

Le definizioni degli operatori di Fourier date in (6.78) anticipano un risultato contenuto nel seguente

TEOREMA (CONTINUITÀ DI \mathcal{F} ED \mathcal{F}^*) - Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: allora $\hat{\varphi}, \check{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^\alpha \hat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}[\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi], \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad (6.79)$$

posto $\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha \equiv \mathcal{M}^\alpha(\mathbf{x})$ per semplicità di notazione; inoltre $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \hat{\varphi}$ è limitata $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi] = i^{|\alpha|} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \hat{\varphi}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \quad (6.80)$$

Allora $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* \in B(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, i.e. sono applicazioni lineari e continue da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé.

Dimostrazione. La (6.79) segue dal teorema sulla convergenza dominata, grazie al quale è possibile derivare sotto il segno di integrale; osservando che $\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, troviamo

$$(\partial_{\mathbf{k}}^\alpha \mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{k}}^\alpha (e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}[\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi](\mathbf{k}),$$

essendo $\partial_{\mathbf{k}}^\alpha (e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = (-ix_1)^{\alpha_1} \cdots (-ix_n)^{\alpha_n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Data l'arbitrarietà di $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, la (6.79) implica che $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il fatto che $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \hat{\varphi}$ sia limitata, segue dalla (6.80), la quale può essere ottenuta integrando $|\alpha|$ volte per parti $\hat{\varphi}$: infatti, poiché $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi)(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = i^{|\alpha|} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}).$$

Ma $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dunque $\mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi]$ esiste finito (infatti $\|\mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi]\|_{0,0} \leq \|\partial^\alpha \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < +\infty$) e quindi anche $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \hat{\varphi}$ è limitato. Per provare che $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ occorre calcolare $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}$: combinando la (6.79) e la (6.80), troviamo $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi} = (-i)^{|\beta|} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \mathcal{F}[\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi] = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[\partial^\alpha (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi)]$ e cioè

$$(\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi})(\mathbf{k}) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[\partial^\alpha (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi)](\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.81)$$

Calcoliamo la trasformata $\mathcal{F}[\partial^\alpha (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi)]$: in virtù della formula di Leibnitz, si trova

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi)](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\gamma \leq \alpha} C_{\alpha, \gamma, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma} (\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha-\beta} \varphi)(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.82)$$

dove $C_{\alpha, \gamma, \beta} \equiv \binom{\alpha}{\gamma} \mathcal{M}_{\beta} \mathcal{M}_{\beta-1} \cdots \mathcal{M}_{\beta-\gamma+1}$, essendo $\partial_{\mathbf{x}}^\gamma \mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta = \mathcal{M}_{\beta} \mathcal{M}_{\beta-1} \cdots \mathcal{M}_{\beta-\gamma+1} \mathcal{M}_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma}$ (si noti che $C_{\alpha, \gamma, \beta} = 0$ per $\beta - \gamma \leq 0$). Dalla formula (6.82) discende allora la seguente catena di stime:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}[\partial^\alpha (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi)](\mathbf{k}) \right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\gamma \leq \alpha} C_{\alpha, \gamma, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} \left| (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma} \partial^{\alpha-\beta} \varphi)(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{\Pi_\mu}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\gamma \leq \alpha} C_{\alpha, \gamma, \beta} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left| (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma} \partial^{\alpha-\beta} \varphi)(\mathbf{x}) \right| + \left| (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^{\beta-\gamma+\zeta} \partial^{\alpha-\beta} \varphi)(\mathbf{x}) \right| \right\} \\ &\leq \frac{\Pi_\mu}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\gamma \leq \alpha} C_{\alpha, \gamma, \beta} \left(\|\varphi\|_{\beta-\gamma, \alpha-\beta} + \|\varphi\|_{\beta-\gamma+\zeta, \alpha-\beta} \right), \end{aligned}$$

dove $\zeta \equiv \lceil 2\mu \rceil$ e $\mu \in \mathbb{R}^+$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\Pi_\mu < +\infty$ (e.g. si scelga $\mu = \frac{n}{2} + 1$). In definitiva

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n} \left\{ |\mathcal{F}[\partial^\alpha (\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\beta \varphi)](\mathbf{k})| \right\} \leq \frac{\Pi_\mu}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\gamma \leq \alpha} \mathcal{C}_{\alpha,\gamma,\beta} \left(\|\varphi\|_{\beta-\gamma,\alpha-\beta} + \|\varphi\|_{\beta-\gamma+\zeta,\alpha-\beta} \right), \quad (6.83)$$

avendo invocato la (6.81); quindi $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lineare e continua¹²¹. Infine, tenendo presente che $\mathcal{F}^* = \mathbf{r}\mathcal{F}$ e che $\mathbf{r}, \mathcal{F} \in B(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, sarà $\mathcal{F}^* \in B(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. \square

Analizziamo ora alcune proprietà elementari. Cominciamo dall'operazione di traslazione; sia quindi $\mathbf{t}_{\mathbf{a}}(\cdot) : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathbf{t}_{\mathbf{a}}\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: allora

$$\mathcal{F}[\mathbf{t}_{\mathbf{a}}\varphi](\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.84)$$

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{a}}\hat{\varphi})(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}\varphi](\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.85)$$

Per la prima è sufficiente effettuare il cambiamento di variabile $\mathbf{y} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{a}$ a jacobiano unitario; per la seconda, invece, occorre osservare che se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{a}}\hat{\varphi})(\mathbf{k}) = \hat{\varphi}(\mathbf{k} - \mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathcal{F}[e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}\varphi](\mathbf{k}).$$

Più in generale, indicando con $\mathbf{g}(\cdot) : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (\mathbf{g}\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dove $\mathcal{A} \in \text{GL}(n)$, il rappresentativo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ della mappa lineare non-singolare $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, risulta

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}\varphi](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \stackrel{\mathbf{y} \equiv \mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}}{=} \frac{|\det \mathcal{A}|}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y}) e^{-i(\mathcal{A}^\top \mathbf{k}) \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{y},$$

ottenuta osservando che $\mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}\mathbf{y}) = (\mathcal{A}^\top \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$. Otteniamo quindi l'espressione

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}\varphi](\mathbf{k}) = |\det \mathcal{A}| \hat{\varphi}(\mathcal{A}^\top \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.86)$$

Sia consideri ora la funzione gaussiana n -dimensionale $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto e^{-\alpha|\mathbf{x}|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$; la trasformata di Fourier di $e^{-\alpha|\mathbf{x}|^2}$ è ben definita ed è essa stessa una gaussiana, modulo fattori moltiplicativi. Data l'importanza che tale proprietà riveste nella teoria, la dimostriamo nella seguente proposizione nel caso di una generica forma quadratica n -dimensionale definita positiva.

PROPOSIZIONE (FURIER E FORME QUADRATICHE) - *Sia $\mathcal{A} \in \text{GL}(n)$ simmetrica, definita positiva; allora*

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathcal{A} \mathbf{x}}\right](\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{A}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}^\top \mathcal{A}^{-1} \mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.87)$$

Dimostrazione. Cominciamo dal caso $n = 1$. Sia $\mathcal{G}(x) \equiv e^{-\alpha x^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$: $\mathcal{G} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dunque $\hat{\mathcal{G}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ esiste limitata. Per il calcolo di $\hat{\mathcal{G}}$ possiamo procedere in almeno due modi diversi. Il primo è quello di calcolare esplicitamente l'integrale: completando il quadrato nella funzione integranda, si trova

$$\hat{\mathcal{G}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(x + \frac{i}{2\alpha}k)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \int_{\Im \zeta = \frac{k}{2\alpha}} e^{-\zeta^2} d\zeta;$$

traslando l'intervallo di integrazione sull'asse reale, troviamo in definitiva

$$\hat{\mathcal{G}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (6.88)$$

¹²¹La continuità di \mathcal{F} segue dalla (6.83) in quanto, se $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ è

$$\|\mathcal{F}(\varphi_\nu - \varphi)\|_{\alpha,\beta} \leq \frac{\Pi_\mu}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\gamma \leq \alpha} \mathcal{C}_{\alpha,\gamma,\beta} \left(\|\varphi_\nu - \varphi\|_{\beta-\gamma,\alpha-\beta} + \|\varphi_\nu - \varphi\|_{\beta-\gamma+\zeta,\alpha-\beta} \right) \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n} 0.$$

Allo stesso risultato si giunge senza calcolare esplicitamente l'integrale, bensì mostrando che l'integrale ottenuto a seguito del completamento del quadrato è indipendente da k . Alla luce della (6.88), poniamo $\alpha = 1/2$ per semplicità di calcolo; $\mathcal{I}(k) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} dx$ è indipendente da k , infatti

$$\partial_k \mathcal{I}(k) = \int_{\mathbb{R}} \partial_k \left(e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} \right) = -i \int_{\mathbb{R}} (x+ik) e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} dx = i \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} \right) dx = 0,$$

in virtù del teorema sulla convergenza dominata. Pertanto $\mathcal{I}(k) = \mathcal{I}(0) = \sqrt{2\pi}$, $\forall k \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\mathcal{F} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right] (k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} \mathcal{I}(k) = e^{-k^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Passiamo al caso n -dimensionale. La matrice $\mathcal{A} \in \text{GL}(n)$ è simmetrica, dunque diagonalizzabile i.e. $\exists Q \in O(n, \mathbb{R})$ t.c. $\mathcal{A} = Q\Lambda Q^T$ dove $\Lambda \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, essendo $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots,n}$; dunque $\mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x} = (Q^T \mathbf{x})^T \Lambda (Q^T \mathbf{x}) \equiv \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y}$. Tenendo presente che $\det Q = \pm 1$, troviamo

$$\mathcal{F} \left[e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x}} \right] (\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} + 2i \mathbf{t}^T Q \mathbf{y})} d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} + 2i \mathbf{t}^T \mathbf{y})} d\mathbf{y},$$

dove $\mathbf{t} \equiv Q^T \mathbf{k}$. D'altronde \mathcal{A} è definita positiva per cui, essendo simmetrica, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^+$ e quindi ciascun integrale nell'espressione seguente è ben definito:

$$\mathcal{F} \left[e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x}} \right] (\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} (\lambda_k y_k^2 + 2i t_k y_k)} dy_k = \prod_{k=1}^n \mathcal{F} \left[e^{-\frac{1}{2} \lambda_k y_k^2} \right] (t_k) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} e^{-\frac{t_k^2}{2\lambda_k}},$$

avendo invocato la (6.88). Ma $\Lambda^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) = Q^T \mathcal{A}^{-1} Q$ da cui segue che $\sum_{k=1}^n t_k^2 / \lambda_k = \mathbf{t}^T \Lambda^{-1} \mathbf{t}$; tenendo quindi presente che $\det \mathcal{A} = \det \Lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ e che $\mathbf{t} \equiv Q^T \mathbf{k}$, si trova

$$\mathcal{F} \left[e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x}} \right] (\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Lambda^{-1} \mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{A}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathcal{A}^{-1} \mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Affrontiamo ora il problema dell'inversione di \mathcal{F} ed il legame di quest'ultima con la trasformata inversa di Fourier \mathcal{F}^* . In quanto segue, dimostreremo che $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nel senso che

$$\hat{\hat{\varphi}} = \varphi = \check{\check{\varphi}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.89)$$

Per motivare la formula di inversione seguiamo un ragionamento formale basato sulla relazione di completezza (6.113). Esplicitando $\mathcal{F}^* \hat{\varphi}$ ed invertendo l'ordine di integrazione, otteniamo

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^* \hat{\varphi})(\mathbf{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{k} \right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x} = (\varphi * \delta)(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Saremmo allora tentati dal concludere che $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}\varphi) = \varphi$, i.e. $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$; tuttavia, lo scambio dell'ordine di integrazione non è giustificabile in virtù del teorema di Fubini-Tonelli, poiché gli integrali in questione non sono assolutamente convergenti (i.e. non convergono rispetto alla norma di $L_1(\mathbb{R}^n)$). L'argomento può però essere reso rigoroso adoperando un "cut-off ultravioletto" o, equivalentemente, una "regolarizzazione gaussiana" degli integrali, così da rendere gli stessi assolutamente convergenti. Nella dimostrazione di seguito, restringeremo l'interesse al caso $n = 1$ in quanto $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ può essere rivista come la composizione di n trasformate di Fourier unidimensionali $\mathcal{F}_j \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ciascuna calcolata rispetto alla j -esima componente $x_j \in \mathbb{R}$ di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA (INVERSIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER) - $\mathcal{F}^* \varphi = \mathcal{F}^{-1} \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione 1. Regularizzando l'integrale esteso a $k \in \mathbb{R}$ con un'operazione di limite ed invocando il teorema di Fubini–Tonelli per l'inversione degli ordini di integrazione, troviamo quanto segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^* \hat{\varphi})(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ik(x'-x)} dx dk = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ik(x'-x)} dx dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_{-R}^{+R} e^{ik(x'-x)} dk \right] dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin R(x'-x)}{\pi(x'-x)} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Riconoscendo nell'ultimo integrale la δ -famiglia $\{f_R(x) = R \operatorname{sinc}(Rx), R \in \mathbb{R}\}$, si trova

$$(\mathcal{F}^* \hat{\varphi})(x') = \lim_{R \rightarrow +\infty} (f_R * \varphi)(x') = (\delta * \varphi)(x') = \varphi(x'), \quad \forall x' \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Dimostrazione 2. Per rendere $\mathcal{F}^* \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ assolutamente convergente, consideriamo la regolarizzazione

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \hat{\varphi}(k) \mapsto e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+;$$

com'è evidente $e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}(k)$ converge a $\hat{\varphi}(k)$ sia puntualmente che rispetto alla topologia delle semi-norme di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. In virtù della continuità di \mathcal{F}^* in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sarà

$$(\mathcal{F}^* \hat{\varphi} - \varphi)(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\mathcal{F}^*(e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}) - \varphi], \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (6.90)$$

Sarà allora sufficiente mostrare che il membro di destra nella (6.90) tende a zero nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. A questo proposito, calcoliamo esplicitamente $\mathcal{F}^*[e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}]$: alla luce della (6.88), troviamo

$$\mathcal{F}^*[e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}](x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon[k^2 - \frac{2}{\varepsilon}(x'-x)k]} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\varepsilon}} dx.$$

Essendo interessati al membro di destra della (6.90), calcoliamo il seguente integrale:

$$\mathcal{F}^*[e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}](x') - \varphi(x') = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x'+y) e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}} dx - \varphi(x') = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(x'+y) - \varphi(x')] e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}} dy.$$

Invocando la formula di Leibnitz $\varphi(x'+y) = \varphi(x') + y\varphi'(\xi_y)$, dove $\xi_y \in [x', x'+y]$, risulta

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}^*[e^{-\varepsilon k^2} \hat{\varphi}](x') - \varphi(x') \right| &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} |y\varphi'(\xi_y)| e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}} dy \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \sup_{\xi} \{|\varphi'(\xi)|\} \int_{\mathbb{R}} |y| e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}} dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \|\varphi\|_{0,1} \int_{\mathbb{R}_0^+} y e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}} dy = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{\pi}} \|\varphi\|_{0,1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

per ogni $x' \in \mathbb{R}$. Di conseguenza $\mathcal{F}^* \hat{\varphi} = \varphi$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e. $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

OSSERVAZIONE I – Dalla (6.89) si evince che qualsiasi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ può essere espressa come la trasformata di una funzione $\psi \equiv \mathcal{F}^{-1} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; per cui $\varphi = \mathcal{F}\psi$ e se $\mathcal{F}\varphi = 0$ allora $\varphi = 0$. Pertanto, le applicazioni \mathcal{F} , $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono mappe lineari, continue ed *uno-ad-uno* da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé.

Noto il teorema di inversione per la trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, possiamo discutere le proprietà della trasformata di Fourier rispetto al prodotto di convoluzione; si tenga presente che, date $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e le applicazioni $\varphi \mapsto \varphi * \psi$, $\psi \mapsto \varphi * \psi$ sono lineari e continue su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Prima di procedere alla dimostrazione, calcoliamo la convoluzione delle trasformate seguendo un ragionamento

formale analogo a quello seguito per il teorema di inversione. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: scambiando gli ordini di integrazione ed invocando la relazione di completezza (6.113) si trova

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{z}) e^{-i[\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{y})]} d\mathbf{x} d\mathbf{z} d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x})} d\mathbf{y} d\mathbf{x} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} (\varphi * \delta)(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \psi)(\mathbf{z}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{z} = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}[\varphi \psi](\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Tuttavia, anche in questo caso lo scambio non è consentito, non essendo l'integrale in \mathbf{y} assolutamente convergente. Per rendere rigoroso l'argomento, consideriamo le proprietà di composizione della trasformata di Fourier e proviamo che la mappa $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è ciclica con periodo 4.

LEMMA (\mathcal{F} HA PERIODO 4) - La mappa $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è **ciclica** di periodo 4, ovvero

$$\varphi \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathfrak{r}\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \check{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi. \quad (6.91)$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dunque $\mathcal{F}^2\varphi = \mathcal{F}\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; scambiando l'ordine di integrazione ed invocando la formula di completezza per la delta di Dirac (6.113), troviamo formalmente

$$(\mathcal{F}\hat{\varphi})(\mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}') d\mathbf{x} = (\mathfrak{r}\varphi)(\mathbf{x}').$$

Siamo però nuovamente incorsi in un integrale non assolutamente convergente. Il problema può essere risolto alla luce dell'identità $\mathcal{F}^{-1} = \mathfrak{r}\mathcal{F}$ ed osservando che l'operatore di trasformata di Fourier \mathcal{F} commuta con l'operatore di riflessione, i.e. $\mathcal{F}[\mathfrak{r}\varphi] = \mathfrak{r}\hat{\varphi}$, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Di conseguenza

$$\mathcal{F}^2\varphi = \mathcal{F}[\mathcal{F}\varphi] = \mathcal{F}[\mathfrak{r}\mathcal{F}^{-1}\varphi] = \mathcal{F}[\mathfrak{r}\check{\varphi}] = \mathfrak{r}[\mathcal{F}\check{\varphi}] = \mathfrak{r}\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

in virtù del teorema di inversione. Alla luce delle precedenti osservazioni, troviamo inoltre

$$\mathcal{F}^3\varphi = \mathcal{F}[\mathcal{F}^2\varphi] = \mathcal{F}[\mathfrak{r}\varphi] = \mathfrak{r}\hat{\varphi} = \mathcal{F}^{-1}\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Applicando nuovamente la trasformata alla precedente, risulta $\mathcal{F}^4\varphi = \mathcal{F}\check{\varphi} = \varphi$, i.e. $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$. \square

Grazie al precedente lemma, possiamo dare una dimostrazione rigorosa del seguente

TEOREMA (CONVOLUZIONE VS. TRASFORMATA DI FOURIER) - Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora

$$\mathcal{F}[\varphi * \psi] = (2\pi)^{n/2} \hat{\varphi} \hat{\psi}, \quad \hat{\varphi} * \hat{\psi} = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}[\varphi \psi]. \quad (6.92)$$

Dimostrazione. Calcoliamo $\mathcal{F}[\varphi * \psi]$: scambiando l'ordine di integrazione ed invocando la (6.84), si ha

$$\mathcal{F}[\varphi * \psi](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y}) \mathcal{F}[\mathfrak{t}_y \psi](\mathbf{k}) d\mathbf{y} = (2\pi)^{n/2} (\hat{\varphi} \hat{\psi})(\mathbf{k}).$$

Si noti che nel calcolo precedente il teorema di Fubini-Tonelli può essere applicato, essendo l'integrale convergente rispetto alla norma di $L_1(\mathbb{R}^n)$. Calcoliamo ora il prodotto di convoluzione delle trasformate, i.e. $\hat{\varphi} * \hat{\psi}$; a questo proposito, alla luce della proprietà pocanzi dimostrata, risulta

$$\mathcal{F}[\hat{\varphi} * \hat{\psi}](\mathbf{x}) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}\hat{\varphi} \mathcal{F}\hat{\psi} = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}^2\varphi) (\mathcal{F}^2\psi) = (2\pi)^{n/2} (\mathfrak{r}\varphi) (\mathfrak{r}\psi).$$

Prendendo la trasformata inversa di ambo i membri e tenendo presente che $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$, si trova

$$(\mathcal{F}\varphi) * (\mathcal{F}\psi) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}^3[(\mathfrak{r}\varphi) (\mathfrak{r}\psi)] = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}[\mathcal{F}^2[(\mathfrak{r}\varphi\psi)]] = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}[\varphi \psi]. \quad \square$$

Esempi

- AUTOVALORI ED AUTOFUNZIONI DELL'OPERATORE DI FOURIER IN $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Dalla ciclicità di $(\mathcal{F}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ segue che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di \mathcal{F} , allora $\lambda^4 = 1$, dunque $\sigma(\mathcal{F}) = \{1, i, -1, -i\}$, ciascuno con molteplicità infinita. Una successione di autofunzioni di $(\mathcal{F}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ corrispondente ai precedenti autovalori è data dalle *funzioni di Hermite–Chebyshev*

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathcal{H}_n(x), \quad \mathcal{H}_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (6.93)$$

con $n \in \mathbb{N}_0$; nella (6.93) \mathcal{H}_n indica l' n -esimo polinomio di Hermite–Chebyshev, definito esplicitamente dalla formula di Rodriguez (6.93) ed implicitamente dalla *funzione generatrice*

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{t^n}{n!} \mathcal{H}_n(x), \quad \forall t, x \in \mathbb{C}. \quad (6.94)$$

Dimostriamo allora che le funzioni di Hermite–Chebyshev soddisfano l'equazione agli autovalori

$$(\mathcal{F}\psi_n)(k) = (-i)^n \psi_n(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.95)$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (6.94) per $e^{-x^2/2}$ e calcoliamo la trasformata:

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2+2tx-t^2}](k) = \mathcal{F}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{t^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)\right](k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (6.96)$$

Osserviamo fin da subito che nel membro di destra della (6.96) è possibile scambiare le operazioni di serie e di trasformata, essendo la serie (6.94) uniformemente convergente su \mathbb{R} (la (6.94) è, infatti, uno sviluppo in serie di MacLaurin). Per il membro di sinistra, invece, è sufficiente completare il quadrato ed invocare la formula (6.88); in definitiva, otteniamo quanto segue

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}+2tx-t^2}](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}-2xt+ikx\right)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2+\frac{1}{2}(2t-ik)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}[x-(2t-ik)]^2} dx = e^{-\frac{1}{2}k^2} e^{t^2-2ikt}. \end{aligned}$$

Riconoscendo nell'ultimo termine la funzione generatrice (6.94) con $t \equiv it$ e $k \equiv -k$, risulta

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}+2tx-t^2}](k) = e^{-\frac{1}{2}k^2} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(it)^n}{n!} \mathcal{H}_n(-k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ma $\mathcal{H}_n(-k) = (-1)^n \mathcal{H}_n(k)$ per cui, uguagliando la precedente alla (6.96), si trova

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-i)^n t^n}{n!} e^{-\frac{1}{2}k^2} \mathcal{H}_n(k) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{t^n}{n!} \mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathcal{H}_n(x)](k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Infine, uguagliando termine a termine le potenze omonime di t , si ricava quanto desiderato:

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathcal{H}_n](k) = (-i)^n e^{-\frac{1}{2}k^2} \mathcal{H}_n(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.97)$$

- L'OPERATORE $(\mathcal{F}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ È ISOMETRICO IN $L_2(\mathbb{R}^n)$

Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$; rispetto al prodotto scalare in $L_2(\mathbb{R}^n)$ valgono le relazioni

$$\langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}^{-1}\varphi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad \|\mathcal{F}\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \quad (6.98)$$

La seconda segue dalla prima, in virtù del teorema di inversione. Dimostriamo la prima: essendo gli integrali assolutamente convergenti, è possibile scambiare l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\mathbf{k})} (\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathcal{F}^{-1}\varphi, \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

- OPERATORI POSIZIONE ED IMPULSO IN $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Siano $(\mathbf{q}_S, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ e $(\mathbf{p}_S, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ le restrizioni su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ degli operatori posizione ed impulso, rispettivamente. Valgono allora le identità operatoriali

$$\mathbf{q}_S \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathbf{p}_S, \quad \mathbf{p}_S \mathcal{F} = -\mathcal{F} \mathbf{q}_S. \quad (6.99)$$

In particolare, combinando le precedenti con il teorema di inversione, troviamo

$$\mathbf{q}_S = \mathcal{F} \mathbf{p}_S \mathcal{F}^{-1}. \quad (6.100)$$

Dimostriamo la prima delle relazioni in (6.99) (per la seconda si procede in modo analogo). In virtù della (6.80) e tenendo presente che $\mathbf{p}_S = -iD$, si trova $\mathbf{q}_S[\mathcal{F}\varphi](k) = (\mathbf{q}_S\hat{\varphi})(k) = k\hat{\varphi}(k) = -i\mathcal{F}[\phi'](k) = \mathcal{F}[-iD\varphi](k) = \mathcal{F}[\mathbf{p}_S\varphi](k)$, per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6.7 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Estenderemo ora le proprietà della trasformata di Fourier dallo spazio \mathcal{S} allo spazio delle distribuzioni temperate \mathcal{S}' . Come vedremo, gran parte delle proprietà di $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ restano soddisfatte in \mathcal{S}' .

Per giustificare la definizione che daremo, consideriamo il caso di una distribuzione regolare. Sia quindi $\mathfrak{T}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per semplicità; scambiando l'ordine di integrazione, si trova

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}_{\mathcal{F}f}, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{k}) (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k} = (\mathfrak{T}_f, \mathcal{F}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

La precedente suggerisce la seguente definizione per la trasformata di Fourier in \mathcal{S} .

DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI FOURIER IN \mathcal{S}') - Sia $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; definiamo $\mathfrak{F}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{T}, \varphi) := (\mathfrak{T}, \mathcal{F}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (6.101)$$

Verifichiamo che $\mathfrak{F}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: la linearità è ovvia; per la continuità è sufficiente invocare la continuità di \mathcal{F} in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; infatti, se $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{\varphi}_\nu \rightarrow \hat{\varphi}$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{F}\varphi_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} (\mathfrak{T}, \mathcal{F}\varphi) \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

essendo $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ciò prova che $\mathfrak{F}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Proviamo che $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è un'applicazione continua: sia $\mathfrak{T}_\nu \rightarrow \mathfrak{T}$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in \mathcal{S}' ; in virtù della (6.101), si ha

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{T}_\nu, \varphi) = (\mathfrak{T}_\nu, \mathcal{F}\varphi) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} (\mathfrak{T}, \mathcal{F}\varphi) = (\mathfrak{F}\mathfrak{T}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

dalla quale segue che $\mathfrak{F}\mathfrak{T}_\nu \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{T}$ per $\nu \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è continua.

Introduciamo ora in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'operatore di trasformata inversa di Fourier, definito come

$$\mathfrak{F}^*\mathfrak{T} := (\mathfrak{r}\mathfrak{F})\mathfrak{T} = \mathfrak{F}[\mathfrak{r}\mathfrak{T}], \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (6.102)$$

dove $\mathfrak{r}\mathfrak{T}$ va inteso nel senso distribuzionale, i.e. $(\mathfrak{r}\mathfrak{T}, \varphi) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{r}\varphi)$, con $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Data la continuità di \mathfrak{r} e di \mathfrak{F} in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha che anche \mathfrak{F}^* è un'applicazione lineare e continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in sé. La trasformata (6.102) individua l'inversa della trasformata (6.23), infatti $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si trova

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}^*[\mathfrak{F}\mathfrak{T}], \varphi) &= ((\mathfrak{r}\mathfrak{F})[\mathfrak{F}\mathfrak{T}], \varphi) = (\mathfrak{F}[(\mathfrak{r}\mathfrak{F})\mathfrak{T}], \varphi) = (\mathfrak{F}[\mathfrak{r}\mathfrak{T}], \hat{\varphi}) = (\mathfrak{r}\mathfrak{T}, \mathfrak{r}\varphi) \\ &= (\mathfrak{T}, \varphi) = (\mathfrak{F}[\mathfrak{r}\mathfrak{T}], \hat{\varphi}) = ((\mathfrak{r}\mathfrak{F})\mathfrak{T}, \hat{\varphi}) = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{T}, \hat{\varphi}) = (\mathfrak{F}[\mathfrak{F}^*\mathfrak{T}], \varphi), \end{aligned}$$

avendo invocato la proprietà di parità $\mathcal{F}^2 = \mathfrak{r}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^{-1}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alla luce di tanto, segue che per ogni $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ esiste $\mathfrak{Q} \equiv \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}\mathfrak{Q}$; inoltre, se $\mathfrak{F}\mathfrak{T} = 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathfrak{T} = 0$, i.e. $\mathcal{N}_{\mathfrak{F}} = \{0\}$. Possiamo pertanto concludere che $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sono applicazioni uno-ad-uno, lineari e continue.

Dalla definizione (6.101) è evidente che l'operatore $(\mathfrak{F}, \mathcal{S}')$ soddisfa le principali proprietà soddisfatte da $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$; in particolare, dalle proprietà di differenziazione (6.79), (6.80), seguono le relazioni

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}[\partial^\alpha \mathfrak{T}], \varphi) &= (\partial^\alpha \mathfrak{T}, \mathcal{F}\varphi) = (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \partial^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= i^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \mathcal{F}[\mathcal{M}_x^\alpha \varphi]) = i^{|\alpha|} (\mathfrak{F}\mathfrak{T}, \mathcal{M}_x^\alpha \varphi) = i^{|\alpha|} (\mathcal{M}_k^\alpha \mathfrak{F}\mathfrak{T}, \varphi), \\ (\partial^\alpha [\mathfrak{F}\mathfrak{T}], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{F}\mathfrak{T}, \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi]) = (-i)^{|\alpha|} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}_k^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= (-i)^{|\alpha|} (\mathcal{M}_x^\alpha \mathfrak{T}, \mathcal{F}\varphi) = (-i)^{|\alpha|} (\mathfrak{F}[\mathcal{M}_x^\alpha \mathfrak{T}], \varphi), \end{aligned}$$

rispettivamente. Essendo le precedenti valide per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, troviamo che $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ è

$$\partial^\alpha [\mathfrak{F}\mathfrak{T}] = (-i)^{|\alpha|} \mathfrak{F}[\mathcal{M}_x^\alpha \mathfrak{T}], \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (6.103)$$

$$\mathfrak{F}[\partial^\alpha \mathfrak{T}] = i^{|\alpha|} \mathcal{M}_k^\alpha \mathfrak{F}\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.104)$$

Dalle proprietà di traslazione (6.84), (6.85) seguono le espressioni duali

$$\mathfrak{t}_a [\mathfrak{F}\mathfrak{T}] = \mathfrak{F}[e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}\mathfrak{T}], \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.105)$$

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{t}_a \mathfrak{T}] = e^{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}} \mathfrak{F}\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.106)$$

Siano ora $\mathfrak{T}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; alla luce della (6.42), la trasformata di Fourier del prodotto diretto $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ esiste in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ ed è banale verificare che soddisfa l'espressione

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2] = (\mathfrak{F}\mathfrak{T}_1) \times (\mathfrak{F}\mathfrak{T}_2). \quad (6.107)$$

Consideriamo infine le proprietà della trasformata di Fourier in \mathcal{S}' rispetto al prodotto di convoluzione. Nel §6.5.1 si è visto che se $\mathcal{T} \in \mathcal{E}$ e $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'$ allora $\mathfrak{T} * \mathcal{T} \in \mathcal{S}'$ e può essere rappresentato nella forma (6.65); in tal caso $\mathfrak{F}[\mathcal{T} * \mathfrak{T}]$ esiste in \mathcal{S}' e soddisfa l'usuale proprietà

$$\mathfrak{F}[\mathcal{T} * \mathfrak{T}] = (2\pi)^{n/2} [\mathfrak{F}\mathcal{T}] [\mathfrak{F}\mathfrak{T}]. \quad (6.108)$$

Per provare quest'ultima è necessario osservare che se $\mathcal{T} \in \mathcal{E}$, allora la trasformata di Fourier $\mathfrak{F}\mathcal{T} \in C_M^\infty$ (i.e. è una funzione a lenta crescita) e può essere rappresentata nella forma [Vla002]

$$[\mathfrak{F}\mathcal{T}](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.109)$$

In virtù della precedente e della (6.65), troviamo la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}[\mathcal{T} * \mathfrak{T}], \varphi) &= (\mathcal{T} * \mathfrak{T}, \hat{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{T}(\mathbf{y}), \eta(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})} d\mathbf{k}) \right) \\ &= \left(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \int_{\mathbb{R}^n} [[\mathfrak{F}\mathfrak{T}]\varphi](\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right) = (2\pi)^{n/2} \left(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \mathcal{F}[[\mathfrak{F}\mathfrak{T}]\varphi](\mathbf{x}) \right) \\ &= (2\pi)^{n/2} (\mathfrak{F}\mathcal{T}, [\mathfrak{F}\mathfrak{T}]\varphi) = (2\pi)^{n/2} ([\mathfrak{F}\mathcal{T}] [\mathfrak{F}\mathfrak{T}], \varphi). \end{aligned}$$

Dalla (6.108) segue inoltre che se $\mathfrak{F}\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{F}\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora vale la relazione

$$\mathfrak{F}[\mathcal{T}\mathfrak{T}] = (2\pi)^{n/2} [\mathfrak{F}\mathcal{T}] * [\mathfrak{F}\mathfrak{T}]. \quad (6.110)$$

Si noti che la (6.108) vale anche per $\mathfrak{T} \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{T} \in \mathcal{S}$ e per $\mathfrak{T}, \mathcal{T} \in L_2$; inoltre, si dimostra che se $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'$ t.c. $\mathfrak{T}_1 * \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'$ e $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 \in \mathcal{S}'$, allora valgono le proprietà (6.108) ed (6.109) [Vla002].

Esempi

o TRASFORMATA DI FOURIER DELLA DISTRIBUZIONE DELTA

Essendo $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alla luce della definizione (6.101) troviamo che $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è

$$(\mathfrak{F}\delta, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(\mathbf{0}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\mathbf{1}, \varphi);$$

dove $\mathbf{1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dunque la trasformata di Fourier della delta di Dirac è una costante, i.e.

$$\mathfrak{F}\delta = \frac{\mathbf{1}}{(2\pi)^{n/2}}. \quad (6.111)$$

Calcoliamo la trasformata inversa della (6.111): tenendo presente che $\mathfrak{F}\mathbf{1} = \mathfrak{F}^{-1}\mathbf{1}$, risulta

$$\mathfrak{F}\mathbf{1} = (2\pi)^{n/2}\delta; \quad (6.112)$$

riscrivendo la precedente¹²² in forma integrale, troviamo la ben nota relazione

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.113)$$

Il risultato (6.111) è in accordo con la rappresentazione (6.109) (la delta ha supporto puntiforme), infatti $[\mathfrak{F}\delta](\mathbf{k}) = (2\pi)^{-n/2}(\delta(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-n/2}\eta(\mathbf{0})\mathbf{1} = (2\pi)^{-n/2}\mathbf{1}$. In particolare, combinando la (6.111) con le proprietà di differenziazione (6.103), (6.104), troviamo

$$\mathfrak{F}[\partial^\alpha \delta] = \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^\alpha \mathbf{1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.114)$$

$$\mathfrak{F}[\mathcal{M}_{\mathbf{x}}^\alpha] = i^{|\alpha|} (2\pi)^n \partial^\alpha \delta, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.115)$$

Consideriamo ora la distribuzione delta di Dirac $\delta_{\mathcal{S}_a} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ così definita

$$(\delta_{\mathcal{S}_a}, \varphi) := \int_{\mathcal{S}_a} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \quad (6.116)$$

dove $\mathcal{S}_a \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = a\}$, i.e. un guscio sferico in \mathbb{R}^3 di raggio $a \in \mathbb{R}_0^+$. In letteratura la distribuzione (6.116) viene spesso indicata come $\delta(|\mathbf{x}| - a)$, per via del ruolo che essa riveste nel "proiettare" su \mathcal{S}_a . Calcoliamone la trasformata di Fourier: per definizione, si ha che

$$\left(\mathfrak{F}[\delta_{\mathcal{S}_a}], \varphi \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{S}_a} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{x}.$$

Per calcolare l'integrale in \mathcal{S}_a , passiamo in coordinate sferiche con raggio $|\mathbf{k}| = a$ fisso:

$$\int_{\mathcal{S}_a} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k} = 2\pi a^2 \int_0^\pi e^{-i a \rho \cos \theta} \sin \theta \, d\theta \stackrel{z \equiv -i a \rho \cos \theta}{=} \frac{2\pi a}{i \rho} \int_{-i a \rho}^{i a \rho} e^z \, dz = 4\pi a^2 \text{Sinc}(a\rho),$$

avendo posto $\rho \equiv |\mathbf{x}|$ per comodità. Sostituendo nella precedente, otteniamo in definitiva

$$\mathfrak{F}[\delta_{\mathcal{S}_a}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \text{Sinc}(a|\mathbf{k}|) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.117)$$

¹²²Si noti che $\mathbf{1} \notin \mathcal{S}$ non è trasformabile nel senso di Fourier, mentre lo è la distribuzione $\mathbf{1} \in \mathcal{S}'$ ad essa associata.

◦ TRASFORMATA DI FOURIER DELLA DISTRIBUZIONE THETA DI HEAVISIDE

Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione $\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$: per definizione, risulta

$$(\mathfrak{F}\theta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \theta(k) \hat{\varphi}(k) \, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ikx} \, dx \, dk.$$

L'integrale in $k \in \mathbb{R}_0^+$ non è assolutamente convergente, dunque non è possibile invertire l'ordine di integrazione. Possiamo procedere ad una *regolarizzazione esponenziale* dell'integrale; in particolare, definiamo $\theta_\varepsilon(x) \equiv e^{-\varepsilon x} \theta(x)$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Evidentemente $\theta_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $\theta_\varepsilon \rightarrow \theta$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$; invocando ora la continuità di $(\mathfrak{F}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$, otteniamo la catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}\theta, \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\mathfrak{F}\theta_\varepsilon, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-\varepsilon k} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ikx} \, dx \, dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-k(\varepsilon+ix)} \, dk \, dx = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} \, dx \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left(\text{P.v.} \frac{1}{k} + i\pi\delta, \varphi \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

avendo, all'ultimo passaggio, riconosciuto la formula di Plemelj-Sokhotski (6.31). In definitiva

$$\mathfrak{F}\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \text{P.v.} \frac{1}{k} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.118)$$

Tenendo presente che $\theta_a = \mathfrak{t}_a \theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ con $a \in \mathbb{R}_0^+$, alla luce della proprietà (6.106) risulta essere $\mathfrak{F}\theta_a = e^{-ika} \mathfrak{F}\theta$. Calcolando la trasformata inversa di ambo i membri, si trova

$$\theta_a = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}^{-1} \left[\frac{e^{-ika}}{k - i0^+} \right], \quad \frac{1}{k - i0^+} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{k - i\varepsilon}; \quad (6.119)$$

passando in rappresentazione integrale, si trova la forma di θ_a nota in Teoria di Campi:

$$\theta(x - a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik(x-a)}}{k - i0^+} \, dk = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ik(x-a)}}{k + i0^+} \, dk, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.120)$$

◦ TRASFORMATA DI FOURIER DELLA DISTRIBUZIONE VALOR PRINCIPALE

Calcoliamo la trasformata della distribuzione $\text{P.v.} \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; per definizione

$$\left(\mathfrak{F} \left[\text{P.v.} \frac{1}{x} \right], \varphi \right) = \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(k)}{k} \, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_{|k| > \rho} \frac{e^{-ikx}}{k} \, dk \, dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, procediamo ad un'integrazione complessa, distinguendo tra i casi $x < 0$ ed $x > 0$. Nel primo caso, l'integrazione può essere effettuata lungo la curva orientata $\gamma = \gamma_R \cup \gamma_\rho \cup [-R, -\rho] \cup [\rho, R]$, dove γ_R, γ_ρ sono semi-circonferenze in $\Im\{z\} > 0$ di centro $k = 0$ e raggi R, ρ rispettivamente; applicando il teorema dei residui, si trova

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-izx}}{z} \, dz + \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \rho \rightarrow 0^+}} \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{-ikx}}{k} \, dk + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-izx}}{z} \, dz + \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\rho}^R \frac{e^{-ikx}}{k} \, dk = 0.$$

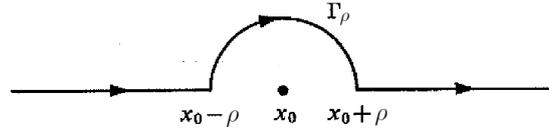
Riconoscendo nel secondo e nel quarto integrale il valore principale al quale siamo interessati ed osservando che, data la scelta del cammino, sono soddisfatte le ipotesi del lemma di Jordan, si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{|k| > \rho} \frac{e^{-ikx}}{k} \, dk = - \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-izx}}{z} \, dz \stackrel{z = \rho e^{i\theta}}{\theta \in [0, \pi]} i \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_0^\pi e^{-i x \rho e^{i\theta}} \, d\theta = i\pi,$$

dove si è adoperata l'usuale parametrizzazione lungo γ_ρ e tenuto conto del verso di orientazione. Nel caso $x > 0$, invece, è sufficiente invocare la parità dell'integrale, ottenendo così lo stesso valore del caso $x < 0$ con segno invertito; combinando le precedenti, si ha in definitiva

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{|k| > \rho} \frac{e^{-ikx}}{k} dk = -i\pi \text{Sg}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.121)$$

OSSERVAZIONE – Alla formula (6.121) saremmo potuti giungere seguendo un ragionamento relativamente più raffinato; l'idea è calcolare il valor principale dell'integrale scegliendo (una volta per tutte) un cammino di integrazione che aggiri il polo in $z = 0$, e.g. il cammino Γ_0 in figura.



Posto per semplicità $\mathcal{I}_\rho(x) \equiv \int_{|k| > \rho} \frac{e^{-ikx}}{x} dx$ t.c. P.v. $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_\rho(x)$, si trova

$$\mathcal{I}_\rho(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\widetilde{\Gamma}_0} \frac{e^{-izx}}{z} dz - \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-izx}}{z} dz, \quad x \in \mathbb{R},$$

essendo $\widetilde{\Gamma}_0 \equiv [-R, -\rho] \cup \gamma_\rho \cup [\rho, R]$. Calcoliamo dapprima l'integrale lungo γ_ρ :

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-izx}}{z} dz = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-ix)^n}{n!} \int_{\gamma_\rho} z^{n-1} dz \stackrel{z = \rho e^{i\theta}}{\theta \in [0, \pi]} -i \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-ix\rho)^n}{n!} \int_0^\pi e^{in\theta} d\theta = -i\pi + \mathcal{O}(\rho),$$

tenuto conto del verso di orientazione. Per calcolare l'integrale lungo $\widetilde{\Gamma}_0$ scegliamo un cammino chiuso tale da soddisfare il lemma di Jordan: per $x < 0$, $x > 0$ chiudiamo $\widetilde{\Gamma}_0$ tramite γ_R rispettivamente dall'alto e dal basso. In virtù del teorema dei residui, si ha in definitiva

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\widetilde{\Gamma}_0} \frac{e^{-izx}}{z} dz = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -2\pi i & x > 0. \end{cases}$$

Sostituendo in \mathcal{I}_ρ e calcolando il limite per $\rho \rightarrow 0^+$, otteniamo la (6.121). Si noti che lo stesso risultato si trova scegliendo il cammino Γ'_0 che aggira il polo dal basso anziché dall'alto.

Inserendo allora la (6.121) nell'espressione per la trasformata del valor principale, si trova

$$\mathfrak{F}\left[\text{P.v.} \frac{1}{x}\right] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Sg} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.122)$$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier della distribuzione segno; ricordiamo che $\text{Sg} \equiv \theta_+ - \theta_- \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dove $\theta_\pm \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ selezionano rispettivamente le semi-rette \mathbb{R}_0^+ ed \mathbb{R}_0^- . Pertanto, dalla formula (6.118) ed in virtù della linearità di \mathfrak{F} in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si trova banalmente

$$\mathfrak{F}\text{Sg} = \frac{2}{i\sqrt{2\pi}} \Re\left\{ \frac{1}{k + i0^+} \right\} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{P.v.} \frac{1}{k} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.123)$$

È allora evidente che $\mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}\text{Sg}] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathfrak{F}^{-1}\left[\text{P.v.} \frac{1}{k}\right] = \text{Sg}$, come previsto dal teorema di inversione.

Calcoliamo infine la trasformata di Fourier della distribuzione P.v. $\frac{1}{|x|} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; evidentemente

$$\left(\text{P.v.} \frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (6.124)$$

Tenendo presente la rappresentazione integrale $\gamma = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ per la costante di Eulero–Mascheroni, è soddisfatta per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la catena di relazioni

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{F}\left[\text{P.v.} \frac{1}{|x|}\right], \varphi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_{|k|>1} \frac{e^{-ikx} - 1}{|k|} dk + \int_{|k|>1} \frac{e^{-ikx}}{|k|} dk \right] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_0^1 \frac{\cos kx - 1}{k} dk + \int_1^{+\infty} \frac{\cos kx}{k} dk \right] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_0^{|x|} \frac{\cos u - 1}{u} du + \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\gamma + \ln |x|) \varphi(x) dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\gamma + \ln |k|, \varphi), \end{aligned}$$

dalla quale segue l'identità distribuzionale

$$\mathfrak{F}\left[\text{P.v.} \frac{1}{|x|}\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\gamma + \ln |k|) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.125)$$

o TRASFORMATA DI FOURIER DELLA DISTRIBUZIONE PARTE FINITA

Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione F.p. $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; per semplicità sia

$$\left(\text{F.p.} \frac{1}{x^2}, \varphi\right) := \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \quad (6.126)$$

in virtù della (6.107), è evidente che la (6.126) e la (6.29) sono equivalenti. Per definizione

$$\left(\mathfrak{F}\left[\text{F.p.} \frac{1}{x^2}\right], \varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_{|k|>\rho} \frac{e^{-ikx} - 1}{k^2} dk dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Procedendo come nell'esempio precedente, calcoliamo l'ultimo integrale ricorrendo al teorema dei residui. Deformiamo quindi l'intervallo di integrazione in termini della curva Γ_0 e scriviamo

$$\mathcal{I}_\rho(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\widetilde{\Gamma}_0} \frac{e^{-izx} - 1}{z^2} dz - \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-izx} - 1}{z^2} dz, \quad x \in \mathbb{R},$$

essendo ora $\mathcal{I}_\rho(x) \equiv \int_{|k|>\rho} \frac{e^{-ikx} - 1}{k^2} dk$. Per l'integrale lungo la curva γ_ρ si trova

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{e^{-izx} - 1}{z^2} dz = -i \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-ix)^n}{n!} \rho^{n-1} \int_0^\pi e^{i(n-1)\theta} d\theta = -\pi x + \mathcal{O}(\rho).$$

Resta da calcolare l'integrale lungo $\widetilde{\Gamma}_0$. Per $x < 0$ chiudiamo il circuito dall'alto tramite γ_R : pur non potendo in tal caso invocare il lemma di Jordan, è immediato verificare che il contributo proveniente dall'integrale lungo γ_R diventa infinitesimo per $R \rightarrow +\infty$, infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{-izx} - 1}{z^2} dz \right| &\leq \int_{\gamma_R} \left| \frac{e^{-izx} - 1}{z^2} \right| |dz| = -\frac{1}{R} \int_0^\pi \left| e^{-ixRe^{i\theta}} - 1 \right| d\theta \\ &\leq -\frac{\pi}{R} - \frac{2}{R} \int_0^{\pi/2} e^{xR \sin \theta} d\theta \leq -\frac{\pi}{R} [e^{xR} + 1] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

D'altra parte $\Gamma = \widetilde{\Gamma}_0 \cup \gamma_R$ non racchiude alcuna singolarità, per cui $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{-ixz} - 1}{z^2} dz = 0$. Per $x > 0$ chiudiamo il circuito dal basso tramite $\gamma'_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{-i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$; anche in tal caso, il contributo lungo γ_R è infinitesimo per $R \rightarrow +\infty$, in quanto

$$\left| \int_{\gamma'_R} \frac{e^{-ixz} - 1}{z^2} dz \right| \leq -\frac{1}{R} \int_0^\pi [e^{-xR \sin \theta} + 1] d\theta \leq -\frac{\pi}{R} [e^{-xR} + 1] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

In tal caso il circuito $\Gamma' \equiv \widetilde{\Gamma}_0 \cup \gamma'_R$ racchiude il polo di ordine due $z = 0$, sicché

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\widetilde{\Gamma}_0} \frac{e^{-ixz} - 1}{z^2} dz = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\Gamma'} \frac{e^{-ixz} - 1}{z^2} dz = -2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [e^{-ixz} - 1] = -2\pi x,$$

avendo, al solito, tenuto conto delle diverse orientazioni. In definitiva $\mathcal{I}_\rho(x) = -\pi|x|$ con $x \in \mathbb{R}$, sicché la trasformata di Fourier della distribuzione parte finita è data dall'identità distribuzionale

$$\mathfrak{F}\left[\text{F.p.} \frac{1}{x^2}\right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} k \text{Sg} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.127)$$

Alla (6.127) saremmo giunti rapidamente tenendo presente l'identità (6.67) e combinando quest'ultima con la proprietà di differenziazione (6.103) per la trasformata di Fourier in \mathcal{S}' :

$$\mathfrak{F}\left[\text{F.p.} \frac{1}{x^2}\right] = -\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dx} \text{P.v.} \frac{1}{x}\right] = -ik \mathfrak{F}\left[\text{P.v.} \frac{1}{x}\right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} k \text{Sg} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Vediamo infine come calcolare la trasformata di Fourier di $\text{F.p.} |\mathbf{x}|^{-2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ per $n \geq 2$. A questo proposito, si tenga presente che la funzione $\mathbf{x} \rightarrow |\mathbf{x}|^{-2}$ è localmente sommabile su \mathbb{R}^n per $n \geq 3$ (in particolare, essa è temperata e dunque definisce una distribuzione regolare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), mentre presenta una singolarità non-integrabile per $n = 2$ (si vedano gli esempi al §6.4). Consideriamo dapprima quest'ultimo caso: sia dunque $\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, allora

$$\left(\mathfrak{F}\left[\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right], \varphi \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) \left[\int_{|\mathbf{k}| < 1} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - 1}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} + \int_{|\mathbf{k}| > 1} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} \right] d\mathbf{x};$$

Procediamo quindi come per il calcolo della trasformata di Fourier del valor principale di $|x|^{-1}$: passando ora in coordinate polari in $\mathbf{k} \mapsto (r, \theta)$, si trova la catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{F}\left[\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right], \varphi \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ir|\mathbf{x}| \cos \theta} - 1}{r} d\theta dr + \int_1^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ir|\mathbf{x}| \cos \theta}}{r} d\theta dr \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) \left[\int_0^1 \frac{\mathcal{J}_0(r|\mathbf{x}|) - 1}{r} dr + \int_1^{+\infty} \frac{\mathcal{J}_0(r|\mathbf{x}|)}{r} dr \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) \left[\int_0^{|\mathbf{x}|} \frac{\mathcal{J}_0(u) - 1}{u} du + \int_{|\mathbf{x}|}^{+\infty} \frac{\mathcal{J}_0(u)}{u} du \right] d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

essendo $\mathcal{J}_0(u) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iu \cos \theta} d\theta$ la funzione di Bessel del primo tipo di ordine zero. Introducendo quindi la costante $\gamma_0 \equiv \int_0^1 \frac{1 - \mathcal{J}_0(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{\mathcal{J}_0(u)}{u} du$, si trova l'espressione

$$\int_0^{|\mathbf{x}|} \frac{\mathcal{J}_0(u) - 1}{u} du + \int_{|\mathbf{x}|}^{+\infty} \frac{\mathcal{J}_0(u)}{u} du = -\gamma_0 - \ln |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Inserendo la precedente nell'espressione per la trasformata di Fourier, risulta

$$\mathfrak{F}\left[\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right] = -\gamma_0 - \ln |\mathbf{k}| \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2). \quad (6.128)$$

Sia ora $|\mathbf{x}|^{-2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 3$; per calcolare la trasformata di Fourier di $1/|\mathbf{x}|^2$ consideriamo, per semplicità, il caso $n = 3$ (per $n \geq 4$ si procede in modo analogo): allora

$$\left(\mathfrak{F} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right], \varphi \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} d\mathbf{x}.$$

Passando in coordinate sferiche $\mathbf{k} \mapsto (r, \theta, \phi)$ e procedendo nell'integrazione si trova

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{F} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right], \varphi \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_0^{+\infty} \int_0^\pi e^{-i|\mathbf{x}|r \cos \theta} \sin \theta d\theta dr d\mathbf{x} \\ &\stackrel{u \equiv -r \cos \theta}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\mathcal{R} \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_0^{\mathcal{R}} \frac{1}{r} \int_{-r}^r e^{i|\mathbf{x}|u} du dr d\mathbf{x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \int_{\mathbb{R}_0^+} \frac{\sin(r|\mathbf{x}|)}{r} dr d\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

dove al quarto passaggio abbiamo invocato la formula (6.121), i.e. $\int_{\mathbb{R}_0^+} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{Sg}(a)$ con $a \in \mathbb{R}$. Vale pertanto la seguente identità distribuzionale:

$$\mathfrak{F} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.129)$$

6.8 Trasformata di Fourier di funzioni sommabili

Cominciamo con l'analizzare la trasformata di Fourier per funzioni $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, laddove $\mathcal{F}\varphi \equiv \hat{\varphi}$ è ben definita, essendo $\hat{\varphi}$ come in (6.76); infatti, in virtù della sommabilità di φ , risulta

$$|(\mathcal{F}\varphi)(k)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n). \quad (6.130)$$

Diversamente da $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$, l'operatore di trasformata di Fourier \mathcal{F} non mappa (in generale) L_1 in sé, i.e. se $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ allora $\mathcal{F}\varphi \notin L_1(\mathbb{R}^n)$. Si consideri, e.g. la funzione caratteristica $\chi_{\mathcal{I}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ corrispondente all'intervallo $\mathcal{I} \equiv [a, b] \subset \mathbb{R}$: evidentemente $\chi_{\mathcal{I}} \in L_1(\mathbb{R})$, per cui

$$(\mathcal{F}\chi_{\mathcal{I}})(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathcal{I}}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \sin \left[\frac{k}{2}(b-a) \right] e^{-\frac{i}{2}k(a+b)},$$

ma $\mathcal{F}\chi_{\mathcal{I}} \notin L_1(\mathbb{R})$ (si prenda, e.g. $b = -a = R$, $R \in \mathbb{R}$ finito). Di conseguenza, indicando con $\check{\varphi}$ la trasformata inversa di Fourier di $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ e con $\mathcal{F}^*\varphi \equiv \check{\varphi}$ l'operatore ad essa associato, abbiamo che $\mathcal{F}^* \neq \mathcal{F}^{-1}$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$; dunque \mathcal{F}^{-1} dovrà, in generale, essere intesa nel senso distribuzionale.

Osserviamo ora una seconda proprietà della trasformata di Fourier \mathcal{F} : dal calcolo precedente, è evidente che $\mathcal{F}\chi_{\mathcal{I}}$ è continua ed infinitesima all'infinito, i.e. $\mathcal{F}\chi_{\mathcal{I}} \in C_0(\mathbb{R})$, essendo $C_0(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue su \mathbb{R} che si annullano all'infinito. Come ulteriore esempio, si consideri la trasformata della funzione sommabile $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-a|x|} \in \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}^+$; il calcolo è immediato:

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-ax} \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2},$$

i.e. la trasformata di Fourier dell'esponenziale decrescente è una Lorentziana ed $\mathcal{F}[e^{-a|x|}] \in C_0(\mathbb{R})$. Tale proprietà della trasformata di funzioni sommabili ha carattere generale, in virtù del seguente

LEMMA (RIEMANN-LÉBESGUE) - Se $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathcal{F}\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $\|\mathcal{F}\varphi\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$.

Dimostrazione. Calcolando il sup della (6.130) si trova la disuguaglianza cercata. Ora $\overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) = L_1(\mathbb{R}^n)$ per cui se $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ allora $\exists \{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente a φ rispetto alla norma di $L_1(\mathbb{R}^n)$, i.e. tale che $\|\varphi - \varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ per $\nu \rightarrow +\infty$. Ma $\widehat{\varphi}_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ e converge uniformemente (i.e. rispetto alla sup-norma $\|(\cdot)\|_\infty := \sup_k \{ |(\cdot)| \}$) di $C_0(\mathbb{R}^n)$) a $\widehat{\varphi}$ per $\nu \rightarrow \infty$, infatti

$$\|\mathcal{F}\varphi - \widehat{\varphi}_\nu\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi - \varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0.$$

Di conseguenza $\mathcal{F}\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, il che completa la dimostrazione del lemma. \square

L'operatore $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ è quindi una mappa lineare e limitata. Ne segue che, munendo $L_1(\mathbb{R}^n)$ della struttura di un'algebra rispetto al prodotto di convoluzione e $C_0(\mathbb{R}^n)$ della struttura di algebra rispetto all'usuale moltiplicazione, la trasformata \mathcal{F} individua un'isomorfismo tra algebre a valori in $L_1(\mathbb{R}^n)$ e con immagine $\mathcal{F}(L_1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Vale allora il seguente

TEOREMA (CONVOLUZIONE) - Se $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, allora $\varphi * \psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}[\varphi * \psi] = (2\pi)^{n/2} \widehat{\varphi} \widehat{\psi}$.

Dimostrazione. Alla luce della disuguaglianza di Young (6.51), $\varphi * \psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, dunque $\mathcal{F}[\varphi * \psi] \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Per provare che $\mathcal{F}[\varphi * \psi] = (2\pi)^{-n/2} \widehat{\varphi} \widehat{\psi}$ è sufficiente scambiare l'ordine di integrazione (a fronte dell'assoluta convergenza dell'integrale) ed effettuare un cambio di variabile a jacobiano unitario:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi * \psi](\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &\stackrel{\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{z}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{z} = (2\pi)^{n/2} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \widehat{\psi}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad \square$$

Dal teorema di convoluzione si deduce, e.g., la seguente relazione semi-gruppale ($a, b \in \mathbb{R}^+$)

$$\frac{1}{\pi} \frac{a+b}{k^2 + (a+b)^2} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(a+b)|x|} \right](k) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} \right) * \left(\frac{1}{\pi} \frac{b}{x^2 + b^2} \right). \quad (6.131)$$

Consideriamo ora lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile e proviamo che, così come per gli spazi \mathcal{S} ed \mathcal{S}' , anche L_2 è chiuso rispetto all'operazione di trasformata di Fourier. A questo proposito cominciamo col notare che non tutte le funzioni L_2 sono sommabili, e.g. $L_1(\mathbb{R}) \not\subset (1+x^2)^{-1/2} \in L_2(\mathbb{R})$, per cui non è possibile definire l'operatore di trasformata di Fourier per una generica funzione di L_2 in termini della trasformata integrale (6.76). Possiamo però invocare l'isometricità di $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ rispetto alla norma di L_2 (identità di Parseval (6.98)) e la densità di \mathcal{S} in L_2 , così da estendere la trasformata di Fourier ad un operatore unitario di L_2 . Questo è l'idea principale alla base del seguente

TEOREMA (PLANCHEREL) - $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ ammette su L_2 un'unica estensione lineare, biettiva ed isometrica.

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{F} \in B(\mathcal{S})$ ed $\overline{\mathcal{S}} = L_2$, esiste unica l'estensione $\widehat{\mathcal{F}} \in B(L_2, \mathcal{S})$ t.c. $\|\widehat{\mathcal{F}}\|_{B(L_2)} = \|\mathcal{F}\|_{B(\mathcal{S})}$ (teorema "estensione lineare limitata", §4.2); inoltre $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ è isometrico, per cui $\|\mathcal{F}\|_{B(\mathcal{S})} = 1$ e quindi $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2)$ è anch'esso isometrico. Ne segue che $\widehat{\mathcal{F}}$ è iniettivo ed ammette inverso limitato su $\mathcal{R}_{\widehat{\mathcal{F}}}$. D'altronde $\mathcal{R}_{\widehat{\mathcal{F}}} = \mathcal{S}$ è denso in L_2 , sicché $\widehat{\mathcal{F}}$ è suriettivo ed $\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ è estendibile a tutto L_2 . In definitiva $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2)$ è una isometria suriettiva di L_2 e cioè è unitario, i.e. $\widehat{\mathcal{F}}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}}^*$. Si noti che l'inversa dell'estensione di \mathcal{F} coincide con l'estensione dell'inversa, sempre in virtù del teorema dell'estensione lineare limitata, applicato ora ad $(\mathcal{F}^{-1}, \mathcal{S})$. \square

Il teorema di Plancherel garantisce dunque l'esistenza e l'unicità di un'estensione unitaria della trasformata di Fourier dallo spazio \mathcal{S} allo spazio L_2 . Data l'importanza che l'operatore $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2)$ ha in Meccanica Quantistica, e tenendo conto della densità di \mathcal{S} in L_2 , se ne usa dare la seguente

DEFINIZIONE (FOURIER-PLANCHEREL) - Sia $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ e $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente a φ rispetto alla topologia di $L_2(\mathbb{R}^n)$. Def. **trasformata di Fourier-Plancherel** $\widehat{\mathcal{F}} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ l'operatore

$$(\widehat{\mathcal{F}}\varphi)(\mathbf{k}) := \text{l.i.m.}_{\nu \rightarrow +\infty} (\mathcal{F}\varphi_\nu)(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.132)$$

dove il simbolo l.i.m. sta ad indicare l'operazione di "limite in media" (i.e. nel senso di L_2).

OSSERVAZIONE I – La costruzione (6.132) per l'operatore di Fourier–Plancherel non è l'unica possibile. Infatti, si può equivalentemente ricorrere alla definizione di (\mathcal{F}, L_1) (ottenuta a sua volta a partire da $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$) e dare di $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2)$ un'espressione integrale dipendente esclusivamente dalla funzione $\varphi \in L_2$ di interesse. A questo proposito si noti che, data $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ e detta $\chi_{\mathcal{R}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la funzione caratteristica della palla $\Omega_{\mathcal{R}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}|^2 \leq \mathcal{R}\}$, risulta $\chi_{\mathcal{R}}\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, infatti

$$\|\chi_{\mathcal{R}}\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} |\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} |\varphi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{R}})}^2 + \frac{\pi^{n/2}\mathcal{R}^n}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

essendo $2|\varphi(\mathbf{x})| \leq |\varphi(\mathbf{x})|^2 + 1$. É chiaro che $\chi_{\mathcal{R}}\varphi \rightarrow \varphi$ puntualmente per $\mathcal{R} \rightarrow +\infty$; inoltre, essendo $|(\varphi - \chi_{\mathcal{R}}\varphi)(\mathbf{x})|^p \leq |\varphi(\mathbf{x})|^p$ per $p = 1, 2, \dots$, in virtù del teorema sulla convergenza dominata, segue che $\chi_{\mathcal{R}}\varphi$ converge a φ per $\mathcal{R} \rightarrow +\infty$ rispetto alla topologia di $L_p(\mathbb{R}^n)$ ed, in particolare,

$$\|\varphi - \chi_{\mathcal{R}}\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\mathcal{R} \rightarrow +\infty} 0.$$

D'altronde il teorema di Plancherel garantisce la continuità di $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2)$, per cui

$$(\widehat{\mathcal{F}}\varphi)(\mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \text{l.i.m.}_{\mathcal{R} \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.133)$$

In definitiva, si è visto che se $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ è possibile distinguere tra due casi: se $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, allora la trasformata di Fourier–Plancherel di φ può essere calcolata attraverso la formula integrale (6.76); se invece $\varphi \notin L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, allora è possibile costruire l'operatore di Fourier–Plancherel $\widehat{\mathcal{F}}$ come limite (rispetto alla topologia di L_2) della successione di trasformate $\{\mathcal{F}\varphi_{\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o, equivalentemente, della famiglia di trasformate $\{\mathcal{F}[\chi_{\mathcal{R}}\varphi], \mathcal{R} \in \mathbb{R}^+\}$ di $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Esempi

◦ COMPLETEZZA IN $L_2(\mathbb{R})$ DELLE FUNZIONI DI HERMITE

L'insieme delle funzioni di Hermite $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ forma una base ortonormale di $L_2(\mathbb{R})$, i.e.

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (6.134)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \psi_n(x) \psi_n(y) = \delta(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6.135)$$

L'ortonormalità segue banalmente dalla corrispondente proprietà per i polinomi di Hermite:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_n(x) \mathcal{H}_m(x) e^{-x^2} \, dx = \delta_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Per la completezza, proviamo dapprima che le ψ_n formano una base di $L_2(\mathbb{R})$; a questo proposito, riscriviamo la formula per la funzione generatrice (6.94) in termini di ψ_n , i.e.

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{t^n}{n!} \mathcal{H}_n(x) = \pi^{1/4} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(\sqrt{2}t)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \psi_n(x).$$

Rinominando $z \equiv \sqrt{2}t$ per ogni $t \in \mathbb{C}$, troviamo che la precedente si riscrive nella forma

$$\mathcal{H}(x; z) \equiv \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2\sqrt{2}xz + z^2)} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x), \quad z, x \in \mathbb{C}, \quad (6.136)$$

la quale è uniformemente convergente. Supponiamo per assurdo che esista $f \in L_2(\mathbb{R})$ t.c. $\langle \psi_n, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, i.e. $\langle \mathcal{H}(x; z), f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \forall x, z \in \mathbb{C}$; in particolare

$$0 = \left\langle \mathcal{H}(x; z) \Big|_{z=ik/\sqrt{2}}, f \right\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{e^{\frac{k^2}{4}}}{\pi^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2} - ikx} dx = \sqrt{2} \pi^{1/4} e^{\frac{k^2}{4}} \mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x)](k),$$

e cioè $\mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x)](k) = 0$ q.o. in \mathbb{R} . Ma $e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ per $f \in L_2(\mathbb{R})$, dal momento che

$$\left\| e^{-\frac{1}{2}x^2} f \right\|_{L_1(\mathbb{R})} = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} |f(x)| dx \right| = \left| \langle e^{-\frac{1}{2}x^2}, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \right| \leq \|e^{-\frac{1}{2}x^2}\|_{L_2(\mathbb{R})} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty,$$

avendo invocato la disuguaglianza di Cauchy–Schwartz all’ultimo passaggio. Pertanto $e^{-\frac{1}{2}x^2} f$ è una funzione di $L_1(\mathbb{R})$ per $f \in L_2(\mathbb{R})$ con trasformata di Fourier nulla. Ma \mathcal{F} è invertibile su L_1 (“teorema di inversione in S ” esteso ad L_1) dunque $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \{0\}$ e quindi $e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x) = 0$ q.o. in \mathbb{R} , ovvero $f(x) = 0$ q.o. in \mathbb{R} , il che è assurdo. Dunque $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ forma una base di $L_2(\mathbb{R})$. Proviamo infine la relazione di completezza (6.135); a tal fine, è sufficiente considerare il limite distribuzionale $z \rightarrow 1$ della seguente espressione, nota come *formula di Mehler*,

$$\mathcal{E}(x, y; z) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}_0} z^n \psi_n(x) \psi_n(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}} e^{-\frac{1-z}{1+z}(\frac{x+y}{2})^2 - \frac{1+z}{1-z}(\frac{x-y}{2})^2}, \quad (6.137)$$

e riconoscendo nel membro di destra la δ -famiglia gaussiana (6.23). Per dimostrare la (6.137) possiamo adoperare le proprietà della trasformata di Fourier: sostituendo nella formula di Rodriguez (6.93) l’espressione (6.88) per la trasformata di Fourier di una gaussiana con $\alpha = 1/4$ ed invocando la proprietà di differenziazione (6.79), troviamo per l’ n -esimo polinomio di Hermite la relazione

$$\mathcal{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[\mathcal{F}[e^{-k^2/4}](x) \right] = \frac{i^n}{\sqrt{4\pi}} e^{x^2} \int_{\mathbb{R}} k^n e^{-\frac{1}{4}k^2 - ikx} dk. \quad (6.138)$$

Di conseguenza, in virtù dell’uniforme convergenza degli integrali di Fourier su \mathbb{R} , risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, y; z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{z^n}{2^n n!} \mathcal{H}_n(x) \mathcal{H}_n(y) \\ &= \frac{1}{4\pi \sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n z^n}{2^n n!} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (kk')^n e^{-\frac{1}{4}(k^2+k'^2) - i(xk+yk')} dk dk' \\ &= \frac{1}{4\pi \sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}kk'z - \frac{1}{4}(k^2+k'^2) - i(xk+yk')} dk dk'; \end{aligned}$$

procedendo al cambiamento di variabili $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + \tau)$, $k' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma - \tau)$ ed invocando nuovamente l’espressione (6.88), troviamo in definitiva il risultato desiderato.

○ RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI DELL’OPERATORE DI FOURIER–PLANCHEREL

Negli esempi al §6.6 si è visto che le funzioni di Hermite–Chebyshev sono autofunzioni dell’operatore di Fourier (\mathcal{F}, S) corrispondenti agli autovalori $\sigma(\mathcal{F}) = \{1, i, -1, -i\}$, ciascuno con molteplicità infinita. Questa proprietà, combinata al precedente risultato, permette di dare dell’operatore ($\widehat{\mathcal{F}}, L_2(\mathbb{R})$) una definizione equivalente alle (6.132), (6.133). Sia dunque $f \in L_2(\mathbb{R})$ generica: in virtù della completezza delle funzioni di Hermite in $L_2(\mathbb{R})$, la funzione f potrà esprimersi come combinazione lineare delle $\{\psi_n\}$; difatti, dalla (6.135) segue l’espressione

$$\begin{aligned} f(x) &= (\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \psi_n(x) \psi_n(y) f(y) dy = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle \psi_n, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \psi_n(x), \end{aligned}$$

valida q.o.¹²³ in \mathbb{R} . Tenendo a mente la proprietà di continuità di $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2(\mathbb{R}))$, otteniamo

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \left(\widehat{\mathcal{F}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle \psi_n, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \psi_n(x) \right)(k) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle \psi_n, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} (\widehat{\mathcal{F}}\psi_n)(k),$$

sicché, tenendo conto dell'equazione agli autovalori (6.95) (e del fatto che $\widehat{\mathcal{F}}\psi_n = \mathcal{F}\psi_n$), risulta

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-i)^n \mathcal{C}_n \psi_n(k), \quad \mathcal{C}_n \equiv \langle \psi_n, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (6.139)$$

valida $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$, q.o. in \mathbb{R} . Si noti che le $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, oltre ad essere autofunzioni di $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2(\mathbb{R}))$, sono anche autofunzioni del cosiddetto “operatore numero”

$$\mathfrak{N} := \frac{1}{2}(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 - \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})}), \quad (6.140)$$

il quale è densamente definito su L_2 , i.e. $\mathfrak{N}\psi_n = n\psi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In virtù delle proprietà di autoaggiuntezza di $(\mathfrak{p}^2, \mathbb{H}_2(\mathbb{R}))$ e di $(\mathfrak{q}^2, \mathcal{D}_{\mathfrak{q}^2})$ è possibile dimostrare che anche $(\mathfrak{N}, \mathcal{D}_{\mathfrak{N}})$ è autoaggiunto su $L_2(\mathbb{R})$; pertanto, alla luce del *teorema di Stone*, \mathfrak{N} rappresenta il generatore infinitesimo su $L_2(\mathbb{R})$ del gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari $\{\mathcal{U}_\theta = e^{-i\theta\mathfrak{N}}, \theta \in [0, 2\pi)\}$, la cui azione è descritta dalla relazione ($f \in L_2(\mathbb{R})$)

$$(\mathcal{U}_\theta f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}_n e^{-in\theta} \psi_n(x), \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}), \quad (6.141)$$

descrivente l'evoluzione nel tempo $\theta \in [0, 2\pi)$ di un oscillatore armonico quantistico di periodo 2π . Confrontando la (6.141) con la rappresentazione (6.139) è evidente che $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2(\mathbb{R}))$ si scrive in termini del gruppo uniparametrico di \mathcal{U}_θ ponendo $\theta = \pi/2$, i.e. $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{U}_{\pi/2} = e^{-i\frac{\pi}{2}\mathfrak{N}}$ e cioè

$$\widehat{\mathcal{F}} = e^{-i\frac{\pi}{4}(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathbb{1}_{L_2(\mathbb{R})})}, \quad (6.142)$$

identicamente. Alla precedente saremmo potuti giungere equivalentemente a partire dalle identità operatoriali (6.99) dalle quali seguono le relazioni $\mathcal{F}\mathfrak{q}_S^2 = \mathfrak{p}_S^2\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}\mathfrak{p}_S^2 = \mathfrak{q}_S^2\mathcal{F}$; estendendo le precedenti a tutto $L_2(\mathbb{R})$, si scopre la regola di commutazione $\widehat{\mathcal{F}}(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) = (\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{p}^2)\widehat{\mathcal{F}}$. Invocando allora l'unitarietà dell'operatore di Fourier–Plancherel, otteniamo in definitiva

$$[\widehat{\mathcal{F}}, \mathfrak{N}] = \mathbb{O}_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (6.143)$$

Di conseguenza gli operatori $\widehat{\mathcal{F}}$ ed \mathfrak{N} ammettono una base ortonormale simultanea di autofunzioni di L_2 (i.e. le funzioni di Hermite–Chebyshev); ma $(\mathfrak{q}, \mathcal{D}_{\mathfrak{q}})$ e $(\mathfrak{p}, \mathbb{H}_1(\mathbb{R}))$ formano un insieme irriducibile di operatori di L_2 , sicché $\widehat{\mathcal{F}}$ deve essere funzione di \mathfrak{N} e viceversa; sfruttando quindi l'autoaggiuntezza di \mathfrak{N} in L_2 si ritrova nuovamente la formula (6.142).

o UNICITÀ DELL'ESTENSIONE DI $\mathfrak{p}_S = \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{q}_S\mathcal{F}$ SU $L_2(\mathbb{R})$

Nell'esempio precedente abbiamo supposto tacitamente che le identità (6.99) ed (6.100) ammettessero estensione unica su L_2 . Tuttavia, gli operatori in questione non sono necessariamente limitati e l'unicità dell'estensione non può più essere dedotta a partire dal teorema sull'estensione lineare limitata. È però possibile ricorrere alle proprietà di essenziale autoaggiuntezza di $(\mathfrak{q}_S, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ e di $(\mathfrak{p}_S, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ per provare che la (6.100) si estende unicamente all'identità operatoriale

$$\mathfrak{p} = \widehat{\mathcal{F}}^\dagger \mathfrak{q} \widehat{\mathcal{F}}. \quad (6.144)$$

¹²³La (6.8) altro non è che una versione rigorosa della familiare relazione di completezza in notazione bra–ket di Dirac:

$$|f\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}|f\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|f\rangle \quad \xrightarrow[\substack{\mathcal{H}=L_2(\mathbb{R}) \\ f(x)=\langle x|f\rangle}]{\quad} \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle \psi_n, f \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \psi_n(x).$$

Difatti, essendo (q, \mathcal{D}_q) essenzialmente autoaggiunto su \mathcal{S} , in virtù dell'unitarietà di $(\widehat{\mathcal{F}}, L_2)$, anche $\widehat{\mathcal{F}}^\dagger q_S \widehat{\mathcal{F}}$ dev'esserlo su \mathcal{S} . Ma (\mathfrak{p}, L_2) è anch'esso essenzialmente autoaggiunto su \mathcal{S} e dato che le estensioni autoaggiunte di operatori essenzialmente autoaggiunti sono uniche e coincidono con la chiusura dell'operatore (vedi §4.4), necessariamente dev'essere

$$\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{p}_S} = \overline{\widehat{\mathcal{F}}^\dagger q_S \widehat{\mathcal{F}}} = \widehat{\mathcal{F}}^\dagger \overline{q_S} \widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}^\dagger q \widehat{\mathcal{F}},$$

identicamente su L_2 . In particolare, si noti che se $\forall f \in \mathbb{H}_1$, allora $\widehat{\mathcal{F}}f \in \mathcal{D}_q$.

6.9 Operatori differenziali in \mathcal{S}' e soluzioni fondamentali

In questo paragrafo affronteremo il problema della determinazione, tramite trasformata di Fourier, delle cosiddette *soluzioni fondamentali* (altrimenti note come *funzioni di Green* o *funzioni di influenza*) di operatori alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti. Naturalmente, tale metodo permetterà di ottenere solo soluzioni a lenta crescita, essendo \mathfrak{F} un isomorfismo su \mathcal{S}' .

Per cominciare, introduciamo il concetto di soluzione generalizzata (o distribuzionale) in \mathcal{D}' di una generica equazione differenziale lineare. Sia pertanto $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}}) : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'operatore differenziale lineare di ordine $m \in \mathbb{N}_0$ a coefficienti non-costanti $a_\alpha(\mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ così definito

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})(\cdot) : \mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})\mathcal{T} := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.145)$$

Si noti che $\mathcal{L}\mathcal{T} \in \mathcal{D}'$ in virtù della continuità della mappa $\mathcal{T} \mapsto \partial^\alpha \mathcal{T}$ e della moltiplicazione rispetto a C^∞ . Diremo che $Q \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è una **soluzione distribuzionale** dell'equazione (6.145) sse

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})\mathcal{T}, \varphi \right) = (Q, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (6.146)$$

con $\text{Supp}(\varphi) \subset \Omega$. Si noti, infatti, che la (6.145) è equivalente all'equazione

$$(Q, \varphi) = \left(\mathcal{T}, \mathcal{L}^*(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})\varphi \right), \quad \mathcal{L}^*(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})(\cdot) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha [a_\alpha(\cdot)], \quad (6.147)$$

poiché, a fronte delle proprietà di moltiplicazione e differenziazione distribuzionale, risulta

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})\mathcal{T}, \varphi \right) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \left(a_\alpha(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \mathcal{T}, \varphi \right) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \left(\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \mathcal{T}, a_\alpha \varphi \right) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha (a_\alpha \varphi) \right).$$

Restringiamo ora l'interesse alle soluzioni distribuzionali di equazioni differenziali lineari a *coefficienti costanti*; sia quindi $\mathcal{L}(\partial) : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ l'operatore differenziale a coefficienti costanti $a_\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

DEFINIZIONE (SOLUZIONI FONDAMENTALI) - $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'$ è **soluzione fondamentale** di $\mathcal{L}(\partial)$ sse

$$\mathcal{L}(\partial)\mathcal{G} = \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'. \quad (6.148)$$

Un risultato centrale, noto come *teorema di Malgrange–Ehrenpreis* (1954–1955), garantisce l'esistenza di una simile soluzione in \mathcal{D}' ma non l'unicità [Vla002]: difatti, se $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'$ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}(\partial)$ e $\mathcal{G}_0 \in \mathcal{D}'$ è soluzione dell'omogenea $\mathcal{L}(\partial)\mathcal{G}_0 = 0$, allora per linearità $\mathcal{L}(\partial)[\mathcal{G} + \mathcal{G}_0] = \mathcal{L}(\partial)\mathcal{G}_0 + \mathcal{L}(\partial)\mathcal{G} = \delta$, ovvero anche $\mathcal{G} + \mathcal{G}_0 \in \mathcal{D}'$ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}(\partial)$.

Come preannunciato in apertura, siamo interessati a risolvere la (6.148) tramite trasformata di Fourier; occorre perciò stabilire sotto quali ipotesi la (6.148) ammette soluzioni fondamentali in \mathcal{S}' . Il seguente lemma risponde a tal necessità, fornendo un criterio necessario e sufficiente [Vla971].

LEMMA (SOLUZIONI FONDAMENTALI IN \mathcal{S}') - La distribuzione $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione fondamentale dell'operatore $\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}}) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sse $\widehat{\mathcal{G}} \equiv \mathfrak{F}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ soddisfa in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'equazione

$$\mathcal{L}(\iota\mathcal{M}_{\mathbf{k}})\widehat{\mathcal{G}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \quad \mathcal{L}(\iota\mathcal{M}_{\mathbf{k}}) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \iota^{|\alpha|} a_{\alpha} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{\alpha}. \quad (6.149)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale di $\mathcal{L}(\partial)$, i.e. $\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}})\mathcal{G} = \delta$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Calcoliamo la trasformata di Fourier di ambo i membri: in virtù delle proprietà di $(\mathfrak{F}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ si trova

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} = \mathfrak{F}\delta = \mathfrak{F}[\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}})\mathcal{G}] = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} a_{\alpha} \mathfrak{F}[\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \mathcal{G}] = \mathfrak{F}\mathcal{G} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \iota^{|\alpha|} a_{\alpha} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{\alpha} \equiv \mathcal{L}(\iota\mathcal{M}_{\mathbf{k}})\widehat{\mathcal{G}},$$

avendo, in particolare, invocato la (6.104) e la (6.111). Viceversa, sia $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $\widehat{\mathcal{G}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ soddisfi la (6.149): tenendo presente che $\mathcal{L}(\iota\mathcal{M}_{\mathbf{k}})\widehat{\mathcal{G}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{L}(\iota\mathcal{M}_{\mathbf{k}})$ è a crescita lenta per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ finito) ed applicando il teorema di inversione per la trasformata in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, risulta

$$\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathfrak{F}^{-1} \mathbf{1} = \mathfrak{F}^{-1} \left[\mathcal{L}(\iota\mathcal{M}_{\mathbf{k}})\widehat{\mathcal{G}} \right] = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \iota^{|\alpha|} a_{\alpha} \mathfrak{F}^{-1} \left[\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{\alpha} \widehat{\mathcal{G}} \right] = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} a_{\alpha} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \left[\mathfrak{F}^{-1} \left[\mathfrak{F}\mathcal{G} \right] \right] = \mathcal{L}(\partial)\mathcal{G},$$

avendo, questa volta, invocato la proprietà (6.103) e la (6.112). Dunque $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ soddisfa la (6.148), i.e. è per definizione una soluzione fondamentale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dell'operatore $\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}})$. \square

Il precedente lemma mostra dunque come sia possibile ridurre, tramite trasformata di Fourier, il problema della determinazione delle soluzioni in \mathcal{S}' di un'equazione lineare alle derivate parziali ed a coefficienti costanti nella ricerca delle soluzioni in \mathcal{S}' di un'equazione algebrica della forma

$$\mathcal{P}(\mathbf{k})\widehat{\chi} = \mathbf{1}, \quad (6.150)$$

dove \mathcal{P} è il polinomio di \mathbb{R}^n associato all'operatore differenziale \mathcal{L} . Resta pertanto da chiarire quando la (6.150) ammette soluzioni $\widehat{\chi} \in \mathcal{S}'$ non banali. Per cominciare, si noti che le soluzioni in \mathcal{S}' della (6.150) devono coincidere formalmente con $\mathbf{1}/\mathcal{P}(\mathbf{k})$, quanto meno all'esterno dell'insieme $\mathcal{N}_{\mathcal{P}} \equiv \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{P}(\mathbf{k}) = 0\}$ degli zeri di \mathcal{P} . Di conseguenza, se $\mathcal{N}_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ allora le soluzioni della (6.150) non sono uniche e differiscono da $\mathbf{1}/\mathcal{P}(\mathbf{k})$ per al più una combinazione lineare di distribuzioni temperate aventi supporto su $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$. Ci siamo già imbattuti in precedenza in casi simili, e.g. nella soluzione dell'equazione distribuzionale algebrica $ku(k) = 1$ (vedi esempi, §6.5.1) per la quale le distribuzioni

$$\text{P.v.} \frac{1}{k}, \frac{1}{k + i0^+}, \frac{1}{k - i0^+} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

costituiscono tutte delle soluzioni, mutuamente definite a meno di un multiplo della distribuzione delta; un caso analogo lo ritroviamo nelle soluzioni dell'equazione $k^2 u(k) = 1$, le quali differiscono dalla parte finita di $1/k^2$ per una combinazione lineare della delta e della sua derivata prima.

Nel caso di un generico polinomio \mathcal{P} , il problema della determinazione delle soluzioni della (6.150) può essere risolto nel modo seguente: se $1/\mathcal{P} \in L_{1,loc}$, allora una soluzione in \mathcal{S}' della (6.150) esiste e corrisponde alla distribuzione regolare $\mathbf{1}/\mathcal{P} \in \mathcal{S}'$; se invece $1/\mathcal{P} \notin L_{1,loc}$ (e.g. $1/x$ od $1/|\mathbf{x}|^2$ in \mathbb{R} ed \mathbb{R}^2), allora un risultato dovuto ad L. Hörmander (1958) assicura l'esistenza di una soluzione (diciamo) $\text{Reg}\{1/\mathcal{P}\} \in \mathcal{S}'$, la cui costruzione dipende dal polinomio \mathcal{P} ed, in particolare, dalla struttura di $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ [Vla971]. In definitiva la (6.150) è sempre risolubile in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ed ha soluzione

$$\widehat{\chi} = \text{Reg}\left\{1/\mathcal{P}(\mathbf{k})\right\} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1} := \tau \mathfrak{F}} \chi = \mathfrak{F}\left[\text{Reg}\left\{\frac{1}{\mathcal{P}(-\mathbf{k})}\right\}\right].$$

Tornando allora alle soluzioni fondamentali dell'operatore $\mathcal{L}(\partial)$ possiamo concludere quanto segue: ogni operatore differenziale lineare a coefficienti costanti ammette sempre una soluzione fondamentale

in \mathcal{S}' definita (in generale non univocamente) dall'espressione

$$\mathcal{G} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathfrak{F} \left[\text{Reg} \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}(-i\mathcal{M}_{\mathbf{k}})} \right\} \right] \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (6.151)$$

avendo osservato che $\mathfrak{r}\mathcal{M}_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mathfrak{r}\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (\mathfrak{r}\mathcal{M}^{\alpha})(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{\alpha} = -\mathcal{M}_{\mathbf{k}}$.

Le soluzioni fondamentali (6.151) rivestono un ruolo centrale nella determinazione delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali non-omogenee del tipo

$$[\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}})u](\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad f, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.152)$$

In particolare, è possibile costruire soluzioni della (6.152) in termini della soluzione fondamentale $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'$; avendo tale proprietà carattere generale, la dimostriamo di seguito nello spazio \mathcal{D}' .

TEOREMA (SOLUZIONI DI EDP NON-OMOGENEE) - $f \in \mathcal{D}' : \exists f * \mathcal{G} \in \mathcal{D}' \Rightarrow \exists! u = f * \mathcal{G} \in \mathcal{D}'$ ¹²⁴.

Dimostrazione. L'esistenza di u in \mathcal{D}' segue dal teorema di Malgrange–Ehrenpreis. Verifichiamo che $u = f * \mathcal{G}$; poiché $f \in \mathcal{D}'$ t.c. $\exists f * \mathcal{G} \in \mathcal{D}'$ (e.g. $f \in \mathcal{E}$), in virtù della proprietà (6.58) si trova

$$\mathcal{L}(\partial)u = \mathcal{L}(\partial)[f * \mathcal{G}] = f * [\mathcal{L}(\partial)\mathcal{G}] = f * \delta = f,$$

essendo \mathcal{G} soluzione fondamentale di \mathcal{L} . Per l'unicità è sufficiente mostrare che non esistono (nel sottospazio di \mathcal{D}' laddove esista la convoluzione con \mathcal{G}) soluzioni non-banali dell'omogenea $\mathcal{L}(\partial)u = 0$:

$$u = u * \delta = u * [\mathcal{L}(\partial)\mathcal{G}] = [\mathcal{L}(\partial)u] * \mathcal{G} = 0. \quad \square$$

A conclusione del paragrafo, discutiamo un metodo utile a costruire soluzioni fondamentali e.g. in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a partire da soluzioni fondamentali in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$. Si consideri dunque l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti $\mathcal{L} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ nelle variabili $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avente avente ordini interi finiti m, p in $\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t$ rispettivamente, definito come

$$\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t) := \sum_{1 \leq q \leq p} \partial_t^q \mathcal{L}_q(\partial_{\mathbf{x}}) + \mathcal{L}_0(\partial_{\mathbf{x}}), \quad (6.153)$$

dove \mathcal{L}_q dipende esclusivamente da $\partial_{\mathbf{x}}$. Supponiamo che all'operatore (6.153) corrisponda l'equazione

$$[\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)u](\mathbf{x}, t) = (f \times \delta)(\mathbf{x}, t), \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (6.154)$$

e che $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ sia prolungabile nel sottospazio $\{\psi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) : \psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}) \times I(t)\}$ con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nel senso che $\forall \{\eta_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergente ad uno in \mathbb{R} , risulti $(u, \varphi(\mathbf{x})\eta_k(t)) \rightarrow (u(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}) \times I(t))$ per $k \rightarrow +\infty$. Indichiamo il funzionale precedente come

$$(u_0, \varphi) := \lim_{k \rightarrow +\infty} (u, \varphi(\mathbf{x})\eta_k(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \quad (6.155)$$

in virtù della completezza di \mathcal{D}' , è evidente che $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i.e. è un funzionale lineare e continuo di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Per la distribuzione u_0 vale, in particolare, la seguente costruzione.

LEMMA (COSTRUZIONE DI u_0) - $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) : \int_{\mathbb{R}} |u(\mathbf{x}, t)| dt \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u_0 \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ ed

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} u(\mathbf{x}, t) dt. \quad (6.156)$$

Dimostrazione. Sia u_0 definita come in (6.155); poiché $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, essa definisce una distribuzione regolare di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ e vale il teorema sulla convergenza dominata, per cui $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$(u_0, \varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u, \varphi(\mathbf{x}) \times \eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) \eta_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}} u(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x}. \quad \square$$

Possiamo a questo punto dimostrare il seguente teorema, noto come **metodo della discesa** in t .

¹²⁴Si noti che l'unicità della soluzione va intesa rispetto al sottospazio di \mathcal{D}' nel quale esista la convoluzione con \mathcal{G} .

(METODO DELLA DISCESA) - Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ una soluzione distribuzionale dell'equazione (6.154); se u ammette il prolungamento (6.155), allora $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione distribuzionale dell'equazione

$$[\mathcal{L}_0(\partial_{\mathbf{x}})u_0](\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.157)$$

Dimostrazione. Sia $\{\eta_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergente ad 1 in \mathbb{R} ; allora $\forall q = 1, 2, \dots, p$ anche $\xi_k \equiv \eta_k - \partial_t^q \eta_k$ converge ad 1 in \mathbb{R} per $k \rightarrow +\infty$, sicché in virtù della (6.155) si trova

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0(\partial_{\mathbf{x}})u_0, \varphi) &= (u_0, \mathcal{L}_0(-\partial_{\mathbf{x}})\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u, \mathcal{L}_0(-\partial_{\mathbf{x}})[\varphi(\mathbf{x}) \times \xi_k(t)]) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(u, \mathcal{L}_0(-\partial_{\mathbf{x}})[\varphi(\mathbf{x})\eta_k(t)] + \sum_{1 \leq q \leq p} \mathcal{L}_q(-\partial_{\mathbf{x}})\partial_t^q [\varphi(\mathbf{x})\eta_k(t)] \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (u, \mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)[\varphi(\mathbf{x})\eta_k(t)]) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f, \varphi(\mathbf{x})\eta_k(0)) = (f, \varphi). \end{aligned}$$

Ma la precedente è vera $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dunque $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione distribuzionale della (6.157). \square

Il metodo della discesa risulta particolarmente utile nella costruzione di soluzioni fondamentali. Difatti, specializzando il teorema precedente al caso $f \equiv \delta$ e tenendo conto della proprietà (6.44), i.e. $\delta(\mathbf{x}) \times \delta(t) = \delta(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, possiamo affermare quanto segue: *se la soluzione fondamentale $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ di $\mathcal{L}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)$ ammette il prolungamento (6.155), allora la distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$*

$$(\mathcal{G}_0, \varphi) := (\mathcal{G}, \varphi(\mathbf{x}) \times 1(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (6.158)$$

è soluzione fondamentale in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ di $\mathcal{L}_0(\partial_{\mathbf{x}})$; in particolare, se $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)| dt \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) dt \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.159)$$

Esempi

- SOLUZIONI FONDAMENTALI IN $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ DEGLI OPERATORI ∂_x E $\partial_x + a$

Il caso degli operatori differenziali $\mathcal{L}(\partial_x) \equiv \partial_x$ ed $\mathcal{L}_a(\partial_x) \equiv \partial_x + a$ con $a \in \mathbb{R}$ è paradigmatico poiché racchiude in sé gli elementi essenziali relativi al problema dell'unicità delle soluzioni fondamentali in \mathcal{S}' ed il legame che esso ha con le proprietà dell'insieme $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ degli zeri reali del polinomio $\mathcal{L}(\imath k)$. Infatti, applicando fin da subito il lemma "soluzioni fondamentali in \mathcal{S}' ", è evidente che $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $\mathcal{G}_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sono rispettivamente soluzioni fondamentali di \mathcal{L} ed \mathcal{L}_a sse

$$\mathcal{P}(k)\widehat{\mathcal{G}}(k) = \mathbf{1}, \quad \mathcal{P}(k) \equiv \imath\sqrt{2\pi}k, \quad (6.160)$$

$$\mathcal{P}_a(k)\widehat{\mathcal{G}}_a(k) = \mathbf{1}, \quad \mathcal{P}_a(k) \equiv \imath\sqrt{2\pi}(k - \imath a), \quad (6.161)$$

dalla quali segue evidentemente che $\mathcal{N}_{\mathcal{P}} = \{0\}$ ed $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_a} = \emptyset$. Nel primo caso la radice reale $k = 0$ fa sì che la soluzione fondamentale P.v. $\frac{1}{k}$ sia definita in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a meno di multipli di distribuzioni delta a supporto in $k = 0$, corrispondenti alle soluzioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dell'omogenea $\mathcal{P}(k)\widehat{\mathcal{G}} = 0$ (si veda §6.5.1, equazione (6.71)); nel caso in studio, ridefinendo opportunamente la costante $c \in \mathbb{C}$, si ha

$$\widehat{\mathcal{G}} = \frac{1}{\imath\sqrt{2\pi}} \left(\text{P.v.} \frac{1}{k} + c\delta \right) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.162)$$

con $c \in \mathbb{C}$ arbitraria. Si noti che nella famiglia (6.162) rientrano, in particolare, le formule di Plemelj–Sokhotski (6.31) ottenute ponendo $c = \pm \imath\pi$. Nel caso della (6.161), invece, il fatto che \mathcal{P}_a abbia radice complessa $k = \imath a$ rende la soluzione $1/\mathcal{P}_a(k) \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ unica in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dal momento che l'omogenea $\mathcal{P}_a(k)\widehat{\mathcal{G}}_a(k) = 0$ ha per soluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la distribuzione nulla.

Discusse le proprietà di unicità di \mathcal{G} e di \mathcal{G}_a , costruiamone esplicitamente le espressioni. Cominciamo dalla (6.162) ed invochiamo la (6.151): alla luce della (6.122), si trova

$$\mathcal{G} = -\frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}^{-1}\left[\text{P.v.}\frac{1}{k}\right] - \frac{\imath c}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}^{-1}\delta = \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}\left[\text{P.v.}\frac{1}{x}\right] - \frac{\imath c}{2\pi} = \frac{1}{2}\text{Sg} - \frac{\imath c}{2\pi}.$$

In particolare, regolarizzando $1/\mathcal{P}$ dando al polo $k = 0$ una parte immaginaria infinitesima $\pm\imath\rho$ con $\rho \rightarrow 0^+$ (equivalentemente aggirando la singolarità rispettivamente dall'alto o dal basso tramite la semi-circonferenza orientata γ_ρ , quindi “stirando” il cammino tra $-\infty \pm \imath\rho, +\infty \pm \imath\rho$) ed effettuando infine il cambio di variabile $z \rightarrow z \mp \imath\rho$, si trovano le soluzioni

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}\left[\frac{1}{k + \imath 0^+}\right] = \theta_+, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}\left[\frac{1}{k - \imath 0^+}\right] = -\theta_-, \quad (6.163)$$

alla luce della formula di Plemelj–Sokhotski (6.31) o, equivalentemente, della trasformata (6.119). Si noti che gli indici \mathcal{R} ed \mathcal{A} si riferiscono rispettivamente ai termini “ritardata” ed “anticipata”, una terminologia che adopereremo più avanti per le soluzioni fondamentali del d’Alembertiano. Consideriamo ora la (6.161): essendo $1/\mathcal{P}_a \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ è $\frac{1}{\mathcal{P}_a} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ regolare, per cui

$$\mathcal{G}_a(x) = \frac{1}{\imath\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{k - \imath a}\right](x) = \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{k + \imath a}\right](x) = \frac{\imath}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\imath kx}}{k + \imath a}dk, \quad x, a \in \mathbb{R}.$$

Procediamo ad un’integrazione complessa, distinguendo tra i casi $x > 0, x < 0$ ed i relativi sottocasi $a > 0$ ed $a < 0$ (essendo $a \in \mathbb{R}$). Per $x < 0$ chiudiamo il cammino d’integrazione in $\Im z > 0$ tramite la semi-circonferenza γ_R : invocando il lemma di Jordan ed il teorema dei residui, si trova

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\imath kx}}{k + \imath a}dx = \lim_{R \rightarrow +\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-\imath zx}}{z + \imath a}dz = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in \mathbb{R}^+, \\ 2\pi\imath e^{-ax} & \text{se } a \in \mathbb{R}^-, \end{cases}$$

essendo $\Gamma_R \equiv \gamma_R \cup [-R, R]$. Per $x > 0$ chiudiamo invece il cammino d’integrazione in $\Im z < 0$ tramite γ_R ; invocando nuovamente il lemma di Jordan ed il teorema dei residui, si ha

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\imath kx}}{k + \imath a}dx = -\lim_{R \rightarrow +\infty}\oint_{\Gamma'_R}\frac{e^{-\imath zx}}{z + \imath a}dz = \begin{cases} -2\pi\imath e^{-ax} & \text{se } a \in \mathbb{R}^+, \\ 0 & \text{se } a \in \mathbb{R}^-, \end{cases}$$

avendo tenuto conto del verso di orientazione. Combinando le precedenti, troviamo in definitiva che la soluzione fondamentale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dell’operatore \mathcal{L}_a è data dall’espressione

$$\mathcal{G}_a(x) = \text{Sg}(x)\theta[a\text{Sg}(x)]e^{-ax}, \quad x, a \in \mathbb{R}. \quad (6.164)$$

o SOLUZIONE FONDAMENTALE PER L’OPERATORE LAPLACIANO

Sia $\mathcal{L}_n(\partial_{\mathbf{x}}) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l’operatore di Laplace $\mathcal{L}_n(\partial_{\mathbf{x}}) = \partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$. In virtù del lemma “soluzioni fondamentali in \mathcal{S}' ”, $\widehat{\mathcal{G}}_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione fondamentale di \mathcal{L}_n sse

$$-|\mathbf{k}|^2\widehat{\mathcal{G}}_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.165)$$

Ricordiamo che per $n = 1, 2$ la “funzione” $|\mathbf{k}|^{-2} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ammette una singolarità non-integrabile nel qual caso occorre ricorrere alla regolarizzazione (6.29), i.e. $\text{Reg}\frac{1}{|\mathbf{k}|^2} = \text{F.p.}\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}$; per $n \geq 3$, invece, $|\mathbf{k}|^{-2} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ e dunque definisce univocamente una soluzione distribuzionale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ della (6.165). Discutiamo i casi $n = 1, 2, 3$ (per $n \geq 4$ si procede analogamente ad $n = 3$). Sia dunque $\mathcal{L}_1(\partial_x) = \partial_x$ e $\widehat{\mathcal{G}}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ t.c. sia soddisfatta l’equazione

$$\mathcal{P}_1(k)\widehat{\mathcal{G}}_1 = 1, \quad \mathcal{P}_1(k) = -\sqrt{2\pi}k^2, \quad (6.166)$$

ne segue che $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_1} = \{0\}$ con molteplicità due, sicché F.p. $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sarà soluzione distribuzionale della (6.166) a meno di combinazioni lineari di δ e δ' . Difatti, nel §6.5.1 si è visto che l'equazione algebrica $k^2 u(k) = \mathbf{1}$ ammette in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la soluzione (6.72); sicché, nel caso in studio, sarà

$$\widehat{\mathcal{G}}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{F.p.} \frac{1}{x^2} + c\delta + \tilde{c}\delta' \right) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (6.167)$$

avendo ridefinito le costanti $c, \tilde{c} \in \mathbb{C}$. Calcolando la trasformata della (6.167) si trova

$$\mathcal{G}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F} \left[\text{F.p.} \frac{1}{x^2} \right] + c\mathfrak{F}\delta + \tilde{c}\mathfrak{F}\delta' = \frac{1}{2}x\text{Sg} - \frac{c}{2\pi} - \frac{i\tilde{c}}{2\pi}x,$$

in virtù della (6.127). La soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_1(\partial)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è quindi

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{2}x \left(\text{Sg} - \frac{i\tilde{c}}{\pi} \right) - \frac{c}{2\pi} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.168)$$

In particolare, ponendo $c = 0$ e $\tilde{c} = \pm i\pi$, si trovano le soluzioni $\mathcal{G}_{1,\mathcal{R}} = x\theta_+$ e $\mathcal{G}_{1,\mathcal{A}} = x\theta_-$. Consideriamo ora il caso $n = 2$: sia $\mathcal{L}_2(\partial) = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ e $\mathcal{G}_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ t.c. $\mathcal{P}_2(\mathbf{k})\widehat{\mathcal{G}}_2 = \mathbf{1}$, dove $\mathcal{P}_2(\mathbf{k}) \equiv -(2\pi)|\mathbf{k}|^2$; di conseguenza $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_2} = \{\mathbf{0}\}$ e $\text{Reg}\{|\mathbf{k}|^{-2}\}$ non è unica in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Verifichiamo che F.p. $\frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ è soluzione generale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dell'equazione algebrica $\mathcal{P}_2(\mathbf{k})\widehat{\mathcal{G}}_2 = \mathbf{1}$:

$$\left(|\mathbf{k}|^2 \text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}, \varphi \right) = \left(\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}, |\mathbf{k}|^2 \varphi \right) = \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\mathbf{k}|^2 \varphi(\mathbf{k}) - [|\mathbf{k}|^2 \varphi(\mathbf{k})]_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}}{|\mathbf{k}|} d\mathbf{k} = (\mathbf{1}, \varphi),$$

per cui $\text{Reg}\{|\mathbf{k}|^{-2}\} = \text{F.p.}|\mathbf{k}|^{-2}$. Trascurando le distribuzioni a supporto puntiforme in $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ rispetto alle quali la precedente soluzione è definita, calcoliamo la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{G}_2 = -\frac{1}{2\pi} \mathfrak{F} \left[\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right] = \frac{1}{2\pi} (\gamma_0 + \ln |\mathbf{x}|) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2),$$

avendo invocato l'identità (6.128). In definitiva, la soluzione fondamentale del laplaciano in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ è data (modulo multipli di distribuzioni a supporto puntiforme in $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) dall'espressione

$$\mathcal{G}_2 = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}| + \frac{\gamma_0}{2\pi} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2). \quad (6.169)$$

Consideriamo infine il caso $n = 3$; sia $\mathcal{L}_3(\partial_{\mathbf{x}}) = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ e $\mathcal{G}_3 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ t.c. $\mathcal{P}_3(\mathbf{k})\widehat{\mathcal{G}}_3 = \mathbf{1}$ con $\mathcal{P}_3(\mathbf{k}) = -(2\pi)^{3/2}|\mathbf{k}|^2$. In tal caso la singolarità $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ è integrabile e dunque la divisione per \mathcal{P}_3 definisce la distribuzione regolare $\frac{1}{\mathcal{P}_3(\mathbf{k})} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ come soluzione unica dell'equazione algebrica in studio. Calcoliamo la trasformata di Fourier: invocando l'identità (6.129), si trova

$$\mathcal{G}_3 = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathfrak{F} \left[\text{F.p.} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right] = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$$

In definitiva, la soluzione fondamentale di \mathcal{L}_3 in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ è definita univocamente come

$$\mathcal{G}_3 = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.170)$$

◦ SOLUZIONE FONDAMENTALE PER L'OPERATORE DI HELLMOLTZ

Sia ora $\mathcal{L}_{H,n}(\partial_{\mathbf{x}}) := \mathcal{L}_n(\partial_{\mathbf{x}}) + a^2$ con $a \in \mathbb{R}$, l'operatore di Hellmoltz in \mathbb{R}^n , essendo $\mathcal{L}_n(\partial_{\mathbf{x}})$ l'operatore di Laplace. La distribuzione $\mathcal{G}_{H,n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_{H,n}$ sse

$$\mathcal{P}_{H,n}(\mathbf{k})\widehat{\mathcal{G}}_{H,n} = \mathbf{1}, \quad \mathcal{P}_{H,n}(\mathbf{k}) \equiv -(2\pi)^{n/2}(|\mathbf{k}| - a^2). \quad (6.171)$$

Si noti che $\mathcal{P}_{H,n}$ ammette radici reali e distinte $a\theta(a)$ per $a \in \mathbb{R}^+$ ed $-a\theta(-a)$ per $a \in \mathbb{R}^-$. Tuttavia, diversamente dall'operatore di Laplace, la "funzione" $1/\mathcal{P}_{H,n} \notin L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, i.e. le singolarità sono sempre non-integrabili; pertanto la soluzione fondamentale generale

$$\mathcal{G}_{H,n} = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathfrak{F} \left[\text{Reg} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{k}|^2 - a^2} \right\} \right]$$

di $\mathcal{L}_{H,n}$ non è unica in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analizziamo di seguito i casi $n = 1, 2, 3$. Cominciamo dal caso $n = 1$ ed osserviamo che, data la fattorizzazione $\frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k+a} \right)$, risulta

$$\mathcal{G}_{H,1} = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F} \left[\text{Reg} \left\{ \frac{1}{k+a} \right\} - \text{Reg} \left\{ \frac{1}{k-a} \right\} \right] \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.172)$$

Analizziamo dapprima la regolarizzazione della (6.172) tramite il valor principale di Cauchy; a questo proposito, è conveniente notare fin da subito che P.v. $\frac{1}{k \pm a} = \mathfrak{t}_{\mp a} \text{P.v.} \frac{1}{k}$ con $a \in \mathbb{R}$, infatti

$$\begin{aligned} \left(\text{P.v.} \frac{1}{k \pm a}, \varphi \right) &= \text{P.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(k)}{k \pm a} dk = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{|k \pm a| > \rho} \frac{\varphi(k)}{k \pm a} dk \\ &\stackrel{\zeta \equiv k \pm a}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{|\zeta| > \rho} \frac{(\mathfrak{t}_{\pm a} \varphi)(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \left(\mathfrak{t}_{\mp a} \text{P.v.} \frac{1}{k}, \varphi \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

avendo tenuto conto della proprietà di traslazione (6.37). Di conseguenza, alla luce della proprietà di trasformazione (6.106) per la traslata di una distribuzione e della identità (6.122), otteniamo

$$\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \left[\mathfrak{F} \left(\text{P.v.} \frac{1}{k+a} \right) - \mathfrak{F} \left(\text{P.v.} \frac{1}{k-a} \right) \right] = \frac{1}{2a} \text{Sg} \sin ax \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Osservando ora che le soluzioni distribuzionali dell'equazione $(k-a)(k+a)u(k) = \mathbf{1}$ differiscono da $\frac{1}{2a} [\text{P.v.} \frac{1}{k-a} - \text{P.v.} \frac{1}{k+a}]$ per una combinazione lineare di distribuzioni $\delta_{\mp a}$, i.e.

$$\mathcal{G}_{H,1}(c, \tilde{c}) = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F} \left[\left(\text{P.v.} \frac{1}{k+a} + c\delta_{-a} \right) - \left(\text{P.v.} \frac{1}{k-a} + \tilde{c}\delta_a \right) \right],$$

otteniamo in definitiva la seguente famiglia di soluzioni fondamentali generali in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ di $\mathcal{L}_{H,1}$:

$$\mathcal{G}_{H,1}(c, \tilde{c}) = \frac{e^{\imath ax}}{4\imath a} \left[\text{Sg} + \frac{\imath c}{\pi} \right] - \frac{e^{-\imath ax}}{4\imath a} \left[\text{Sg} + \frac{\imath \tilde{c}}{\pi} \right] \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (6.173)$$

con $c, \tilde{c} \in \mathbb{C}$ costanti arbitrarie (fissate dalle condizioni al contorno). In particolare, la famiglia di soluzioni (6.173) contiene quattro casi di uso comune in Fisica: $(\Downarrow) c = \tilde{c} = -\imath\pi$, $(\Uparrow) c = \tilde{c} = +\imath\pi$, $(\Downarrow\Uparrow) c = -\imath\pi$, $\tilde{c} = +\imath\pi$ ed $(\Uparrow\Downarrow) c = +\imath\pi$, $\tilde{c} = -\imath\pi$. Sostituendo nella (6.173) si trova

$$\mathcal{G}_{H,1}^{\Downarrow\Downarrow} = \frac{\sin ax}{a} \theta_+, \quad \mathcal{G}_{H,1}^{\Uparrow\Uparrow} = -\frac{\sin ax}{a} \theta_-, \quad \mathcal{G}_{H,1}^{\Downarrow\Uparrow} = \frac{1}{2\imath a} e^{\imath a|x|}, \quad \mathcal{G}_{H,1}^{\Uparrow\Downarrow} = -\frac{1}{2\imath a} e^{-\imath a|x|};$$

si noti che le soluzioni non sono linearmente indipendenti, infatti $\mathcal{G}_{H,1}^{\Downarrow\Downarrow} = \mathfrak{r} \mathcal{G}_{H,1}^{\Uparrow\Uparrow}$ e $\mathcal{G}_{H,1}^{\Downarrow\Uparrow} = \overline{\mathcal{G}_{H,1}^{\Uparrow\Downarrow}}$.

OSSERVAZIONE I – La notazione a freccia si riferisce all'equivalenza tra la regolarizzazione adoperate e la regolarizzazione che avremmo potuto seguire dando ai poli una parte immaginaria infinitesima positiva e/o negativa ed invocando la formula Plemelj–Sokhotski, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{H,1}^{(\Uparrow\Uparrow, \Downarrow\Downarrow)} &= -\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F} \left[\frac{1}{x+a \mp \imath 0^+} - \frac{1}{x-a \mp \imath 0^+} \right], \\ \mathcal{G}_{H,1}^{(\Uparrow\Downarrow, \Downarrow\Uparrow)} &= -\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F} \left[\frac{1}{x+a \mp \imath 0^+} - \frac{1}{x-a \pm \imath 0^+} \right]. \end{aligned}$$

Con riferimento alla classificazione delle soluzioni fondamentali del d'Alembertiano (vedi formula (??)) si usa spesso definire $\mathcal{G}_{H,1}^{\downarrow\downarrow}$, $\mathcal{G}_{H,1}^{\uparrow\uparrow}$ e $\mathcal{G}_{H,1}^{\uparrow\downarrow}$ come soluzione fondamentale rispettivamente *ritardata* $\mathcal{G}_{H,1}^{\mathcal{R}}$, *anticipata* $\mathcal{G}_{H,1}^{\mathcal{A}}$ e *di Feynman* $\mathcal{G}_{H,1}^{\mathcal{F}}$ per l'operatore di Hellmoltz $\mathcal{L}_{H,1}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

OSSERVAZIONE II – In modo altrettanto equivalente, saremmo potuti giungere al medesimo risultato regolarizzando l'integrale di Fourier (anziché la funzione integranda) tramite un'opportuna deformazione del cammino d'integrazione. In particolare, alla soluzione $\mathcal{G}_{H,1}^{\uparrow\uparrow}$ ($\mathcal{G}_{H,1}^{\downarrow\downarrow}$) sarebbe corrisposto il cammino d'integrazione Γ_{ρ}^{--} (Γ_{ρ}^{++}) ottenuto aggirando i poli $x = \mp a$ dal basso (alto) tramite due semi-circonferenze γ_{ρ} di raggio ρ infinitesimo e centri $\pm a$ rispettivamente, mentre alla soluzione $\mathcal{G}_{H,1}^{\uparrow\downarrow}$ ($\mathcal{G}_{H,1}^{\downarrow\uparrow}$) sarebbe corrisposto il cammino d'integrazione Γ_{ρ}^{\mp} (Γ_{ρ}^{\pm}) ottenuto aggirando $x = -a$ dal basso (alto) mediante γ_{ρ} di centro $x = -a$ ed il polo $x = a$ dall'alto (basso) tramite γ_{ρ} centrata in $x = a$. Come esempio, si consideri il caso $\mathcal{G}_{H,1}^{\downarrow\downarrow}$: risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{H,1}^{\downarrow\downarrow} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{R}_{\text{eg}}^{++}\left\{\mathcal{F}\left[\frac{1}{k^2-a^2}\right]\right\} = -\frac{1}{2\pi}\text{R}_{\text{eg}}^{++}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ixk}}{k^2-a^2}dk \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\rightarrow 0^+}\int_{\Gamma_{\rho}^{++}}\frac{e^{-ixz}}{z^2-a^2}dz = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\rightarrow 0^+}\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_{\Gamma_{\rho,R}^{++}}\frac{e^{-ixz}}{z^2-a^2}dz,\end{aligned}$$

essendo il cammino $\Gamma_{\rho,R}^{++}$ ottenuto restringendo Γ_{ρ}^{++} all'intervallo $[-R, R]$, con $R > a + \rho$. Per $x < 0$ ed $x > 0$ chiudiamo $\Gamma_{\rho,R}^{++}$ rispettivamente dall'alto e dal basso tramite la semi-circonferenza γ_R : invocando il lemma di Jordan ed il teorema dei residui, si trova in definitiva

$$\mathcal{G}_{H,1}^{\downarrow\downarrow} = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\rightarrow 0^+}\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_{\Gamma_{\rho,R}^{++}}\frac{e^{-ixz}}{z^2-a^2}dz = \frac{1}{a}\theta_+\sin ax.$$

Consideriamo ora il caso $n = 2$, i.e. determiniamo le soluzioni fondamentali in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dell'operatore di Hellmoltz bidimensionale $\mathcal{L}_{H,2}$. In virtù delle precedenti considerazioni, scriviamo

$$\mathcal{G}_{H,2} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\text{Reg}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^2-a^2}d\mathbf{k} = -\frac{1}{2\pi}\text{Reg}\left\{\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_0^R\frac{r\mathcal{J}_0(r|\mathbf{x}|)}{r^2-a^2}dr\right\}.$$

Per semplicità, consideriamo solo la regolarizzazione della funzione integranda corrispondente alla soluzione fondamentale anticipata in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ di $\mathcal{L}_{H,2}$; in tal caso otteniamo [Vla002]

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{H,2}^{\mathcal{R}} &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_0^R\frac{r\mathcal{J}_0(r|\mathbf{x}|)}{r^2-a^2-i0^+}dr = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\rightarrow 0^+}\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_0^R\frac{r\mathcal{J}_0(r|\mathbf{x}|)}{r^2-a^2-i\rho}dr \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\rightarrow 0^+}\mathcal{K}_0\left(-i|\mathbf{x}|\sqrt{a^2+i\rho}\right) = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{K}_0(-ia|\mathbf{x}|) = -\frac{i}{4}\mathcal{H}_0^{(1)}(a|\mathbf{x}|),\end{aligned}$$

essendo $\mathcal{H}_0^{(1)}$ la funzione di Hankel di prima specie di ordine zero. In definitiva

$$\mathcal{G}_{H,2}^{\mathcal{A}} = -\frac{i}{4}\mathcal{H}_0^{(1)}(a|\mathbf{x}|), \quad \mathcal{G}_{H,2}^{\mathcal{R}} = \frac{i}{4}\mathcal{H}_0^{(2)}(a|\mathbf{x}|) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2). \quad (6.174)$$

Analizziamo infine il caso $n = 3$, i. e. determiniamo le soluzioni fondamentali in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dell'operatore di Hellmoltz tridimensionale $\mathcal{L}_{H,3}$. Cominciamo con l'osservare quanto segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{H,3} &= -\frac{1}{(2\pi)^2}\text{Reg}\left\{\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_0^R\frac{r^2}{r^2-a^2}\int_0^{\pi}e^{-ir|\mathbf{x}|\cos\theta}\sin\theta d\theta dr\right\} \\ &= \frac{i}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\text{Reg}\left\{\lim_{R\rightarrow +\infty}\int_0^R\frac{r}{r^2-a^2}\int_{-ir|\mathbf{x}|}^{+ir|\mathbf{x}|}e^{\zeta}d\zeta dr\right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\text{Reg}\int_{\mathbb{R}_0^+}\frac{r\sin r|\mathbf{x}|}{r^2-a^2}dr \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3),\end{aligned}$$

avendo all'ultimo passaggio notato che la funzione integranda è infinitesima per $R \rightarrow +\infty$; invocando allora la parità della funzione integranda sulla retta reale, otteniamo la seguente espressione:

$$\mathcal{G}_{H,3} = \frac{\imath}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \text{Reg} \int_{\mathbb{R}} \frac{r}{r^2 - a^2} \left(e^{\imath|\mathbf{x}|r} - e^{-\imath|\mathbf{x}|r} \right) dr \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.175)$$

A questo punto è possibile invocare le stesse strategie di regolarizzazione adoperate per la determinazione delle soluzioni fondamentali in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ di $\mathcal{L}_{H,1}$; potremmo infatti tener conto della fattorizzazione $\frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right)$ e procedere ad una regolarizzazione tramite valor principale e distribuzione delta, oppure procedere ad una regolarizzazione della funzione integranda ed invocare la formula di Plemelj–Sokhotski. Seguiremo qui la via della regolarizzazione dell'integrale di Fourier; in particolare, consideriamo le regolarizzazioni corrispondenti alle soluzioni fondamentali ritardata e di Feynman di $\mathcal{L}_{H,3}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Calcoliamo perciò i seguenti integrali:

$$\mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{R}} = \frac{\imath}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{\rho,R}^{++}} \frac{z}{z^2 - a^2} \left(e^{\imath|\mathbf{x}|z} - e^{-\imath|\mathbf{x}|z} \right) dz, \quad (6.176)$$

$$\mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{F}} = \frac{\imath}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{\rho,R}^{+-}} \frac{z}{z^2 - a^2} \left(e^{\imath|\mathbf{x}|z} - e^{-\imath|\mathbf{x}|z} \right) dz, \quad (6.177)$$

essendo i cammini $\Gamma_{\rho,R}^{++}$ e $\Gamma_{\rho,R}^{+-}$ definiti come prima. Cominciamo dalla soluzione fondamentale ritardata: invocando il lemma di Jordan ed il teorema dei residui, si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{R}} &= \frac{\imath}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Gamma'_{++}} \frac{ze^{\imath|\mathbf{x}|z}}{z^2 - a^2} dz + \int_{\Gamma_{++}} \frac{ze^{-\imath|\mathbf{x}|z}}{z^2 - a^2} dz \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\lim_{z \rightarrow -a} \frac{ze^{-\imath|\mathbf{x}|z}}{z - a} + \lim_{z \rightarrow a} \frac{ze^{-\imath|\mathbf{x}|z}}{z + a} \right] = -\frac{\cos a|\mathbf{x}|}{4\pi|\mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

dove $\Gamma'_{++} \equiv \Gamma_{\rho,R}^{++} \cup \gamma_R$ è chiuso dall'alto (dunque non racchiude alcun polo) e $\Gamma_{++} \equiv \Gamma_{\rho,R}^{++} \cup \gamma_R$ chiuso dal basso. Per la soluzione fondamentale generale di Feynman, invece, risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{F}} &= \frac{\imath}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Gamma'_{+-}} \frac{ze^{\imath|\mathbf{x}|z}}{z^2 - a^2} dz + \int_{\Gamma_{+-}} \frac{ze^{-\imath|\mathbf{x}|z}}{z^2 - a^2} dz \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \left[\lim_{z \rightarrow a} \frac{ze^{\imath|\mathbf{x}|z}}{z + a} + \lim_{z \rightarrow -a} \frac{ze^{-\imath|\mathbf{x}|z}}{z - a} \right] = -\frac{e^{\imath a|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

Dunque le soluzioni fondamentali ritardata e di Feynman di $\mathcal{L}_{H,3}$ sono rispettivamente:

$$\mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{R}} = -\frac{\cos a|\mathbf{x}|}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{F}} = -\frac{e^{\imath a|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.178)$$

Si noti che $\mathcal{G}_{H,3}^{\mathcal{F}}$ corrisponde alle tipiche soluzioni ottenute in Fisica per l'equazione di Hellmoltz (equivalentemente, Schrödinger stazionaria) descrittive onde sferiche libere viaggianti.

◦ SOLUZIONE FONDAMENTALE PER L'OPERATORE DI DIFFUSIONE

Sia $\mathcal{L}_{\mathcal{D},n}(\partial_t, \partial_{\mathbf{x}}) \equiv \partial_t - a^2 \mathcal{L}_n$ l'operatore di diffusione (o di conduzione del calore) in \mathbb{R}^{n+1} e $\mathcal{G}_{\mathcal{D},n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ una soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_{\mathcal{D},n}$, i.e. $[\partial_t - a^2 \mathcal{L}_n] \mathcal{G}_{\mathcal{D},n} = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t)$. Applichiamo ora separatamente il lemma “soluzioni fondamentali in \mathcal{S}' ” alle variabili \mathbf{x} e t ; fissiamo t ed indichiamo con $(\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ l'operatore di trasformata rispetto alle variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: ne segue che $\mathcal{G}_{\mathcal{D},n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_{\mathcal{D},n}$ sse

$$\left(\partial_t + a^2 |\mathbf{k}|^2 \right) [\mathfrak{F}_{\mathbf{x}} \mathcal{G}_{\mathcal{D},n}] = \frac{\mathbf{1}_n \times \delta(t)}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.179)$$

Indichiamo ora $\beta \equiv a^2|\mathbf{k}|^2$; alla luce della (6.179) è evidente che $\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\mathcal{G}_{\mathcal{D},n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione fondamentale, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ fissato, dell'operatore $\mathcal{L}_{\beta} \equiv (2\pi)^{n/2}(\partial_t + \beta)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e nel primo tra gli esempi di questa sezione abbiamo mostrato come tal operatore ammetta come unica soluzione $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espressione (6.164). Nel caso in questione, essendo $\beta \in \mathbb{R}^+$ otteniamo

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\mathcal{G}_{\mathcal{D},n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\theta(t)e^{-a^2|\mathbf{k}|^2t} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (6.180)$$

Calcoliamo quindi la trasformata di Fourier inversa della (6.180): tenendo presente che la funzione $\mathbf{k} \mapsto \theta(t)e^{-a^2t|\mathbf{k}|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $a, t \in \mathbb{R}$, risulta in definitiva

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{D},n} &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^{n/2}}\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}^{-1}\left[e^{-a^2t|\mathbf{k}|^2}\right] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^{n/2}}\mathcal{F}_{\mathbf{x}}\left[e^{-a^2t|\mathbf{k}|^2}\right] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(a^2t|\mathbf{k}|^2+i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})}d\mathbf{k} \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{-(a^2tk_i^2+ik_ix_i)}dk_i = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^{n/2}}\prod_{i=1}^n\mathcal{F}_{x_i}\left[e^{-a^2tk_i^2}\right] = \frac{1}{a^n(4\pi t)^{n/2}}\theta(t)\prod_{i=1}^ne^{-\frac{x_i^2}{4a^2t}}, \end{aligned}$$

avendo invocato la formula (6.88) per la trasformata di Fourier di una gaussiana. In definitiva, si è trovato che $\mathcal{L}_{\mathcal{D},n}$ ammette soluzione fondamentale unica in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ data dall'espressione

$$\mathcal{G}_{\mathcal{D},n} = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\theta(t)e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2t}} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (6.181)$$

◦ SOLUZIONE FONDAMENTALE PER L'OPERATORE DI D'ALEMBERT

Sia ora $\mathcal{L}_{\square,n}(\partial_t, \partial_{\mathbf{x}}) \equiv \square_n := \partial_t^2 - \mathcal{L}_n$ l'operatore d'Alembertiano (operatore d'onda) in \mathbb{R}^{n+1} e $\mathcal{G}_{\square,n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ una soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_{\square,n}$, i.e. $\square\mathcal{G}_{\square,n} = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t)$. Procedendo come per l'esempio precedente, fissiamo $t \in \mathbb{R}$ ed applichiamo l'operatore di trasformata $(\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ relativo alle sole variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; allora $\mathcal{G}_{\square,n}$ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}_{\square,n}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sse

$$(\partial_t^2 + |\mathbf{k}|^2)\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\mathcal{G}_{\square,n} = \frac{1_n \times \delta(t)}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (6.182)$$

Riconoscendo in $(2\pi)^{n/2}\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\mathcal{G}_{\square,n}$ la soluzione fondamentale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dell'operatore di Hellmoltz $\mathcal{L}_{\text{H},1}$ con $a \equiv |\mathbf{k}| \in \mathbb{R}^+$, si trova (in virtù della (6.173)) la seguente famiglia di soluzioni

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\mathcal{G}_{\square,n}](c, \tilde{c}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\{\frac{e^{i|\mathbf{k}|t}}{4i|\mathbf{k}|}\left[\text{Sg} + \frac{ic}{\pi}\right] - \frac{e^{-i|\mathbf{k}|t}}{4i|\mathbf{k}|}\left[\text{Sg} + \frac{i\tilde{c}}{\pi}\right]\right\} \quad c, \tilde{c} \in \mathbb{C}. \quad (6.183)$$

Isolando nella (6.183) le soluzioni fondamentali ritardata e di Feynman, troviamo

$$\mathcal{G}_{\square,n}^{\mathcal{R}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\theta(t)\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\left[\frac{\sin(|\mathbf{k}|t)}{|\mathbf{k}|}\right], \quad \mathcal{G}_{\square,n}^{\mathcal{F}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}\left[\frac{1}{2i|\mathbf{k}|}e^{i|\mathbf{k}||t|}\right].$$

Per semplicità, restringiamo l'attenzione al caso tridimensionale ed analizziamo per prima la soluzione fondamentale ritardata; invocando la formula (6.117), calcolandone l'anti-trasformata e tenendo presenti le proprietà di parità della funzione Sinc, otteniamo in definitiva

$$\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}} = \frac{1}{4\pi t}\theta(t)\delta_{\mathcal{S}_t} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3+1}), \quad (6.184)$$

essendo $\mathcal{S}_t \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = t\}$. Tenendo presente che $\delta_{\mathcal{S}_t}$ proietta sul guscio sferico \mathcal{S}_t di raggio $t = |\mathbf{x}| \equiv r$ (dunque $dr = dt$), è evidente che l'azione di $\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}}$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ è la seguente

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}}, \varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{t}\theta(t)(\delta_{\mathcal{S}_t}, \varphi(\mathbf{x}, t))dt = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}_0^+}\frac{1}{t}\int_{\mathcal{S}_t}\varphi(\mathbf{x}, t = |\mathbf{x}|)d\mathbf{x}dt \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}_0^+}\frac{1}{r}\int_0^{4\pi}\varphi(r, \Omega, t = r)r^2d\Omega dr = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}_0^+}\int_0^{4\pi}\frac{\varphi(r, \Omega, t = r)}{r}r^2d\Omega dr, \end{aligned}$$

essendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ l'elemento di angolo solido $\Omega \in [0, 4\pi)$. In definitiva

$$\left(\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}}, \varphi\right) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\mathbf{x}, t = |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4). \quad (6.185)$$

La precedente permette di giustificare il termine “*ritardata*”. Nel §6.9 si è visto come costruire soluzioni per EDP non-omogenee del tipo (6.152) a partire dalle soluzioni fondamentali in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ di \mathcal{L} . Siano quindi $u, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ t.c. $\mathcal{L}_{\square,3}u = f$ e sia $\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ come in (6.184). Calcoliamo la convoluzione $f * \mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$: in virtù della definizione (6.65) e della (6.185), è

$$\begin{aligned} (f * \mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}}, \varphi) &= \left(f(x), (\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}}(y), \varphi(x+y))\right) = \int_{\mathbb{R}^4} f(x) (\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}}(y), \varphi(x+y)) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^4} f(x) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\mathbf{x}_0 + |\mathbf{y}|, \mathbf{x} + \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|} d\mathbf{y} dx \\ &\stackrel{\mathbf{z} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}, x_0) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\mathbf{z}, x_0 + |\mathbf{z} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|} d\mathbf{z} dx_0 d\mathbf{x} \\ &\stackrel{t \equiv x_0 - |\mathbf{z} - \mathbf{x}|}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\mathbf{z}, t) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{x}, t - |\mathbf{z} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|} d\mathbf{x} dt d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(\mathbf{z}, t) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{x}, t - |\mathbf{z} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|} d\mathbf{x} dz, \end{aligned}$$

posto $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}, x_0) \in \mathbb{R}^{3+1}$ per semplicità di notazione. Ne segue che la EDP non-omogenea $[\mathcal{L}_{\square,3}u](\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$ ammette in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ la soluzione “*ritardata*”

$$u_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4). \quad (6.186)$$

In altre parole, la soluzione $u_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ al tempo t è ottenuta integrando su tutti i valori che la sorgente $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ aveva al tempo precedente $t' \equiv t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, da cui il termine “*ritardata*”. Completiamo con il calcolo relativo alla soluzione fondamentale di Feynman $\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ di $\mathcal{L}_{\square,3}$; per comodità, poniamo $|t| \equiv \xi$ (fisso) e cominciamo col notare quanto segue:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{F}}, \varphi\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\mathfrak{F}\left[\frac{1}{2i|\mathbf{k}|} e^{i\xi|\mathbf{k}|}\right], \varphi\right) = \frac{1}{2i(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} e^{i\xi|\mathbf{k}|} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{16\pi^3 i} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \xi|\mathbf{k}|)} d\mathbf{k} d\mathbf{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

La soluzione fondamentale $\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{F}}$ soddisfa allora la seguente catena di identità distribuzionali:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{F}} &= \frac{1}{16\pi^3 i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \xi|\mathbf{k}|)} d\mathbf{k} = \frac{1}{8\pi^2 i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R r e^{i\xi r} \int_0^\pi e^{-ir|\mathbf{x}| \cos\theta} \sin\theta d\theta dr \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{i\xi r} \int_{-i|\mathbf{x}|r}^{+i|\mathbf{x}|r} e^\zeta d\zeta dr = -\frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \int_{\mathbb{R}} \theta_+ \left[e^{ir(\xi + |\mathbf{x}|)} - e^{ir(\xi - |\mathbf{x}|)} \right] dr \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \left\{ \mathfrak{t}_{|\mathbf{x}|} [\mathfrak{F}^{-1}\theta_+] - \mathfrak{t}_{-|\mathbf{x}|} [\mathfrak{F}^{-1}\theta_+] \right\}. \end{aligned}$$

Tenendo presente che $\mathfrak{F}^{-1}\theta_+ = \mathfrak{r}[\mathfrak{F}\theta_+]$, alla luce della identità (6.118) risulta

$$\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{R}} = \frac{i}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \left\{ \frac{1}{\xi + i0^+ - |\mathbf{x}|} - \frac{1}{\xi + i0^+ + |\mathbf{x}|} \right\} = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(\xi + i0^+)^2 - |\mathbf{x}|^2}.$$

Pertanto la soluzione fondamentale di Feynman in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ dell'operatore di d'Alembert $\mathcal{L}_{\square,3}$ è

$$\mathcal{G}_{\square,3}^{\mathcal{F}} = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(|t| + i0^+)^2 - |\mathbf{x}|^2} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4). \quad (6.187)$$

A *-algebre e C*-algebre

L'operazione di coniugazione hermitiana consente di introdurre due tra i concetti matematici più utili nelle formulazioni avanzate della Meccanica Quantistica: le strutture di ***-algebra** e di **C*-algebra**. Prima di descriverne le principali proprietà, richiamiamo le definizioni relative alla struttura di algebra.

DEFINIZIONE (ALGEBRA) - Sia A uno spazio vettoriale su un campo K ed $\circ : A \times A \rightarrow A$ un'applicazione. La coppia $\mathfrak{A} \equiv (A, \circ)$ è un'**algebra** se $\forall a, b, c \in A$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ l'applicazione \circ è tale per cui:

$$(A_1) \quad a \circ (b+c) = a \circ b + a \circ c; \quad (A_2) \quad (b+c) \circ a = b \circ a + c \circ a; \quad (A_3) \quad \alpha \circ (a+b) = (\alpha a) \circ b = a \circ (\alpha b).$$

Allora, l'applicazione $\circ : A \times A \rightarrow A$ prende il nome di **prodotto** dell'algebra. In particolare, \mathfrak{A} è

$$(A_4) \quad \text{commutativa (o abeliana) se } a \circ b = b \circ a;$$

$$(A_5) \quad \text{con unità se } \exists \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}, \text{ detto } \textit{identità} \text{ dell'algebra, t.c. } a \circ \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \circ a = a;$$

$$(A_6) \quad \text{normata, se } A \text{ è uno spazio normato con norma } \|\cdot\| \text{ t.c. } \|a \circ b\| \leq \|a\| \|b\|;$$

$$(A_7) \quad \text{di Banach, se } \mathfrak{A} \text{ è normata, } A \text{ è di Banach e } \|\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\| = 1.$$

Due algebre di Banach commutative banali sono \mathbb{C} ed \mathbb{R} , dove la norma corrisponde al valor assoluto. Naturalmente, è possibile definire delle operazioni tra algebre ed, in particolare, individuare un **omomorfismo** di algebre come un'applicazione *lineare* (dovendo essere rispettata la struttura di spazio vettoriale lineare) $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ che conserva il prodotto interno e l'unità, qualora presente; si potrà allora dire che \mathfrak{A} ed \mathfrak{A}' sono **isomorfe** se esiste un isomorfismo (un omomorfismo biiettivo) $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$.

DEFINIZIONE (*-ALGEBRA E C*-ALGEBRA) - Sia $\mathfrak{A} = (A, \circ)$ un'algebra (abeliana, con unità, normata o di Banach) su \mathbb{C} . Un'applicazione $*$: $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ che $\forall a, b \in \mathfrak{A}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gode delle seguenti proprietà

$$(I_1) \quad \text{antilinearità } (\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*, \quad (I_2) \quad \text{involutività } (a^*)^* = a, \quad (I_3) \quad (a \circ b)^* = b^* \circ a^*,$$

è detta **involuzione** e la coppia $(\mathfrak{A}, *)$ è detta ***-algebra** (abeliana, con unità, normata o di Banach). In particolare, una *-algebra di Banach (con unità) si dice **C*-algebra** (con unità) se

$$(I_4) \quad \|a^* a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

In tal caso, se $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ sono due *-algebre, allora un omomorfismo $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ è detto ***-omomorfismo** se preserva l'involuzione, ovvero $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ (dove la prima involuzione è relativa ad \mathfrak{A} e la seconda ad \mathfrak{A}'). Inoltre, un elemento x di una *-algebra si dice **normale** se $x^* x = x x^*$ ed **hermitiano** se $x^* = x$.

OSSERVAZIONE. Nel §4.1 si è visto che l'insieme $\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{L}(X, X)$ degli operatori lineari dallo spazio vettoriale X in sé è esso stesso uno spazio vettoriale; in particolare, se X è normato, il sottospazio $B(X) := \mathcal{L}(X)|_{A: X \rightarrow X, \text{ limitati}}$, munito della norma operatoriale (4.1), è esso stesso normato ed è di Banach se X è completo. È immediato verificare che $\mathcal{L}(X)$ soddisfa gli assiomi (A₁), (A₂) ed (A₃) (rispetto alla composizione tra operatori), ovvero $\mathcal{L}(X)$ possiede una struttura naturale di *algebra con unità* (essendo $\mathbf{1}_X \in \mathcal{L}(X)$) e $B(X)$ è una sua *sottoalgebra*. D'altronde $\|\mathbf{1}_X\| = 1$ e $\forall A, B \in B(X)$ si ha $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, quindi $B(X)$ è una *sottoalgebra normata con unità* ed è, in particolare, *di Banach se X è completo*. Possiamo spingerci oltre: i risultati relativi alle proprietà dell'aggiunto riassunte in (4.3) e (4.4) mostrano che l'operazione di aggiunta in uno spazio di Hilbert soddisfa gli assiomi (I₁), (I₂), (I₃) ed (I₄): perciò l'applicazione $*$: $B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ è un'*involuzione* e la coppia $(B(\mathcal{H}), *)$ è una *C*-algebra*. In particolare, gli operatori autoaggiunti corrispondono agli elementi hermitiani di $B(\mathcal{H})$.

Concludiamo con alcune immediate proprietà, soddisfatte in generale dalle C^* -algebre.

TEOREMA (PROPRIETÀ DELLE $*$ -ALGEBRE) - Sia \mathfrak{A} una $*$ -algebra e $*$: $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ la sua involuzione.

- (a) Se \mathfrak{A} è una C^* -algebra con norma $\|\cdot\|$ ed $a \in \mathfrak{A}$ è normale, allora $\|a^2\| = \|a\|^2$;
- (b) se \mathfrak{A} è una C^* -algebra con norma $\|\cdot\|$ ed $a \in \mathfrak{A}$ è normale, allora $\|a^*\| = \|a\|$;
- (c) se \mathfrak{A} è una $*$ -algebra con unità, allora $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^* = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$.

Dimostrazione. (a) Sia $a \in \mathfrak{A}$ normale: omettendo per semplicità l'operazione di prodotto dell'algebra ed osservando che $(a^*a)^* \stackrel{(I_3)}{=} a^*(a^*)^* \stackrel{(I_2)}{=} a^*a$ (a^*a è un elemento hermitiano di $B(\mathcal{H})$), si trova che

$$\|a^2\|^2 \stackrel{(I_4)}{=} \|(a^2)^*a^2\| \stackrel{a^*a=aa^*}{=} \|(a^*a)(a^*a)\| \stackrel{(I_3)+(I_2)}{=} \|(a^*a)^*(a^*a)\| \stackrel{(I_4)}{=} \|a\|^2 \iff \|a^2\| = \|a\|^2.$$

(b) Sia $a \in \mathfrak{A}$ normale: allora, procedendo come in precedenza, si trova

$$\|a^*\|^2 \stackrel{(I_4)+(I_2)}{=} \|aa^*\| \stackrel{a^*a=aa^*}{=} \|a^*a\| \stackrel{(I_4)}{=} \|a\|^2 \iff \|a^*\| = \|a\|.$$

(c) Per definizione di identità dell'algebra \mathfrak{A} , risulta essere $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^* = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^*$; d'altra parte, l'involutività e la proprietà (I₃) fanno sì che $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^* = (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^*)^*\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^* = (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^*)^* = (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^*)^* = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, la quale, combinata con la precedente, dà come risultato $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}^* = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$. Quindi $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$ è un elemento hermitiano di $B(\mathcal{H})$. \square

B Algebre di Weyl e teorema di Stone–von Neumann

C Integrale di Feynman e formula di Feynman–Kac

Discuteremo l'equivalenza tra le interpretazioni alla Feynman ed alla Schrödinger della Meccanica Quantistica, le proprietà dei cammini di Feynman (in particolare la differenziabilità) ed i problemi di convergenza dell'integrale di Feynman. Verranno quindi introdotte la misura di Wiener e la formula di Feynman–Kac ed analizzate le differenze tra l'integrale di Feynman e quello di Wiener. Per una trattazione più rigorosa degli argomenti presentati si vedano, in ordine di approfondimento, i riferimenti di seguito elencati:

- R. P. FEYNMAN – *Space–Time Approach to Non–Relativistic Quantum Mechanics*, Rew. Mod. Phys. **20**, 2 (1948).
- M. REED, B. SIMON – *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 2, Academic Press, Inc., (1975).
- M. ROCANDELLI, A. DEFENDI – *I cammini di Feynman*, Quaderni di Fisica Teorica, Uni. Pavia (1992).
- B. SIMON – *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press Inc., Princeton (1979).

C.1 Da Schrödinger a Feynman e viceversa

Sia

D Hilbert rigged spaces

Sia

E Trasformata di Laplace

F Metodo di Laplace

Riferimenti bibliografici

- [Ang009] W. T. ANG – *Notes on Cauchy principal and Hadamard finite-part integrals*, Nanyang Technological Uni. (2009).
- [Car993] P. CARESSA – *Metodi Matematici per la Meccanica Quantistica*, Appunti delle lezioni del prof. Sergio Doplicher, Uni. Roma I, (1993).
- [Con990] J. B. CONWAY – *A Course in Functional Analysis*, Second edition, Springer-Verlag, New York (1990).
- [Der007] J. DEREZIŃSKI – *Unbounded linear operators*, Lecture notes, Dep. of Math. Meth. in Phys., Warsaw University, (2007).
- [Fey948] R. P. FEYNMAN – *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, *Rew. Mod. Phys.* **20**, 2 (1948).
- [Fey965] R. P. FEYNMAN – *The Development of Space-Time View of Quantum Electrodynamics*, Nobel Lecture, (1965).
- [Kat980] T. KATO – *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1980).
- [Kre978] E. KREYSZIG – *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc., (1978).
- [Mor004] V. MORETTI – *Teoria spettrale e Meccanica Quantistica: Operatori in spazi di Hilbert* – Springer-Verlag, Italia (2010).
- [Ono009] E. ONOFRI – *Lezioni sulla teoria degli operatori lineari*, Seconda edizione, Dip. Fis., Università di Parma (2009).
- [ReS980] M. REED and B. SIMON – *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1: Functional Analysis, Academic Press, Inc., (1980).
- [ReS975] M. REED and B. SIMON – *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 2: Fourier Analysis, Self-Adjointness, Academic Press, Inc., (1975).
- [RoD992] M. RONCADELLI, A. DEFENDI – *I cammini di Feynman*, Quaderni di Fisica Teorica, Uni. Pavia (1992).
- [Rud973] W. RUDIN – *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill. Inc., (1973).
- [Sim979] B. SIMON – *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press Inc., Princeton (1979).
- [Sta979] I. STAKGOLD – *Green's functions and boundary value problem*, Un. of Dalaware, John Wiley & Sons, Inc., (1979).
- [Sus004] T. SUSLINA – *Sobolev Spaces and Embedding Theorems*, Stuttgart Uni. (2004).
- [Tra009] C. TRAPANI – *Appunti di teoria degli operatori*, Università degli Studi di Palermo (2009).
- [Vla971] V. S. VLADIMIROV – *Equations of Mathematical Physics*, Ed. A. JEFFREY, Marcel Dekker Inc. New York (1971).
- [Vla002] V. S. VLADIMIROV – *Methods of the Theory of Generalized functions*, Taylor & Francis (2002).
- [Wei980] J. WEIDMANN – *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York (1980).